MATHEMATISCHE ANNALEN

144. BAND

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN · DAVID HILBERT · OTTO BLUMENTHAL · ERICH HECKE

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON

HEINRICH BEHNKE — MÜNSTER (WESTF.)
RICHARD COURANT — NEW YORK
FRIEDRICH HIRZEBRUCH — BONN
HEINZ HOPF — ZÜRICH
GOTTFRIED KÖTHE — HEIDELBERG
KURT REIDEMEISTER — GÖTTINGEN
BARTEL L. VAN DER WAERDEN — ZÜRICH

144. BAND

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1961

Unveränderter Nachdruck 1975
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 144. Bandes

HAUPT, O.
Math. Annalen 144, 1—16 (1961)

Untersuchungen zur M. Barnerschen Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes auf Raumkurven

Von

OTTO HAUPT in Erlangen

Einleitung

1. Zwei vorangehende Noten ([8], [9]) beschäftigten sich mit Grundeigenschaften derjenigen Bogen und Kurven im projektiven n-dimensionalen Raum P_n, $n \geqq 2$, welche keine $(n-2, k)$-Sekanten oder sogar keine im strengen Sinne besitzen; $k = n + m$, $m \geqq 0$. Diese Bogen und Kurven erhält man durch direkt-geometrische Fassung des von M. BARNER [1] eingeführten — unseres Erachtens grundlegenden — Begriffes der streng-konvexen Kurven. Die vorliegende Mitteilung bringt, gestützt auf [8] und [9], direkt-geometrische Erweiterungen und Ergänzungen der Sätze von BARNER mit Beweisen.

2. Bei den fraglichen Sätzen handelt es sich um Beziehungen zwischen den Ordnungswerten und Mindest- oder Höchstzahlen für die ordnungsgeometrischen Singularitäten der Bogen und Kurven, welche *im strengen Sinne frei von* $(n-2, k)$*-Sekanten* sind; als Ordnungscharakteristiken figurieren hierbei die $(n-1)$-Ebenen (Hyperebenen) im P_n.

Verzichtet man zunächst auf Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, so ergibt sich: Ist der Ordnungswert ord(B) bzw. ord(C) des Bogens B bzw. der Kurve C (bezüglich der $(n-1)$-Ebenen) mindestens gleich $ni + 1$, $i = 1, 2, \ldots$, so ist die Anzahl der singulären Punkte von B bzw. von C mindestens gleich i bzw. mindestens gleich $i + 1$ (vgl. Nr. 1.2). Beispiele zeigen, daß — wenigstens für $n = 2$ — diese unteren Schranken i bzw. $i + 1$ genau sind (für jedes i). Ein weiterer Satz (vgl. Nr. 1.3) liefert ebenfalls untere Schranken für die Anzahl der singulären Punkte, wenn durch einen Punkt des Bogens bzw. der Kurve eine vorgegebene Anzahl von $(n-1)$-Tangentialebenen mit gewöhnlich differenzierbaren Berührungspunkten gehen; dabei wird aber über die Ordnungswerte von B bzw. C nichts vorausgesetzt.

Sind hingegen B bzw. C gewöhnlich differenzierbar, so erhält man (§ 2) die schärferen unteren Schranken ord$(B) - n$ bzw. ord(C) für die Anzahl der singulären Punkte (vgl. [7] und [1]). Schließlich lassen sich (§ 3) die (gewöhnlich differenzierbaren) *Kurven C vom Ordnungswert* $n + 1$ dadurch kennzeichnen, daß die Anzahl der singulären Punkte (genau) gleich $n + 1$ ist.

3. Hinsichtlich der Beziehungen der Sätze in §§ 1 bis 3 zu den Sätzen von BARNER und anderen Autoren sei auf [7], Einleitung und Nr. 2.1 ff., verwiesen. Bemerkt sei noch: Für Bogen und Kurven in der euklidischen Ebene E_2 gelten

Sätze (vgl. [5]), die zu denen sowohl des § 1 als der §§ 2 und 3 der gegenwärtigen Note, also für den projektiven P_n, völlig analog sind. An Stelle der Hyperebenen als Ordnungscharakteristiken in P_n treten in E_2 als Ordnungscharakteristiken Kurven, deren jede — grob gesprochen — durch n ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist und sich stetig mit diesen Punkten ändert. Und an Stelle der Forderung, daß die Bogen und Kurven B' in P_n im strengen Sinne frei seien von $(n-2, k)$-Sekanten tritt in E_2 die Forderung, daß die bezüglich der Ordnungscharakteristiken K zu untersuchenden Bogen und Kurven B' die folgende Eigenschaft besitzen: Die Punkte von $B' \cap K$ besitzen bei geeigneter Orientierung von K (und B') die gleiche Reihenfolge auf B' und auf K. Die Analogie der in Rede stehenden Sätze in P_n und in E_2 beruht auf der Übereinstimmung von Korrespondenzen, die in beiden Fällen durch die Ordnungscharakteristiken auf B' erzeugt werden. Es sind gerade solche Korrespondenzen, die in der früheren Mitteilung [9] sowie in der vorliegenden gewonnen bzw. benutzt werden (vgl. auch [7], Nr. 2.4ff.). Für den Fall des P_2 hat übrigens Fabricius-Bjerre [2] gezeigt, daß für B' die Freiheit im strengen Sinne von $(n-2, k)$-Sekanten $(k \geqq 2)$ i. w. gleichwertig ist damit, daß für die Punkte der Durchschnitte von B' mit den Geraden (als Ordnungscharakteristiken) die oben im Falle der Ebene E_2 erwähnte Übereinstimmung der Reihenfolge auf B' und K besteht.

§ 1. Untere Schranken für die Anzahl der singulären Punkte ohne Annahmen über Differenzierbarkeit oder Ordnungswert

1.1. Indem wir hinsichtlich der Definitionen und Bezeichnungen auf [8] verweisen, zeigen wir zunächst:

Hilfssatz. *Vor.* (1) *Es sei B' ein Bogen oder eine Kurve im P_n, der (die) im strengen Sinne frei von $(n-2, k)$-Sekanten*[1]) *und regulär*[2]) *ist* $(k \geqq n \geqq 2)$.

Behauptung. Eine $(n-1)$-Ebene durch n hinreichend benachbarte Punkte von B' hat mit B' keine weiteren Punkte gemeinsam; m. a. W.: Es existieren keine Punkte $a, b \in B'$ und $(n-1)$-Ebenen G durch b derart, daß G mindestens n zu a beliebig benachbarte Punkte, etwa $p_1, \ldots, p_n$ mit B' gemeinsam hat.

Zusatz. Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes hat speziell der $(n-1)$-Tangentialraum $T_{n-1}(c)$ an B' in einem gewöhnlich differenzierbaren Punkt c von B' außer c keinen Punkt mit B' gemeinsam.

Beweis. Indirekt. Es sollen also $a, b, G, p_1, \ldots, p_n$ im Sinne der Behauptung existieren und die p_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, in beliebig vorgegebener, zu b fremder Umgebung U von a auf B' liegen. Es sei B kleinster abgeschlossener, b und U enthaltender Teilbogen von B'.

(I) Aus der Regularität von B' folgt: Für hinreichend kleines U ist $\operatorname{ord}(U) = n$; dies wird also im folgenden über U vorausgesetzt. Ferner kann und soll o. B. d. A. angenommen werden: Die Punkte $p_1, \ldots, p_n, b$ werden in dieser Reihenfolge bei Orientierung von B durchlaufen und zwischen ihnen

---

[1]) In [8], Nr. 1.1, Seite 153, Zeile vor Anmerkung ist nach $M \cap N = 0$ anzufügen: „, wobei $M = L(M)$ und $N = L(N)$".

[2]) Vgl. [8], Nr. 1.3.

liegen keine weiteren Punkte von $B \cap G$; die $p_1, \ldots, p_n$, b sind sämtlich Schnittpunkte und gewöhnlich differenzierbar. — In der Tat: Zunächst ist $\operatorname{ord}(B)$ beschränkt, weil B regulär ist (vgl. [8], Nr. 1.3. I.). Daher gibt es in beliebiger Nachbarschaft von G eine, b enthaltende $(n-1)$-Ebene G'' derart, daß $U \cap G''$ mindestens n Schnittpunkte enthält, also (wegen $\operatorname{ord}(U) = n$) genau n Punkte, die sämtlich Schnittpunkte sind. (Man kann dies so beweisen: Es sei V die (beschränkte) konvexe Hülle von U in P_n; bei hinreichend kleinem U bzw. V gibt es in G eine, b enthaltende, zu V fremde $(n-2)$-Ebene L; es liegt dann $U \cap G$ ganz in einer der offenen, durch L begrenzten $(n-1)$-Halbebenen von G. Und es enthält $U \cap G$ etwa s Schnittpunkte sowie s' bzw. s'' Stützpunkte (mit etwa $s' \leqq s''$), deren Umgebungen auf U auf der einen oder anderen Seite von G (in V) liegen. Bei beliebig kleiner Drehung von G in passender Richtung um L erhält man eine $(n-1)$-Ebene G'' mit mindestens $s + 2s'' \geqq n$ Schnittpunkten). Nun gibt es in beliebiger Nähe von G'' eine im Raum der $(n-1)$-Ebenen des P_n offene Menge $\mathfrak{o}'$ derart, daß $B \cap G'$ nur Schnittpunkte enthält für jedes $G' \in \mathfrak{o}'$, und zwar n Schnittpunkte $p'_\nu \in U$ und mindestens einen zu b beliebig benachbarten Schnittpunkt. Da B, weil regulär, nur abzählbar viele Punkte enthält, die nicht gewöhnlich differenzierbar sind (vgl. [8], Nr. 1.4.2, Satz 1, Behauptung (2)), gibt es unter den $G' \in \mathfrak{o}'$ solche, für welche $B \cap G'$ nur Schnittpunkte enthält, die gewöhnlich differenzierbar sind. Wird der auf $B - U$ am nächsten bei U gelegene Schnittpunkt von $(B - U) \cap G'$ mit b bezeichnet und die Orientierung von B sowie die Numerierung der p'_ν entsprechend gewählt, so erhält man Punkte p_ν, b im Sinne der Behauptung eingangs dieser Ziffer (I).

(II) Es sei $x_1 = p_n$ gesetzt. Gemäß [9], Nr. 1.7.I und 1.7.1, enthält die $(n-1)$-Tangentialebene $T_{n-1}(x_1)$ an B im gewöhnlich differenzierbaren Punkt x_1 einen (nicht zu U gehörigen, also von x_1 verschiedenen) Punkt $q \in B$. Mit $B(x)$ werde der abgeschlossene Teilbogen von B bezeichnet, der x und q als Begrenzungspunkte besitzt $(x \in B)$; ferner sei $B^x = B(x) - \{x\}$. Es ist also $B^{x_1} \cap T_{n-1}(x_1) \neq 0$. Da der Bogen $B(x_1)$ beschränkt (vgl. [8], Nr. 2.1.1, Satz, Behauptung (1) (a)), also bikompakt ist, gibt es auf $B(x_1)$ Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1} = q$, $r \geqq 1$, derart, daß diese x_r auf $B(x_1)$ entsprechend der Orientierung von $B(x_1)$ aufeinanderfolgen (vgl. Ziff. (I)) und daß x_ϱ eine Umgebung $V(\varrho)$, $\varrho = 1, \ldots, r$, auf $B(x_1)$ besitzt mit folgender Eigenschaft: Es ist $B(x_\varrho) \subset V(\varrho) \cup \cdots \cup V(r)$, ferner $\operatorname{ord}(V(\varrho)) = n$ und $\{x_\varrho\} \cup \{x_{\varrho+1}\} \subset V(\varrho)$; weil die gewöhnlich differenzierbaren Punkte auf B dicht liegen, können die $x_2, \ldots, x_r$ als gewöhnlich differenzierbar angenommen werden (x_1 ist nach Ziff. (I) gewöhnlich differenzierbar). Wegen $\operatorname{ord}(V(\varrho)) = n$ ist $(V(\varrho) - \{y\}) \cap$ $\cap\, T_{n-1}(y) = 0$ für jedes gewöhnlich differenzierbare $y \in V(\varrho)$ (vgl. dazu [8], Nr. 1.4.2, Satz 1, Zusatz). Aus $B^{x_1} \cap T_{n-1}(x_1) \neq 0$ (vgl. oben) folgt $B^{x_1} \cap$ $\cap\, Th_{n-1}(x_1) \neq 0$ (gemäß [9], Nr. 2.1, Satz, Behauptung (1)). Zufolge [9], Nr. 2.3, Satz, Behauptung (I), ist daher $B^{x_2} \cap Th_{n-1}(x_2) \neq 0$. Man hat nun: *Entweder* (Fall A) ist $B^{x_2} \subset V(1) \cup V(2)$; dann ist $(V(1) \cup V(2)) \cap B^{x_2} \cap$ $\cap\, T_{n-1}(x_2) \neq 0$. Wegen $x_2 \in V(1) \cap V(2)$ ist andererseits $(V(j) - \{x_2\}) \cap$ $\cap\, T_{n-1}(x_2) = 0$, $j = 1, 2$; wegen $x_2 \notin B^{x_2}$ ist ferner $(V(1) \cup V(2)) \cap B^{x_2} \subset$

$\subset (V(1) - \{x_2\}) \cup (V(2) - \{x_2\})$. Daraus folgt $(V(1) \cup V(2)) \cap B^{x_1} \cap$ $\cap\, T_{n-1}(x_2) = \theta$, also ein Widerspruch. Fall A kann somit nicht eintreten. — *Oder* (Fall B) es gibt Punkte von B^{x_1}, die nicht zu $V(1) \cup V(2)$ gehören; es ist dann $r \geqq 3$. Nun kann man mit Hilfe von [9], Nr. 2.3, Satz, Behauptung (I), entsprechend wie oben, von $B^{x_1} \cap Th_{n-1}(x_2) \neq \theta$ auf $B^{x_1} \cap Th_{n-1}(x_3) \neq \theta$ schließen. Bei der Fortsetzung dieser Schlüsse tritt spätestens nach r Schritten der Fall A, also ein Widerspruch auf; denn $B(x_r) \subset V(r-1) \cup V(r)$. — Damit ist die Behauptung des Hilfssatzes bewiesen. — *Betr. den Zusatz.* Daß $(B' - \{c\}) \cap T_{n-1}(c) \neq \theta$ nicht möglich ist, geht aus dem Beweis in Ziff. (II) hervor.

1.2. Es läßt sich jetzt *unter Verzicht auf Differenzierbarkeitsannahmen* folgende *Kennzeichnung der im strengen Sinne n-Sek. freien Bogen vom minimalen Ordnungswert n* beweisen:

1. Satz. *Vor. Es sei $B \subset P_n$, $n \geqq 2$, ein im strengen Sinne von $(n-2, k)$-Sekanten freier Bogen (und nicht Kurve).*

Behauptung. Es besitzt B den (minimalen) Ordnungswert n genau dann, wenn B regulär ist (d. h. wenn jeder Punkt von B den Ordnungswert n besitzt).

Zusatz. Ist B im strengen Sinne frei von $(n-2, k)$-Sekanten und ist der größte offene Teilbogen $\underset{\sim}{B}$ von B regulär, so ist auch B selbst regulär (also $\mathrm{ord}(B) = n$ gemäß des Satzes). Daraus folgt: Besitzt B nur endlich viele singuläre Punkte, so ist jeder singuläre Punkt elementar, d. h. es besitzt sowohl eine vordere als eine hintere Umgebung des Punktes den Ordnungswert n (vgl. [8], Nr. 1.3)) und es ist B stückweise regulär.

Anmerkung. Die Voraussetzung, daß B ein *Bogen*, also keine Kurve sei, ist wesentlich. Denn B ist, weil regulär, vom beschränkten Ordnungswert n, während für eine im strengen Sinne von $(n-2, k)$-Sekanten freie *Kurve* von beschränktem Ordnungswert gilt: $\mathrm{ord}(C) \geqq n + 1$ (vgl. [8], Nr. 2.1.1, Satz, Behauptung (3)). — Wird hingegen die *Kurve* C nur als frei von $(n-2, k)$-Sekanten, also *nicht* auch *im strengen Sinne*, vorausgesetzt, so ist C, wenn regulär, vom Ordnungswert n (vgl. [10]; auch [6]).

Beweis. Ist $\mathrm{ord}(B) = n$, so ist B regulär. Es ist also nur zu zeigen: *Behauptung A:* Aus der Regularität von B folgt $\mathrm{ord}(B) = n$.

(1) Es ist B beschränkt (vgl. [8], Nr. 2.1.1, Satz, Behauptung (1) (a)), ebenso ist $\mathrm{ord}(B)$ beschränkt (vgl. [8], Nr. 1.3, I).

(2) Die Behauptung A ist richtig für $n = 2$. Wir erschließen dies indirekt so: Für einen str. n-Sek.freien Bogen B gilt: Ist B orientiert und hat die Gerade G mit B die Punkte $p_1, \ldots, p_r$ gemeinsam, liegt ferner $p_{\varrho+1}$ auf B vor p_ϱ, so gibt es, wie leicht zu sehen, eine Orientierung von G, bei welcher $p_{\varrho+1}$ auch auf G vor p_ϱ liegt (diese Orientierungsmöglichkeit von G ist sogar kennzeichnend für die ebenen ($n = 2$) str. n-Sek.freien Bogen (vgl. [2])); wir sprechen dann von *simultan konsekutiver Anordnung* der p_ϱ auf B und G. Daher gilt der Kontraktionssatz (vgl. [3], Nr. 4.4), welcher folgendes besagt: Ist $r \geqq n + 1 = 3$, so existiert ein, zwischen p_1 und p_3 gelegener Punkt $p \in B$ derart, daß jede beliebig kleine Umgebung U von p auf B mit einer geeigneten Geraden mindestens drei Punkte gemeinsam hat. Es ist also $\mathrm{ord}(p; B) \geqq 3$ im Widerspruch

mit der Vor., daß p regulär, d. h. daß $\operatorname{ord}(p; B) = 2$ ist. Somit gilt $r \leqq 2$ für jede Gerade G, d. h. $\operatorname{ord}(B) = 2 = n$; w. z. z. w.

(3) Wir setzen in vollständiger Induktion voraus, die Behauptung A sei schon für $2 \leqq n < N$ bewiesen, es sei $B \subset P_N$ regulär und q der Anfangspunkt von B; weiter sei E eine, q nicht enthaltende $(N-1)$-Ebene in P_N. Projiziert man B aus q in E, so ist die Abbildung f_B von B in E topologisch, wenn noch $f_B(q) = T(q) \cap E$ gesetzt ist (vgl. [8], Nr. 2.2, Satz, Behauptung (1)). Es liegt also B auf einer Kegelfläche Φ mit der Spitze q, deren Basis das Bild $f(B)$ von B in E ist; und für jede, q nicht enthaltende $(N-1)$-Ebene H ist $\Phi \cap H$ ein einfacher Bogen F, und zwar topologisches Bild von B derart, daß Punkte $b \in B$ und $f \in F$, die vermöge der Projektion einander entsprechen, simultan konsekutiv auf B und F angeordnet sind, wenn die Orientierung von F Bild derjenigen von B ist. Außerdem ist $f(B)$ wieder str. $(N-1)$-Sek.frei (gemäß [8], Nr. 2.2, Satz, Zusatz), insbesondere also beschränkt, ebenso wie $\operatorname{ord}(f(B))$ (vgl. [8], Nr. 2.2, Satz, Behauptung (2)) und somit lokal rangmaximal. Darüber hinaus hat jeder Punkt von $f(B)$ den Ordnungswert N oder $N-1$ (vgl. [4], Nr. 2.1, S. 140). Daher ist $f(B)$ stückweise regulär, d. h. Vereinigung endlich vieler abgeschlossener bis auf Begrenzungspunkte paarweise fremder, je regulärer Bogen (vgl. [4], S. 141). Also: Jeder singuläre Punkt von $f(B)$ besitzt den Ordnungswert N; und es gibt nur endlich viele, lediglich elementare singuläre Punkte (vgl. [8], Nr. 1.3). Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

1. Fall. Es besitzt $f(B)$ keine singulären Punkte. Nach Induktionsannahme ist $\operatorname{ord}(f(B)) = N-1$. Daher hat B mit jeder $(N-1)$-Ebene durch q höchstens N Punkte gemeinsam, einschließlich q (denn f_B ist topologisch). Angenommen, es sei $\operatorname{ord}(B) \geqq N+1$ und H eine $(N-1)$-Ebene, die mit B mindestens $N+1$ Punkte, etwa $p_1, \ldots, p_r$, $r \geqq N+1$, gemeinsam hat. Dann ist H fremd zu q und die p_ϱ können als auf B und $F = \Phi \cap H$ simultan konsekutiv angenommen werden. Da überdies H durch N seiner Punkte eindeutig bestimmt ist und stetig von ihnen abhängt, gilt auf Φ für B und die $\Phi \cap H$ wieder (wie bei $n = 2$) der Kontraktionssatz (vgl. Ziff. (2)). Es besitzt also B einen, etwa zwischen p_1 und p_{N+1} gelegenen Punkt vom Ordnungswert $N+1$, im Widerspruch mit der vorausgesetzten Regularität von B. Ist also $f(B)$ frei von singulären Punkten, so ist $\operatorname{ord}(B) = N$ und die Behauptung für diesen (1.) Fall bewiesen.

2. Fall. Es sei a' ein singulärer Punkt von $f(B)$, also $\operatorname{ord}(a') = N$; dabei ist $a' \neq f_B(q)$ (denn a' ist elementare Singularität von $f(B)$, also nicht Begrenzungspunkt von $f(B)$). Zu einer beliebig kleinen Umgebung U' von a' auf $f(B)$ gibt es also $(N-2)$-Ebenen $H' \subset E$ derart, daß $U' \cap H'$ genau N Punkte $p'_1, \ldots, p'_N$ enthält. Das Urbild U von U' ist eine beliebig kleine Umgebung von a auf B, wobei also $U' = f_B(U)$ und $a' = f_B(a)$. Ferner sei $p'_\nu = f_B(p_\nu)$ mit $p_\nu \in B$ und $\nu = 1, \ldots, N$. Wegen $a' \neq f_B(q)$ ist $a \neq q$ und folglich (bei hinreichend kleinem U) auch $p_\nu \neq q$, $\nu = 1, \ldots, N$. Dabei liegen die p_ν mit q in einer $(N-1)$-Ebene $G \subset P_N$. Es besitzen daher a, $b = q$, $p_1, \ldots, p_N$, G (für N statt n) die in der Behauptung des Hilfssatzes in Nr. 1.1 angeführten Eigenschaften. Somit kann B nicht regulär sein, entgegen der Vor. in Behauptung A

oben. Der vorliegende 2. Fall kann daher nicht eintreten. Damit ist die Behauptung A und folglich der Satz vollständig bewiesen.

Betr. Zusatz. Wegen der Regularität von $\underset{\sim}{B}$ ist jeder abgeschlossene Teilbogen $T = \underset{\sim}{T}$ von $\underset{\sim}{B}$ regulär (und str. n-Sek.frei). Zufolge des Satzes ist daher $\operatorname{ord}(T) = n$. Dann ist aber auch $\operatorname{ord}(B) = n$, also insbesondere $B = \overline{B}$ regulär. Andernfalls nämlich existiert eine $(n-1)$-Ebene H derart, daß die Mächtigkeit ω von $B \cap H$ mindestens gleich $n+1$ ist. Dabei kann ω nicht unendlich sein, weil sonst ein geeignetes T mehr als n Punkte mit H gemeinsam hat. Somit ist $\operatorname{ord}(B)$ endlich, also der Reduktionssatz anwendbar (vgl. [8], Nr. 1.3.1); ist daher $\operatorname{ord}(B) \geqq n+1$, so gibt es $(n-1)$-Ebenen H'', welche mit einem T, dessen Begrenzungspunkte hinreichend nahe bei denen von $\underset{\sim}{B}$ liegen, mindestens $n+1$ Punkte gemeinsam haben. Widerspruch.

Der 1. Satz läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

2. Satz. Verallgemeinerter 2-Scheitelsatz.

Vor. (1) *Es sei B' ein Bogen oder eine Kurve in P_n, $n \geqq 2$, und im strengen Sinne frei von $(n-2, k)$-Sekanten.* — (2) *Es besitze B' (mindestens) den Ordnungswert $i' = ni + 1$, wobei $i = 1, 2, \ldots$. (Im Falle einer Kurve ist übrigens* $\operatorname{ord}(B') \equiv n + 1 \pmod 2$ (vgl. [8], Nr. 2.1.1, Satz, Behauptung (3)).

Behauptung. Je nachdem B' ein Bogen oder eine Kurve ist, beträgt die Anzahl der singulären Punkte von B' mindestens i bzw. mindestens $i + 1$.

Anmerkung. Differenzierbarkeitsannahmen bezüglich B' sind nicht gemacht.

Beweis. (1) Es genügt, den Fall zu betrachten, daß B' nur endlich viele singuläre Punkte besitzt, etwa $s_1, \ldots, s_m$; ist B' eine Kurve, so sei $s_1 = s_{m+1}$ gesetzt. Bei einer Orientierung von B' liege $s_{\mu+1}$ vor s_μ, $1 \leqq \mu \leqq m-1$ bzw. $1 \leqq \mu \leqq m$, je nachdem B' Bogen bzw. Kurve ist. Die offenen Bogen $\underset{\sim}{B}_\mu = \underset{\sim}{B}(s_\mu, s_{\mu+1})$ [3]) sind dann regulär, also $\operatorname{ord}(\underset{\sim}{B}_\mu) = \operatorname{ord}(B_\mu) = n$ (gemäß Satz 1 und Zusatz). Somit ist B' stückweise regulär und daher $\operatorname{ord}(B')$ beschränkt. — (2) Es sei nun G eine $(n-1)$-Ebene, für welche $B' \cap G$ $i' = ni + 1$ Punkte von B' enthält. Ist zunächst B' ein Bogen und ist $m \leqq i - 1$, so liegen in mindestens einem der $m+1$ Teilbogen B_μ, etwa in B_1, mindestens $n+1$ der i' Punkte von $B' \cap G$. Dann ist aber $\operatorname{ord}(B_1) \geqq n+1$ im Widerspruch zu $\operatorname{ord}(B_1) = n$, also $m \geqq i$, wie behauptet. — Ist B' eine Kurve und $m \leqq i$, so liegen in mindestens einem der m Teilbogen B_μ wieder mindestens $n+1$ Punkte von $B' \cap G$, im Widerspruch zu $\operatorname{ord}(B_\mu) = n$.

Beispiele. Die im obigen Satz gewonnenen *unteren Schranken* i bzw. $i+1$ für die Anzahlen m der singulären Punkte *sind genau — wenigstens für die Ebene* $(n = 2)$. Beispiele für *Bogen*. Es sei B' passende Vereinigung von zwei Halbkreisen K, welche in ihrem gemeinsamen Begrenzungspunkt d einen Dorn bilden. Eine hinreichend kleine Umgebung B'' auf B' von d ist dann ein Bogen mit $\operatorname{ord}(B'') = 2i + 1 = 3$ und $m = 1 = i$. Hingegen ist B' selbst ein Bogen mit $2 \cdot 2 + 1 = 5 > \operatorname{ord}(B') = 4 > 3$ und $m = 1 = i$. Setzt man in einem der Begrenzungspunkte von B' einen hinreichend kleinen Kreisbogen bzw. einen

[3]) Mit $\underset{\sim}{B}(s_\mu, s_{\mu+1})$ wird der offene, von s_μ und $s_{\mu+1}$ begrenzte, kein s_ϱ enthaltende Teilbogen von B' bezeichnet.

Halbkreis unter Bildung je eines Dornes an, so erhält man Bogen B'' bzw. $'B'$ mit $m = 2 = i$ und $\operatorname{ord}(B'') = 5$ bzw. mit $m = 2 = i$ und $\operatorname{ord}('B') = 6 > 5$ und entsprechend für alle $i \geqq 3$. — Beispiele für *Kurven*. Der Fall $i = 1$, $m = 2 = i + 1$ wird repräsentiert durch eine Kurve C mit einem Dorn und mit einem Wendepunkt sowie mit $\operatorname{ord}(C) = 3$ (vgl. [11]). Daraus erhält man Kurven für beliebiges i und $m = i + 1$, wenn man passend gewählte (reguläre) und hinreichend kleine Teilbogen von C durch passend gewählte Bogen mit je genau einem Dorn ersetzt; dabei erhöht sich nämlich $\operatorname{ord}(C) = 2i + 1$ um je 2 und m (sowie i) um je 1. Im übrigen überzeugt man sich, daß die so konstruierten Bogen und Kurven im strengen Sinne frei sind von $(n-2, k)$-Sekanten.

1.2.1. Eine fast unmittelbare Folgerung aus Nr. 1.2 ist der

Satz. *Vor.* (1) *Es sei B im P_n, $n \geqq 2$, ein abgeschlossener, lokal rangmaximaler Bogen (und keine Kurve) mit dem Anfangspunkt a.* — (2) *Es sei B im strengen Sinne frei von $(n-2, k)$-Sekanten.* — (3) *Es existiere eine $(n-1, k)$-Paratingente $(n \leqq k)$ $P_{n-1}(a)$ mit $(B - \{a\}) \cap P_{n-1}(a) \neq \theta$; es hat also $P_{n-1}(a)$ mit B einen (von a verschiedenen) Punkt gemeinsam.*

Behauptung. Es besitzt $\underset{\sim}{B} = B - \{a\} - \{b\}$ mindestens einen singulären Punkt, also einen im Innern von B gelegenen.

Beweis. Indirekt. Ist $\underset{\sim}{B}$ regulär, so auch B und es ist $\operatorname{ord}(B) = n$ (Nr. 1.2, Satz 1 nebst Zusatz): insbesondere ist also a regulär und daher, weil a als regulärer Begrenzungspunkt von B gewöhnlich differenzierbar ist, $P_{n-1}(a) = T_{n-1}(a)$ (vgl. [8], Nr. 1.4.2, Satz 1, Behauptung (3)). Gemäß Nr. 1.1, Zusatz, ist aber Vor. (3) zusammen mit $P_{n-1}(a) = T_{n-1}(a)$ unverträglich mit der Regularität von B, also mit der von $\underset{\sim}{B}$ (vgl. Nr. 1.2, Satz 1, Zusatz). Daraus folgt die Behauptung.

1.3. In Verallgemeinerung des Satzes in Nr. 1.1 zeigen wir weiter:

Satz. *Vor.* (1) *Es sei $B' \subset P_n$ orientiert, lokal rangmaximal und im strengen Sinne frei von $(n-2, k)$-Sekanten; $n \geqq 2$.* — (2) *In den m Punkten $p_\mu \in B'$ sei B' gewöhnlich differenzierbar, $\mu = 1, \ldots, m$. Diese p_μ seien auf B' im Sinne der Orientierung von B' angeordnet, wobei, falls $m > 1$ ist, p_μ etwa hinter $p_{\mu+1}$ liegt, $\mu = 1, \ldots, m-1$; $m \geqq 1$.* — (3) *Es existiere ein Punkt $q \in B'$, der von allen p_μ verschieden ist und für den gilt: $q \in T_{n-1}(p_\mu)$, $\mu = 1, \ldots, m$.*

Behauptung. Ist B' ein Bogen bzw. eine Kurve, so besitzt B' mindestens m bzw. mindestens $m + 1$ singuläre Punkte, die sämtlich von q verschieden sind. Falls B' ein Bogen B ist, liegen (mindestens) m singuläre Punkte in demjenigen, offenen, kleinsten Teilbogen von B, in dessen abgeschlossener Hülle q sowie sämtliche p_μ enthalten sind.

1. Zusatz. Hinsichtlich der *Lage* der singulären Punkte auf einem Bogen B läßt sich sogar folgendes aussagen: Je (mindestens) ein singulärer, von den $p_1, \ldots, p_m$ und von q verschiedener Punkt liegt (a) zwischen p_μ und $p_{\mu+1}$, falls q nicht zwischen p_μ und $p_{\mu+1}$ liegt; (b) zwischen p_μ und q, falls kein anderes der $p_1, \ldots, p_m$ zwischen p_μ und q liegt. Entsprechend für Kurven.

2. Zusatz. Die untere Schranke m bzw. $m + 1$ für die Anzahl der singulären Punkte ist genau, wenigstens für $n = 2$.

Beweis. **(I)** Falls B' *unendlich viele* singuläre Punkte enthält, ist nichts zu beweisen. O. B. d. A. besitze also B' nur *endlich* viele singuläre Punkte p_μ. Gemäß Nr. 1.2, Satz 1 und Zusatz, ist jeder dieser singulären Punkte elementar und daher B' stückweise regulär.

(II) Es sei also B' stückweise regulär. Auf B' sei etwa q zwischen p_t und p_{t+1} gelegen, wobei $t = 0, 1, \ldots, m$; dabei soll $t = 0$ bzw. $t = m$ bedeuten, daß q hinter p_1 bzw. vor p_m liegt. Falls B' eine Kurve ist, kann stets $t = m$ angenommen werden; falls B' ein Bogen ist, kann und soll der Fall $t = 0$ durch passende Orientierung von B' ausgeschlossen werden. Es ist also stets $1 \leqq t \leqq m$.

(III) Zunächst sei B' ein *Bogen* B und $B(\mu)$ der von p_μ und q begrenzte, abgeschlossene Teilbogen von B mit p_μ als Anfangspunkt.

(III1) Zuerst betrachten wir die p_μ mit $1 \leqq \mu \leqq t$. Aus $q \in T_{n-1}(p_\mu)$ folgt $q \in Th_{n-1}(p_\mu)$ (gemäß [9], Nr. 2.1, Satz, Behauptung (1)). Im Falle $t = 1$ ergibt sich die Existenz eines singulären Punktes $s_1 \in \underset{\sim}{B}(1) = B(t)$ aus Nr. 1.1. Im Falle $2 \leqq t$ zeigen wir: Es enthält außer $\underset{\sim}{B}(t)$ auch jeder Teilbogen $T(\mu) = B(\mu - 1) - \underset{\sim}{B}(\mu)$ mit $p_{\mu-1}$ als Anfangspunkt, $\mu = 2, \ldots, t$, in seinem Innern mindestens einen singulären Punkt s_μ. Wegen $\underset{\sim}{T}(\mu) \cap \underset{\sim}{T}(\nu) = \theta$ für $\mu \neq \nu$; $2 \leqq \mu, \nu \leqq t$, ist damit die Existenz von t singulären Punkten s_μ in $\underset{\sim}{B}(1)$ nachgewiesen. — In der Tat: Für $B(t)$ folgt die Behauptung wie im Fall $t = 1$. Enthält ferner $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}(\mu)$ keinen singulären Punkt, so ist $T = \underset{\sim}{T}$ selbst regulär (gemäß Nr. 1.2, Satz 1, Zusatz). Außerdem ist $q \in Th_{n-1}(p_{\mu-1})$ und $q \in Th_{n-1}(p_\mu)$. Wegen der Regularität von T und wegen der gewöhnlichen Differenzierbarkeit von B in den p_μ sind nun für $B(\mu - 1)$, $p_{\mu-1}$ und $\underset{\sim}{T}$ die Vor. (1) und (2) von [9], Nr. 2.3, Satz, erfüllt (man hat dort B zu ersetzen durch $B(\mu - 1)$, a durch $p_{\mu-1}$ und $V - \{a\}$ durch $\underset{\sim}{T}$). Ist daher $x \in \underset{\sim}{T}$ gewöhnlich differenzierbar und $B(x)$ derjenige Teilbogen von $B(\mu - 1)$, der x als Anfangs- und q als Endpunkt besitzt, so gilt $B(x) \cap \overline{Th_n(x)} \subset (B(\mu - 1) - \{p_{\mu-1}\}) \cap \cap\, \overline{Th_n(p_{\mu-1})}$. Für $x \to p_\mu$ ist $\overline{Th_n(p_\mu)} = \lim \overline{Th_n(x)}$, weil auch $\operatorname{ord}(p_\mu, T) = n$, also $\overline{Th_n(p_\mu)}$ existiert und als Limes der $Th_n(x)$ eindeutig bestimmt ist (vgl. [8], Nr. 1.4.2, Satz 1, Behauptung (3), die hier, weil p_μ regulär auch für $t = n$ gilt) und $B(\mu) = \lim B(x)$; somit gilt $B(\mu) \cap \overline{Th_n(p_\mu)} \subset (B(\mu - 1) - - \{p_{\mu-1}\}) \cap Th_n(p_{\mu-1})$. Wegen $q \in Th_{n-1}(p_{\mu-1}) \subset \overline{Th_n(p_{\mu-1})} - Th_n(p_{\mu-1})$ ist die rechte Seite der letzten Enthaltenseinsrelation fremd zu q, nicht aber die linke (weil nämlich $q \in Th_{n-1}(p_\mu) \subset \overline{Th_n(p_\mu)}$). Die Annahme, $\underset{\sim}{T}$ sei regulär, führt also zu einem Widerspruch.

(III2) Entsprechend wie in Ziff. (III1) ergibt sich, falls $t < m$ ist, die Existenz von $(m - t)$ verschiedenen singulären Punkten $s_{t+1}, \ldots, s_m$ in $\underset{\sim}{B}(m)$. Da die $s_1, \ldots, s_t$ in $\underset{\sim}{B}(1)$ liegen, die $s_{t+1}, \ldots, s_m$ hingegen in $\underset{\sim}{B}(m)$ und da $\underset{\sim}{B}(1) \cap \underset{\sim}{B}(m) = \theta$ ist, existieren im ganzen (mindestens) m verschiedene singuläre Punkte in $\underset{\sim}{B}$. Der Fall, daß B' ein Bogen sei, ist damit erledigt.

(IV) Es sei jetzt B' eine *Kurve* C, also $t = m$. Zunächst sei $m > 1$. Der von q und p_1 begrenzte, alle p_μ enthaltende (abgeschlossene) Teilbogen T' von C mit p_1 als Anfangspunkt ist str. n-Sek.frei und liefert gemäß Ziff. (III) mindestens m singuläre, in $\underset{\sim}{T}'$ gelegene Punkte. Weiter ergibt sich die Existenz

eines singulären Punktes, welcher im Innern des Teilbogens $T'' = C - \underset{\sim}{T}'$ mit p_1 als Anfangspunkt liegt. Denn T'' ist begrenzt von q und von p_1, es ist p_1 gewöhnlich differenzierbar und es ist q in der $(n-1)$-Tangentialebene $T_{n-1}(p_1)$ an C in p_1 enthalten. Auf T'' ist somit der Satz in Nr. 1.1 anwendbar, so daß auch $\underset{\sim}{T}''$ singuläre Punkte enthält. — Ist aber $m = 1$, so wählt man als Bogen T' irgendeinen der beiden, von q und p_1 begrenzten, geeignet orientierten Teilbogen von C und als $\underset{\sim}{T}''$ sein (entsprechend orientiertes) Komplement $C - T'$. Im übrigen schließt man wie für $m > 1$. Die Behauptung des Satzes ist somit auch für Kurven bewiesen.

Betr. Zusatz 1. Aus Ziff. (III 1) und (III 2) des vorstehenden Beweises ergibt sich, daß im Inneren eines jeden Teilbogens von B', der von einem der p_μ und von q oder von zweien der p_μ begrenzt wird, aber weder q noch eines der p_μ in seinem Innern enthält, singuläre Punkte liegen. Der Zusatz gilt auch für den Fall, daß unendlich viele singuläre Punkte vorhanden sind. Denn der indirekte Beweis in Ziff. (III 2) ist in diesem Falle ebenfalls anwendbar.

Betr. Zusatz 2. Beispiele für jedes m liefern: Für Bogen geeignete Teilbogen etwa von $y = \sin x$; für Kurven eine Kurve C mit $\operatorname{ord}(C) = 3$ und mit 3 Wendepunkten bzw. die durch geeignete beliebig kleine Deformation aus ihr entstehenden Kurven, wenn man q als nicht-singulär wählt (vgl. Nr. 1.2, Satz 2, Beispiele). Man beachte, daß $\operatorname{ord}(C) \equiv 1 \pmod 2$.

Anmerkung. Daß die Vor., es sei B' im strengen Sinne frei von $(n-2, k)$-Sekanten, für die Gültigkeit des vorstehenden Satzes im allgemeinen notwendig ist, zeigt für $n = 2$ das Beispiel einer, gewöhnlich differenzierbaren, regulären (d. h. hier lokal konvexen) Spirale ohne Doppelpunkt, von deren einem Begrenzungspunkt q aus eine beliebig vorgeschriebene Anzahl von Tangenten an die Spirale geht. Geeignete Zusammensetzung zweier solcher Spiralen liefert eine Kurve mit genau zwei singulären Punkten.

§ 2. Durch den Ordnungswert bestimmte untere Schranke für die Anzahl der singulären Punkte bei gewöhnlich differenzierbaren Bogen und Kurven

Wir beweisen jetzt eine direkt geometrische Fassung der Barnerschen Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes für Kurven zusammen mit einem entsprechenden Satz für Bogen. Hierbei stützen wir uns auf die Entwicklungen in § 1.

Satz. *Vor. Es sei $B' \subset P_n$ mit $n \geqq 2$ (ein Bogen oder eine Kurve und) im strengen Sinne frei von $(n-2, k)$-Sekanten sowie gewöhnlich differenzierbar.*

Behauptung. (a) *Es besitzt B' entweder* (a′) *unendlich viele singuläre Punkte oder* (a″) *es ist B' stückweise regulär, es ist also* $\operatorname{ord}(B')$ *beschränkt, etwa* $\operatorname{ord}(B') = t$. *Im Falle* (a″) *ist $t \geqq n$ und jeder singuläre Punkt von B' besitzt den Ordnungswert $n + 1$.* — (b) *Besitzt B' nur endlich viele singuläre Punkte, ist also* $\operatorname{ord}(B') = t$ *beschränkt (Fall* (a″)*), so gilt:* (1) *Ist B' ein Bogen B, so sind mindestens $t - n$ singuläre Punkte vorhanden und alle sind innere Punkte von B. (Speziell für $k = n$ sind gemäß Nr.* 1.2, *Satz* 1, *keine singulären Punkte vorhanden.)* — (2) *Ist B' eine Kurve C, so besitzt C mindestens t singuläre Punkte und es ist $t \equiv n + 1 \pmod 2$, also insbesondere $t \geqq n + 1$.*

Zusatz. (1) Ist $\text{ord}(B') = n$, so ist B' ein *Bogen*. — (2) Liegt ein Punkt $q \in B'$ auf den $(n-1)$-Tangentialebenen an B' in m Punkten von $B' - \{q\}$, so besitzt B' mindestens m oder mindestens $m + 1$ singuläre Punkte je nachdem B' ein Bogen oder eine Kurve ist. — (3) Enthält B' nur endlich viele singuläre Punkte und sind $p_1, \ldots, p_m$ reguläre Schnittpunkte von B' mit einer $(n-1)$-Ebene, so gibt es je nachdem B' Bogen oder Kurve ist, zu jedem p_μ (mindestens) $m - n$ bzw. m Punkte $q_\varrho \in B'$ derart, daß p_μ auf allen $T_{n-1}(q_\varrho)$ liegt. Falls B' *Kurve* ist, liegt jeder Punkt von B' auf den $(n-1)$-Tangentialebenen in mindestens $n + 1$ Punkten von B'. Dabei wird (sowohl im Fall der Bogen als in dem der Kurven) der Punkt p_μ selbst zu den q_ϱ gerechnet.

Anmerkung. Die (unteren) Schranken $t - n$ bzw. t in Behauptung (b) (1) bzw. (2) sowie m bzw. $m + 1$ in Zusatz (2) und $m - n$ bzw. m in Zusatz (3) sind genau, wenigstens für $n = 2$.

Beweis Betr. Behauptung (a). Es genügt, den Fall zu betrachten, daß auf B' nur endlich viele, etwa s, singuläre Punkte vorhanden sind. Diese liegen dann nicht in den etwa vorhandenen Begrenzungspunkten von B'; denn gemäß Nr. 1.2, Satz 2, Beweis (1), ist B' stückweise regulär, also jeder singuläre Punkt elementar. Je nachdem B' ein Bogen oder eine Kurve ist, wird B' Vereinigung von $s + 1$ oder s abgeschlossenen regulären Bogen, die bis auf Begrenzungspunkte paarweise fremd sind. Da jeder dieser Teilbogen lokal von beschränkter Ordnung (nämlich n), also lokal rangmaximal ist (vgl. [8], Nr. 1.3), gilt $n \leqq \text{ord}(B') = t < (s + 1) \cdot n + 1$. Da ferner B' gewöhnlich differenzierbar ist, besitzt jeder singuläre (elementare) Punkt den Ordnungswert $n + 1$ (vgl. [8], Nr. 1.4.2, Satz 2, Behauptung (1)).

Betr. Behauptung (b). Für $n = 2$ ist die Behauptung richtig. In der Tat: Es sei B' str. n-Sek.frei, gewöhnlich differenzierbar und $\text{ord}(B') = t$. Es gibt dann (gemäß den Bemerkungen im Beweis betr. Behauptung (a)) Geraden G mit folgender Eigenschaft: Es ist $B' \cap G = \{p_1\} \cup \cdots \cup \{p_t\}$, wobei jedes p_τ regulär und Schnittpunkt ist, ferner $T_1(p_\tau) \neq G : \tau = 1, \ldots, t$. Durch p_1 geht überdies, weil B' str. n-Sek.frei ist, eine von $T_1(p_1)$ verschiedene Gerade U, welche mit B' außer p_1 keine Punkte gemeinsam hat (vgl. [8], Nr. 1.5.1 und 1.6). Es kann $U \neq G$ angenommen werden, da bei beliebig kleiner, geeigneter Drehung von G um p_1 in G', die t Punkte $p_1' = p_1, p_2', \ldots, p_t'$ von $B' \cap G'$ wieder sämtlich reguläre Schnittpunkte werden und $T_1(p_t') \neq G'$ sowie $G' \neq U$ bleibt. Man zeichne nun U als uneigentliche Gerade aus. Dann ist p_1 der einzige uneigentliche Punkt von B', ferner ist $T_1(p_1)$ Asymptote von B' und G parallel zur Asymptote; $B' \cap G$ enthält $t - 1$ eigentliche Schnittpunkte. Daher gibt es, je nachdem B' Bogen oder Kurve ist, mindestens $t - 2$ bzw. $t - 1$, zu G parallele lokale Stützgeraden an B' mit eigentlichen Stützpunkten. Da B' gewöhnlich differenzierbar ist, sind diese Stützgeraden Tangenten (d. h. 1. Tangentialebenen) an B' durch p_1. Gemäß Nr. 1.3, Satz, existieren daher mindestens $t - 2$ bzw. t singuläre Punkte auf B' je nachdem B' Bogen oder Kurve ist. Da B' gewöhnlich differenzierbar ist, können diese singulären Punkte übrigens nur Wendepunkte sein.

Für $n \geqq 3$ wird Projektion und vollständige Induktion angewandt. Die Behauptung sei also schon für $2 \leqq n < N$ bewiesen. Wir betrachten den Fall $n = N$.

Betr. Behauptung (b) (1).

(I) Es sei also B' ein *Bogen* B. Ferner sei L eine $(N-1)$-Ebene (im P_N), für welche die Mächtigkeit von $B \cap L$ gleich $t = \operatorname{ord}(B)$ ist. Gemäß des Reduktionssatzes (vgl. [8], Nr. 1.3.1) kann angenommen werden, daß die (nach Vor. gewöhnlich differenzierbaren) t Punkte $q_\tau \in B \cap L$, $\tau = 1, \ldots, t$, sämtlich Schnittpunkte von B mit L sind. Darüber hinaus kann man erreichen, daß die q_k alle regulär sind sowie daß $T_1(q_\tau)$ nicht in L liegt, $\tau = 1, \ldots, t$. In der Tat: Nach Annahme sind die q_τ sämtlich Schnittpunkte von B mit L. Durch Übergang von L zu einem beliebig benachbarten L' kann erreicht werden, daß alle Punkte von $B \cap L'$ verschieden von den endlich vielen singulären Punkten, also regulär sind und daß sie alle Schnittpunkte bleiben. Es sei jetzt etwa $T_1(q_1) \subset L'$. Man lege *durch* q_1 eine $(N-2)$-Ebene H, die in L' enthalten ist, aber $T_1(q_1)$ nicht enthält (solche H existieren). Nun gibt es beliebig kleine Drehungen von L' um H in eine neue Lage L'' derart, daß die $t-1$ von q_1 verschiedenen Punkte von $B \cap L''$ sämtlich (gewöhnlich differenzierbare) Schnittpunkte und regulär bleiben und daß $T_1(q_1)$ nicht in L'' liegt. Dann ist der reguläre Punkt $q_1 \in B \cap L''$ von selbst Schnittpunkt mit L''. Überdies kann dabei erreicht werden, daß jedem $q_\tau \in B \cap L'$ mit nicht in L' gelegenem $T_1(q_\tau)$ ein $q_\tau'' \in B \cap L''$ mit nicht in L'' gelegenem $T_1(q_\tau'')$ entspricht. Gibt es nun noch ein $q \in B \cap L''$ mit $T_1(q) \subset L''$, so kann man auf dieses q die gleichen Überlegungen anwenden, wie vorher auf q_1; nach endlich vielen derartigen Schritten kommt man zu einem L der oben behaupteten Art. — Auf den (beschränkten) Bogen B wenden wir nunmehr Zentralprojektion f aus q_1 in eine, q_1 nicht enthaltende, also insbesondere von L verschiedene $(N-1)$-Ebene E an; außerdem sei $\{f(q_1)\} = E \cap Th_1(q_1) = \{q_1'\}$ (bezogen auf eine zu B und $f(B)$ fremde uneigentliche $(N-1)$-Ebene; vgl. [8], Nr. 2.2.1, Satz, Behauptung (II), (II1) und Zusatz). Es gilt dann $f(B \cap L) = f(B) \cap f(L)$ und $f(L) = E \cap L$; ferner ist $q_1' = f(q_1) \in E - f(L)$, weil $Th_1(q_1)$ nicht in L liegt. Da Schnittpunkte sich in Schnittpunkte (von $f(B)$ mit $f(L)$) projizieren, enthält $f(B) \cap f(L)$ genau $t-1$ Punkte und diese sind sämtlich Schnittpunkte. Außerdem ist $f(B)$ gewöhnlich differenzierbar, str. $(N-1)$-Sek.frei, stückweise regulär und ein Bogen (vgl. [8], Nr. 2.2, Satz, Behauptung (5) und (2) sowie Zusatz). Der Ordnungswert von $f(B)$ ist daher beschränkt und gleich $t-1$.

(II) Nach Induktionsannahme besitzt $f(B)$ mindestens $(t-1)-(N-1) = t-N$ singuläre Punkte, etwa y_r', $r = 1, \ldots, t-N$. Da $f(B)$ stückweise regulär und gewöhnlich differenzierbar ist (Ziff. (I)), besitzen die y_r' je den Ordnungswert $(N-1)+1 = N$ (vgl. [8], Nr. 1.4.2, Satz 2, Zusatz). Daher gibt es in beliebig kleiner Umgebung U_r' von y_r' auf $f(B)$ genau N in der gleichen $(N-2)$-Ebene $L_{N-2}' \subset E$ liegende Punkte von $f(B)$, etwa $y_{r\nu}'$, $\nu = 1, \ldots, N$; dabei ist $y_r' = \lim y_{r\nu}'$, wenn $U_r' \to y_r'$, d. h., wenn U_r' sich auf y_r' zusammenzieht.

(II) (1) Zunächst sei $y'_r \neq q'_1 = f(q_1)$ für jedes r. Dann gibt es $y_r, y_{r\nu} \in B \subset P_n$ mit $y'_r = f(y_r)$ und $y'_{r\nu} = f(y_{r\nu})$, wobei $y_r, y_{r\nu} \neq q_1$; $\nu = 1, \ldots, N$; $r = 1, \ldots, t-N$. Es liegen nun $q_1, y_{r1}, \ldots, y_{rN}$ in einer $(N-1)$-Ebene L_{N-1} (wobei $L'_{N-2} = f(L_{N-1})$) und L_{N-1} konvergiert gegen $T_{N-1}(y_r)$, also gegen die $(N-1)$-Tangentialebene an B in y_r, für $y_{r\nu} \to y_r$, d. h. für $y'_{r\nu} \to y'_r$ (vgl. [8], Nr. 1.4.2, Satz 2, Behauptung (2)). Gemäß Nr. 1.3, Satz, besitzt also B mindestens $t - N$ singuläre Punkte, weil nämlich $q_1 \in T_{N-1}(y_r.)$

(II) (2) Nunmehr sei $y'_r = q'_1$ für (genau) ein r, etwa $y'_1 = q'_1$. Ist $y'_1 \neq y'_{1\nu}$ für jedes ν $(1 \leqq \nu \leqq N)$ und alle hinreichend kleinen Umgebungen U'_1 von y'_1, so besitzt q_1 auf B den Ordnungswert $N+1$, ist also singulär entgegen der Konstruktion von q_1. Die Annahme, daß $y'_1 \neq y'_{1\nu}$ für jedes ν und jedes U'_1 sei, ist aber keine Einschränkung der Allgemeinheit. Ist nämlich $\{y'_{11}\} \cup \cdots \cup \{y'_{1N}\} = f(B) \cap U'_1 \cap L'_{N-2}$, so können wir zunächst (nach dem Reduktionssatz, [8], Nr. 1.3.1) o. B. d. A. alle $y'_{1\nu}$ als Schnittpunkte annehmen. Ist dann etwa $y'_{11} = y'_1\ (= q'_1)$, so halten wir $y'_{12}, \ldots, y'_{1,N-1}$ fest und wählen statt y'_{11} einen zu ihm hinreichend benachbarten Punkt y''_{11} auf $f(B)$ mit $y''_{11} \neq q_1$. Die $(N-2)$-Ebene $L''_{N-2} = L(\{y''_{11}\} \cup \{y'_{12}\} \cup \cdots \cup \{y'_{1,N-1}\})$ hat nun mit $f(B) \cap U'_1$ noch genau einen, zu y'_{1N} beliebig benachbarten Punkt y''_{1N} gemeinsam (falls y''_{11} hinreichend nahe bei y'_{11} liegt); wegen $y'_1 \neq y'_{1N}$ kann daher auch $y''_{1N} \neq y'_1$ angenommen werden. Jetzt ist $f(B) \cap U'_1 \cap L''_{N-2} = \{y''_{11}\} \cup \{y'_{12}\} \cup \cdots \cdots \cup \{y'_{1,N-1}\} \cup \{y''_{1N}\}$ mit $y''_{11} \neq q'_1$, $y''_{1N} \neq q'_1$, $y'_{1\nu} \neq q'_1$, $\nu = 2, \ldots, N-1$. — Damit ist die Behauptung (b) (1) bewiesen.

Betr. Behauptung (b) (2). Wie im Beweis betr. Behauptung (b) (1), Ziff. (I) konstruiert man eine $(n-1)$-Ebene L, für die $C \cap L$ aus genau t verschiedenen Schnittpunkten besteht, die regulär sind und deren zugehörige 1- Tangentialebenen an B nicht in L liegen. Durch Projektion aus dem Schnittpunkt q_1, Anwendung der Induktionsannahme und Rückgang zu C ergibt sich mit Hilfe von Nr. 1.3 wieder die Behauptung. Daß $\operatorname{ord}(C) \geqq n+1$ und $\operatorname{ord}(C) = n+1 \pmod 2$ ist, wurde in [8], Nr. 2.1.1, Satz, Behauptung (3), gezeigt.

Betr. Zusätze. (1) Gemäß Behauptung (b) (2) gilt $\operatorname{ord}(B') \geqq n+1$, falls B' eine Kurve ist. — (2) Folgt wegen der gewöhnlichen Differenzierbarkeit von B' aus Nr. 1.3, Satz. — (3) Der erste Teil ergibt sich aus dem Beweis für die Behauptung (b) (1) bzw. (b) (2) folgendermaßen: Wird in diesem Beweis $t = m$ gesetzt und p_1 als Projektionszentrum q_1 gewählt, so sind die dortigen Überlegungen unverändert anwendbar. Der zweite Teil ergibt sich so: Durch jeden Punkt von C geht eine $(n-1)$-Ebene L, die mit C mindestens n Punkte gemeinsam hat. Wegen $\operatorname{ord}(C) = n+1 \pmod 2$ hat aber L sogar mindestens $n+1$ Punkte mit C gemeinsam. Nun läßt sich wie für den ersten Teil wieder der Beweis von Behauptung (b) (2) anwenden.

Betr. Anmerkung. Die (untere) Schranke $t - n$ wird für $n = 2$ und $t \geqq 3$ erreicht bei dem durch $y = \sin x$, $0 \leqq x \leqq (t-1)\pi$ erklärten Bogen B (in der euklidischen x, y-Ebene) mit $\operatorname{ord}(B) = t$. Ebenso wird für dieses B die untere Schranke $m = t - 2$ (Zusatz 2) bzw. $m - n = t - 2$ (Zusatz 3) erreicht. Durch geeignete Ergänzung von B zu einer str. 2-Sek.freien Kurve in der projektiven Ebene erhält man Beispiele für die übrigen Behauptungen der Zusätze.

§ 3. Kennzeichnung der Kurven vom Ordnungswert $n+1$ durch die Anzahl $n+1$ der singulären Punkte

Für die gewöhnlich differenzierbaren str. n-Sek.freien *Kurven* vom niedrigsten Ordnungswert, nämlich $n+1$, ist kennzeichnend, daß die Anzahl der singulären Punkte genau $n+1$ beträgt. Es gilt nämlich der

Satz. *Vor. Es sei C eine gewöhnlich differenzierbare Kurve im P_n, die im strengen Sinne frei ist von $(n-2, k)$-Sekanten.*

Behauptung. Folgende beiden Aussagen sind gleichwertig: (1) *Es besitzt C genau $n+1$ singuläre Punkte.* — (2) *Es besitzt C den Ordnungswert $n+1$.*

Beweis. Vorbemerkung. Falls C genau $n+1$ singuläre Punkte besitzt, ist C stückweise regulär (vgl. Nr. 1.2, Satz 1, Zusatz), also $\operatorname{ord}(C)$ beschränkt ([8], Nr. 1.3) und $\operatorname{ord}(C) = n+1 \,(\operatorname{mod} 2)$ mit $\operatorname{ord}(C) \geqq n+1$ (vgl. [8], Nr. 2.1.1, Satz, Behauptung (3)). Ist andererseits $\operatorname{ord}(C) = n+1$, so besitzt C nur endlich (übrigens sogar nur beschränkt) viele elementare singuläre Punkte (vgl. [4], S. 141); es ist also C stückweise regulär. Gemäß dieser Vorbemerkung werden wir *im folgenden C* als *stückweise regulär* annehmen und daher insbesondere als lokal rangmaximal. (Vgl. für das Folgende auch [5].)

Betr. Behauptung: Aus (1) *folgt* (2). Gemäß der Vorbemerkung ist $\operatorname{ord}(C) = n+1+2t$ mit $t \geqq 0$. Gemäß § 2, Satz, Behauptung (b) (2), existieren mindestens $n+1+2t$ singuläre Punkte. Daher ist $n+1+2t \leqq n+1$, also $t=0$ und $\operatorname{ord}(C) = n+1$.

Betr. Behauptung: Aus (2) *folgt* (1).

(I) Es sei s die Anzahl der singulären Punkte von C (gemäß der Vorbemerkung ist sie endlich). Wegen $\operatorname{ord}(C) = n+1$ sind die singulären Punkte sämtlich vom Ordnungswert $n+1$ (und elementar). Gemäß § 2, Satz, Behauptung (b) (2), ist $n+1 \leqq s$. *Es genügt* daher *zu zeigen: Es ist $s \leqq n+1$.* Dabei seien $p_1, \ldots, p_s$ die singulären Punkte von C, und zwar in natürlicher Reihenfolge auf C angeordnet (entsprechend einer *zugrunde gelegten Orientierung von C*).

(II) Wir greifen irgendeines der p_σ heraus und bezeichnen es mit p. Jede hinreichend kleine vordere bzw. hintere Umgebung U_v bzw. U_h von p auf C ist ein Bogen vom Ordnungswert n. Für hinreichend kleine U_v, U_h liegt $U = U_v \cup U_h$ auf einem (2-dimensionalen) „Kegelmantel" K, der vom Ordnungswert $n-1$ ist (d. h. der Durchschnitt von K mit einer, die Kegelspitze z enthaltenden $(n-1)$-Ebene hat mit K höchstens $n-1$ Erzeugende gemeinsam, wobei als Erzeugende jede auf K gelegene (durch z gehende) Gerade bezeichnet wird); außerdem hat jede Erzeugende mit U höchstens einen Punkt gemeinsam (vgl. [12], I., S. 525, Nr. 3.3). Die Kegelspitze z ist dabei fremd zu $T_{n-1}(p)$ (und U), im übrigen aber beliebig wählbar; U_v und U_h hängen von p und von z ab. Eine $(n-1)$-Ebene, die mit U mindestens n Punkte gemeinsam hat, kann keine Erzeugende von K enthalten. Ist daher L eine $(n-1)$-Ebene, für die $U \cap L$ mindestens, also genau $n+1$ Punkte, und zwar Schnittpunkte enthält, so ist in L keine Erzeugende enthalten; folglich

gilt für ein solches L bzw. für das $n+1$ tupel von Punkten aus $U \cap L$ der Monotoniesatz (vgl. [12], II., S. 583, Nr. 1.3).

(II') Für die weiteren Überlegungen bedienen wir uns der folgenden Redeweise: Es heißen n Punkte $f_1, \ldots, f_n$ von C *assoziiert mit* einem Punkt $f' \in C$, wenn die f_ν mit f' in der gleichen $(n-1)$-Ebene liegen. Wir benötigen nun den

Hilfssatz. Alle hinreichend kleinen hinteren bzw. vorderen Umgebungen U_h bzw. U_v eines singulären Punktes $p \in C$ auf C besitzen die nachstehende Eigenschaft: Es gibt $f' \in U_h - \{p\}$, mit denen n Punkte $f_1, \ldots, f_n$ von $U_v - \{p\}$ assoziiert sind. — In der Behauptung dieses Hilfssatzes können U_h und U_v vertauscht werden.

Beweis. Indirekt. Wegen $\operatorname{ord}(p; C) = n+1$ gibt es $n+1$ beliebig nahe bei p gelegene Punkte von $U = U_h \cup U_v$, die der gleichen $(n-1)$-Ebene H angehören. Wegen $\operatorname{ord}(U_h) = \operatorname{ord}(U_v) = n$ muß sowohl $\underset{\sim}{U}_h = U_v - \{p\}$ als $\underset{\sim}{U}_v = U_v - \{p\}$ je mindestens einen dieser $n+1$ Punkte enthalten; es seien etwa $n-t$ in U_v enthalten und $t+1$ in $\underset{\sim}{U}_h$, so daß also $0 \leqq t \leqq n-1$ ist und *ein etwa nach p fallender Punkt zu U_v* gerechnet wird (was nur für $t \leqq n-2$ eintreten kann). Es sei f' der auf $\underset{\sim}{U}_h$ am weitesten von p auf U_h entfernte dieser $t+1$ Punkte. Wir halten f' fest und kontrahieren die übrigen n Punkte gemäß dem (aus der Gültigkeit des Monotoniesatzes folgenden) Kontraktionssatz (vgl. z. B. [3], S. 29, Nr. 4.4). Vermöge einer solchen Kontraktion erhalten wir einen Punkt $p' \in U$, in dessen beliebig kleiner Umgebung n Punkte (von C) liegen, die mit f' assoziiert sind. Da U_h den Ordnungswert n besitzt und $f' \in \underset{\sim}{U}_h$ ist, kann nicht $p' \in \underset{\sim}{U}_h$ sein; mithin ist $p' \in U_v$. Gilt überdies $p' \in \underset{\sim}{U}_v$, so ist die Behauptung bewiesen. Es sei also $p' = p$. Dann existiert eine konvergente Folge von $(n-1)$-Ebenen H_ν, in denen f' sowie je n gegen p konvergierende Punkte von U liegen. Die $(n-1)$-Ebene $H' = \lim H_\nu$ ist nun eine $(n-1)$-Paratingente $P_{n-1}(p)$ an C bzw. an U in p. Da U in p gewöhnlich differenzierbar und da p elementar ist, gilt $H' = T_{n-1}(p)$ (vgl. [8], Nr. 1.4.2, Satz 2, Behauptung (2)); außerdem ist $f' \in H'$. Weil aber $\operatorname{ord}(U_h) = n$ ist, kann f' nicht in $T_{n-1}(p)$ liegen, falls nur f' hinreichend benachbart ist zu p (vgl. [8], Nr. 1.4.2, Satz 1, Zusatz). Wir kommen also zu einem Widerspruch; somit ist nur der schon betrachtete Fall möglich, daß $p' \in \underset{\sim}{U}_v$ ist. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

(III) Wir setzen jetzt (vgl. Ziff. (II)): $p = p_1$ und $U_v = U_v^1$, $U_h = U_h^1$; ferner wählen wir U_v^1 bzw. U_h^1 jedenfalls so klein, daß U_v^1 bzw. U_h^1 dem von p_1 und p_2 bzw. von p_s und p_1 begrenzten, keine weiteren p_σ enthaltenden Teilbogen $T_{12} = \bar{T}_{12}$ bzw. $T_{s1} = \bar{T}_{s1}$ von C angehört, aber weder p_2 noch p_s als Begrenzungspunkt besitzt und daß auf p_1, U_v^1, U_h^1 der Hilfssatz in Ziff. (II') anwendbar ist. Es existieren also $f_j^1 \in \underset{\sim}{U}_v^1$, $j = 1, \ldots, n$, die mit einem $f' \in \underset{\sim}{U}_h^1$ assoziiert sind. Wir lassen die f_j^1 stetig und monoton in $\underset{\sim}{T}_{12}$ gegen p_2 wandern derart, daß die f_j^1 dabei sämtlich verschieden bleiben. Die $(n-1)$-Ebene $H = L(\{f_1^1\} \cup \cdots \cup \{f_n^1\})$ hat wegen $\operatorname{ord}(C) = n+1$ mit C stets genau einen weiteren Punkt f'' (außer den f_j^1) gemeinsam, welcher bei der monotonen Änderung der f_j^1 aus f' entsteht; hierbei ist f'' Schnittpunkt von H mit C (weil $\operatorname{ord}(C) = n+1$). Da sich aber H mit den f_j^1 stetig ändert, so ändert sich auch f''

mit ihnen stetig (und „geht nie verloren"). Durch eine monotone Änderung der eben erklärten Art wird das n-tupel $(f_1^1, \ldots, f_n^1)$ stetig übergeführt in ein solches n-tupel $(f_1^2, \ldots, f_n^2)$, das in einer beliebig kleinen hinteren Umgebung U_h^2 von p_2 liegt und (gemäß des Hilfssatzes in Ziff. (II')) mit einem zu p_2 beliebig benachbarten Punkt $f^2 \in U_v^2 - \{p_2\}$ assoziiert ist; hierbei bezeichnet U_v^2 eine (beliebig kleine) vordere Umgebung von p_2 auf C. Im Verlaufe der monotonen Überführung der f_j^1 in die f_j^2 innerhalb $\underset{\sim}{T}_{12}$ wird nun f'' stetig übergeführt in f^2. Dabei kann f'' niemals in $T_{12} = \bar{T}_{12}$ zu liegen kommen; denn einerseits ist T_{12} regulär, andererseits folgt aus der Existenz eines Punktes $f'' \in T_{12}$, mit dem n von ihm verschiedene in T_{12} gelegene Punkte assoziiert sind, daß $\operatorname{ord}(T_{12}) \geq n + 1$ ist und daß daher in $\underset{\sim}{T}_{12}$ ein singulärer Punkt liegt (vgl. § 2, Satz, Behauptung (b) (1)). Demgemäß durchläuft f'' stetig einen Teilbogen $T'_{12} = \bar{T}'_{12} \subset C - T_{12}$ von C, der f' und f^2 enthält, dessen Endpunkte also zu p_1 und p_2 beliebig benachbart sind (bei hinreichend kleinen U_h^1, U_v^2). Zu *jedem* Punkt $q \in \underset{\sim}{T}'_{12}$ existiert daher ein mit q assoziiertes n-tupel $(f'_1, \ldots, f'_n)$, das in $\underset{\sim}{T}_{12}$ liegt $(f'_j \in \underset{\sim}{T}_{12})$.

(III') Wendet man der Reihe nach auf $p_2, \ldots, p_s$ die gleiche Überlegung an wie in Ziff. (III) auf p_1 (und T_{12}), so erhält man abgeschlossene Teilbogen $T'_{23}, \ldots, T'_{s-1,s}$ derart, daß mit jedem Punkt q aus einem dieser $T'_{\sigma,\sigma+1} = \bar{T}'_{\sigma,\sigma+1}$, $\sigma = 2, \ldots, s-1$, ein n-tupel von Punkten aus $\underset{\sim}{T}_{\sigma,\sigma+1}$ assoziiert ist; dabei bezeichnet $T_{\sigma,\sigma+1}$ denjenigen, abgeschlossenen, kein weiteres p_ν enthaltenden Teilbogen von C, der begrenzt ist von p_σ und $p_{\sigma+1}$, während $T'_{\sigma,\sigma+1} \subset C - \bar{T}_{\sigma,\sigma+1}$ ist und die Begrenzungspunkte von $T'_{\sigma,\sigma+1}$ beliebig nahe bei p_σ bzw. $p_{\sigma+1}$ gewählt werden können. Daher ist $D = T'_{12} \cap \cdots \cap T'_{s-1,s}$ im (nicht leeren) Komplement (auf C) von $T_{12} \cup \cdots \cup T_{s-1,s}$ (bezüglich C) enthalten und kann als nicht leer angenommen werden. Es sei $q \in D$. Dann existieren in *jedem* $\underset{\sim}{T}_{\sigma,\sigma+1}$, $\sigma = 1, \ldots, s-1$, solche n-tupel von Punkten $f_1^\sigma, \ldots, f_n^\sigma$, die mit q assoziiert sind.

(III'') Man projiziert jetzt C aus q in eine $(n-1)$-Ebene E mit $q \in P_n - E$ und setze $f(q) = E \cap T_1(q)$ für das Bild $f(q)$ von q. Das Bild $f(C) \subset E$ von C ist eine str. $(n-1)$-Sek.freie, gewöhnlich differenzierbare Kurve höchstens vom Ordnungswert n (gemäß [8], Nr. 2.2, Satz). Außerdem existieren auf $f(C)$ Teilbogen T_σ^*, $\sigma = 1, \ldots, s-1$, derart, daß die $\underset{\sim}{T}_\sigma^*$ paarweise fremd sind und daß jedes $\underset{\sim}{T}^*$ mit einer passenden $(n-2)$-Ebene $F_\sigma \subset E$ genau n Punkte gemeinsam hat (dabei ist $F_\sigma = E \cap L_\sigma$, wenn L_σ die durch q und die $f_1^\sigma, \ldots, f_n^\sigma$ aufgespannte $(n-1)$-Ebene bezeichnet und wenn $T_\sigma^* = f(T_{\sigma,\sigma+1})$ ist). Aus § 2, Satz, Behauptung (b) (1) (wobei t durch n und n durch $n-1$ zu ersetzen ist) folgt jetzt, daß jedes T_σ^* mindestens einen singulären Punkt von $f(C)$ enthält; im ganzen besitzt somit $f(C)$ mindestens $s-1$ singuläre Punkte, wenn s die Anzahl der singulären Punkte von C bezeichnet.

(III''') Das Ergebnis von Ziff. (III'') erlaubt jetzt, vollständige Induktion anzuwenden. Es sei also $C = C_{n+1}$ gesetzt und $\operatorname{ord}(C_{n+1}) = n + 1$, ferner $s_{n+1} = s(C_{n+1})$ die Anzahl der singulären Punkte von C_{n+1} (gemäß der Vorbemerkung ist s_{n+1} endlich). Für $n = 2$ ist $s_3 \leqq 3$; dies folgt (sogar mit $s_3 = 3$)

aus den bekannten Sätzen über die (einfachen) gewöhnlich differenzierbaren C_3 von Juel [11]; jedes solche C_3 ist str. 2-Sek.frei, denn durch jeden Punkt p der C_3 geht eine von der Tangente in p verschiedene, zu $C_3 - \{p\}$ fremde Gerade (vgl. [11], S. 137). Es sei für alle n mit $2 \leqq n < N$ bewiesen, daß aus $\mathrm{ord}\,(C_{n+1}) = n + 1$ folgt: $s_{n+1} \leqq n + 1$. Gemäß (III″) ist $s_{N+1} - 1 \leqq s_N$ und nach Induktionsannahme gilt $s_N \leqq (N-1) + 1 = N$. Zusammen haben wir also $s_{N+1} - 1 \leqq N$ oder $s_{N+1} \leqq N + 1$; w.z.z.w.

Literatur

[1] Barner, M.: Über die Mindestanzahl stationärer Schmiegebenen bei geschlossenen, streng-konvexen Raumkurven. Abhandl. math. Seminar Hamburg. Univ. **20**, 196—215 (1956).

[2] Fabricius-Bjerre, Fr.: Om lineaert-monotone elementarkurver. Nordisk Mat. Tidskrift **7**, 27—35 (1959).

[3] Haupt, O.: Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene usw. Monatsh. Math. Physik **40**, 1—53 (1933).

[4] Haupt, O.: Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung. Math. Ann. **108**, 126—142 (1933).

[5] Haupt, O.: Zur Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes und seiner Umkehrung. Annali Mat. pur. appl. (IV) **27**, 294—320 (1948); **28**, 345 (1949).

[6] Haupt, O.: Zur Kennzeichnung der Kurven n-ter Ordnung im n-dimensionalen projektiven Raum. Bayer. Akad. Wiss., S.-B. math.-naturw. Kl. 1953, 289—299.

[7] Haupt, O.: Streng-konvexe Bogen in der direkten Infinitesimalgeometrie. Arch. Math. **9**, 110—116 (1958).

[8] Haupt, O.: Über einige Grundeigenschaften der Bogen ohne $(n-2, k)$-Sekanten im projektiven $P_n (n \leqq k)$. Math. Ann. **139**, 151—170 (1959).

[9] Haupt, O.: Lokal-reguläre Bogen ohne $(n-2, k)$-Sekanten im projektiven $P_n (n \leqq k)$. Math. Ann. **142**, 225—243 (1961).

[10] Hjelmslev, J.: Ein Satz über monotone Raumkurven im R_n mit einer Anwendung auf elliptisch und hyperbolisch gekrümmte Ovale. Acta Math. **87**, 59—82 (1952).

[11] Juel, C.: Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung. Danske Vid. Selsk. Skrifter 7. R. naturv. og math. Afd. XI **2**, 111—166 (1914).

[12] Sauter, I.: Zur Theorie der Bogen n-ter (Realitäts-)Ordnung im projektiven R_n. I. Mitt. Math. Z. **41**, 507—536 (1936); II. Mitt. Math. Z. **42**, 580—592 (1937).

(Eingegangen am 30. Dezember 1960)

Robinson, R. M.
Math. Annalen 144, 17—48 (1961)

Arrangement Of 24 Points On A Sphere

By

Raphael M. Robinson in Berkeley, California

§ 1. Introduction

1.1. Consider the problem of arranging n points on the unit sphere so as to maximize the minimum distance between any two of the points. It is immaterial whether we consider spherical distances or Euclidean distances (measured in the embedding three-dimensional space). The problem has been solved previously[1]) only for $n \leqq 9$ and $n = 12$. For $n = 3, 4, 6, 12$, the extremal configuration consists of the vertices of a regular polyhedron with triangular faces. Several proofs of this fact have been given by Fejes Tóth [1], [2], [3]. The proof in [2] (which is repeated in [3], V, § 2) is perhaps the simplest, and is the most closely related to the present paper. It is mentioned in that paper that the result was discovered independently by H. Hadwiger. Fejes Tóth also noticed that the critical distance is the same for $n = 5$ as for $n = 6$. The cases $n = 7, 8, 9$ were solved by Schütte and van der Waerden [8]. A simplified proof for $n = 7$ appears in van der Waerden [11], where it is also noted that this case was solved independently by G. Frey. In addition, the case $n = 13$ is discussed (but not completely solved) in Schütte and van der Waerden [9] and in Leech [5]. Asymptotic results are discussed in Habicht and van der Waerden [4] and in van der Waerden [11]. No knowledge of any of these papers is assumed.

In this paper, a proof of the conjecture of van der Waerden for the case $n = 24$ is given. (This result was announced in [7]. With regard to the conjecture, see [8], pages 97, 108, 123.) In the optimal arrangement, the points

[1]) It may be noted that a general method of Tarski [10] provides in theory a solution of the problem of the best arrangement of n points on a sphere for any fixed n. Indeed, given n, we can obtain in a finite number of steps an algebraic equation satisfied by the maximum possible value of the minimum Euclidean distance between any two of n points on the unit sphere. As Tarski has pointed out (in lectures), this furnishes a proof that this critical distance is always an algebraic number. However, because of the length of the required calculation, there does not appear to be an immediate prospect of actually applying this method, even with the aid of a high-speed computer; and it is not certain that this will ever be possible, even (say) for $n = 10$. Of course, the method might be modified so as to make this more feasible.

The situation here may be compared with the problem of testing large numbers for primeness. Any number can be so tested by examining whether any of the numbers from 2 up to its square root are divisors, but no computer will ever be able to identify a prime as large as 10^{100} by this method. On the other hand, some numbers as large as 10^{1000} (for example, those of the form $k \cdot 2^n + 1$ with $k < 2^n$) can be tested for primeness on existing machines in a few minutes by other methods.

form the vertices of an Archimedean semiregular polyhedron bounded by 32 equilateral triangles and 6 squares, with four triangles and a square meeting at each vertex. A development of one half of the surface of this solid is shown; two copies of this figure may be used to construct a model of the polyhedron. This configuration resembles the one found in [8] for $n = 8$, consisting of the vertices of a square antiprism (which has three equilateral triangles and a square meeting at each vertex). The method of proof has some similarity to the one used by SCHÜTTE and VAN DER WAERDEN in that case, but is considerably more complicated. In particular, both our proof and theirs make essential use of the fact that the minimum of a concave function in an interval must occur at an end point; compare [8], § 9. For more details concerning the relation of our proof to theirs, see footnote 2 below.

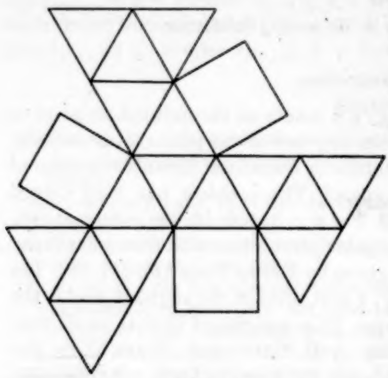

Fig. 1

1.2. Given any system of $n \geqq 3$ points on the unit sphere, we can triangulate the sphere using these points as vertices. By Euler's formula, we find that the total number of triangles must be $2n - 4$. If the points are not all on a hemisphere, we can obtain a triangulation as follows. In the three-dimensional space, form the convex hull of the given system of points, thus obtaining a convex polyhedron. Divide the faces into triangles by diagonals, then project onto the sphere from the center. The triangulation thus obtained will be called a *standard triangulation*. (The triangulation obtained in this way was used by FEJES TÓTH [2].)

We shall always measure distances on the sphere. Relative to any given distance a, we call a set of points (on the unit sphere) *saturated* if the distance between each two points is at least a, but it is impossible to adjoin another point so as to preserve this property. A saturated system corresponding to any $a \leqq 90°$ has a standard triangulation.

Let α be the angle of an equilateral triangle of side a, and let b and β be the diagonal and angle of a square (regular quadrangle) of side a. These quantities all exist at least for $0 < a \leqq 90°$. Finally, if $60° < \alpha < 72°$ (which corresponds to $0 < a < \text{arc tan } 2$), we put $\omega = 2\pi - 4\alpha$. The letters a, b, α, β, ω will be used throughout to denote quantities related in this way.

The area of a triangle with two sides equal to a and included angle θ will be denoted by $\Delta(\theta)$. (This area also depends on a, but we do not indicate this since we think of a as fixed.) In particular, we put

$$\Delta = \Delta(\alpha), \quad \Delta' = \Delta(\beta), \quad \Delta^* = \Delta(\omega).$$

Thus Δ is the area of an equilateral triangle of side a, and $2\Delta'$ is the area of a square of side a.

Fejes Tóth [2] has shown that in a standard triangulation determined by a system of points saturated relative to a distance a, every triangle has area at least Δ. Thus if there are n points in the given system, we must have

$$(2n-4)\,\Delta \leqq 4\pi\,,$$

since the entire sphere is covered by $2n-4$ triangles. The same inequality holds for an arbitrary set of points each two of which are at a distance at least a. Indeed, if $a \leqq 90°$, we can simply adjoin additional points until the system is saturated, and then form a standard triangulation. It is not difficult to verify the result also for $a > 90°$. We can have equality in the above inequality only if the triangulation determined by the given points consists of equilateral triangles of side a. This is possible only if $n = 3, 4, 6, 12$, the sphere being divided into 2, 4, 8, 20 congruent equilateral triangles.

We shall strengthen the inequality of Fejes Tóth in the case where $60° < \alpha < 72°$ (Theorem Ba in § 1.4), and this will lead to a solution of the problem for $n = 24$. (The restriction on α is equivalent to saying that a is less than the spherical distance between adjacent vertices of an icosahedron inscribed in the unit sphere. Thus the results obtained are relevant when $n > 12$.)

1.3. We start by stating Theorem Aa, which gives an estimate for the total area of the triangles meeting at a single vertex. This local inequality is the basic result from which everything else follows easily, and to whose proof most of this paper is devoted.

Theorem Aa. *Suppose that $60° < \alpha < 72°$. Consider a standard triangulation corresponding to a system of points saturated relative to the distance a. Then if the number of triangles meeting at some vertex is k, their combined area satisfies the condition*

$$\text{Total Area} \geqq 4\Delta + (k-4)\,\Delta^{*}\,.$$

Equality occurs only when $k = 5$ and four of the triangles are equilateral triangles of side a, or when $k = 6$, $\omega \geqq \beta$, four of the triangles are equilateral triangles of side a, and the other two triangles together form a rhombus (quadrangle with equal sides).

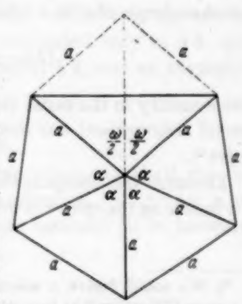

Fig. 2

The special case where $4\alpha + \beta = 2\pi$ (and hence $\omega = \beta$) is the most important, since it is just this case which is needed to prove van der Waerden's conjecture concerning the best arrangement of 24 points. Theorem Ab is simply Theorem Aa specialized to this case.

Theorem Ab. *Suppose that $4\alpha + \beta = 2\pi$. Consider a standard triangulation corresponding to a system of points saturated relative to the distance a. Then if the number of triangles meeting at some vertex is k, their combined area satisfies the condition*

$$\text{Total Area} \geqq 4\Delta + (k-4)\,\Delta'\,.$$

Equality is attained only when four equilateral triangles of side a and one or two half squares of side a meet at the vertex.

1.4. We now derive the strengthened form of the inequality of FEJES TÓTH (promised at the end of § 1.2) from Theorem Aa.

Theorem Ba. *Suppose that* $60° < \alpha < 72°$. *Assume that we have given a system of n points on the sphere of which each two are at a distance at least a. Then we have*

$$4n\Delta + (2n - 12)\,\Delta^* \leqq 12\pi\,.$$

Equality is possible only if $4\alpha + \beta = 2\pi$, $n = 24$, *and the given points are the vertices of a semiregular polyhedron with four equilateral triangles and a square meeting at each vertex.*

Proof. We may suppose that the given system of points is saturated, since otherwise additional points could be adjoined. We start by constructing a standard triangulation having the given points as vertices. There will be $2n - 4$ triangles in all. Now sum the inequality of Theorem Aa over all the vertices. Since each triangle is counted three times, we obtain the stated result. We can have equality only if we have equality at each vertex in Theorem Aa. This is seen to be possible just in the case mentioned.

Remark. The inequality of Theorem Ba may also be written

$$(2n-4)\,\Delta + \frac{2}{3}\,(n-6)\,(\Delta^* - \Delta) \leqq 4\pi\,.$$

The second term of the left represents the improvement over the inequality of FEJES TÓTH. We may also compare this inequality with a result of SCHÜTTE and VAN DER WAERDEN [8], formula (8). They proved, under the special assumption that the n points are the vertices of a system of equilateral triangles and rhombuses of side a which cover the sphere, that

$$(2n-4)\,\Delta + \frac{1}{2}\,n(\Delta^* - \Delta) \leqq 4\pi\,,$$

with equality in the same case as in Theorem Ba. We see that (even under their special assumption) our inequality furnishes a stronger result for $n > 24$ than theirs[2]).

Theorem Bb. *Suppose that* $4\alpha + \beta = 2\pi$. *Assume that we have given a system of n points on the sphere of which each two are at a distance at least a. Then we have*

$$n \leqq 24\,.$$

---

[2]) We could derive a solution of the problem of finding the best arrangement for 24 points (Theorem Bb) from the inequality of SCHÜTTE and VAN DER WAERDEN (instead of from Theorem Ba), if only we knew in advance that the best arrangement had the special property assumed. SCHÜTTE and VAN DER WAERDEN were unable to verify this, nor have we done so except by solving the problem in a different way.

On the other hand, SCHÜTTE and VAN DER WAERDEN did solve the problem for $n = 8$ in just this way. Their inequality is valid also when $72° < \alpha < 90°$, if we understand that the angle ω used in the definition $\Delta^* = \Delta(\omega)$ is now $2\pi - 3\alpha$ instead of $2\pi - 4\alpha$. This result, together with a knowledge of the cases in which equality holds, leads to a solution of the problem for $n = 8$, since in this case the special assumption can be justified.

Equality is possible only if the points are the vertices of a semiregular polyhedron with four equilateral triangles and a square meeting at each vertex. Thus for all arrangements of 24 points on the sphere, the minimum distance between any two points is maximized for this configuration and only then.

Proof. In the present case, the inequality of Theorem Ba may be written

$$4n\Delta + (2n-12)\,\Delta' \leq 12\pi\,.$$

Since $\Delta = 3\alpha - \pi$, $\Delta' = 2\beta - \pi$, and $4\alpha + \beta = 2\pi$, this inequality reduces successively to

$$4n(3\alpha-\pi) + (2n-12)\,(2\beta-\pi) \leq 12\pi\,,$$

$$n(12\alpha + 4\beta - 6\pi) \leq 24\beta\,,$$

$$n \leq 24\,.$$

Equality holds in the same cases as in Theorem Ba.

Since the only arrangement of 24 points on the sphere whose distances are at least equal to the distance a corresponding to the condition $4\alpha + \beta = 2\pi$ is one in which this distance a actually occurs, we see that this distance a is in fact the critical distance for the arrangement of 24 points.

Notice that instead of summing the inequality of Theorem Aa to obtain Theorem Ba, and then specializing this to obtain Theorem Bb, we could equally well specialize Theorem Aa to obtain Theorem Ab, and then sum to obtain Theorem Bb.

1.5. It remains only to prove Theorem Aa. However, the most interesting result is just that of Theorem Bb, which requires only the weaker Theorem Ab for its proof. Hence we shall arrange our arguments so as to obtain a proof of Theorem Ab as soon as possible, postponing the completion of the proof of the more general Theorem Aa. Indeed, the proof of Theorem Ab is finished in § 5, and with it a proof of van der Waerden's conjecture concerning the arrangement of 24 points. The proof of Theorem Aa is concluded only in § 8. Some further extensions of our inequalities are considered in § 9, and an asymptotic comparison of various results is made in § 10.

§ 2. Variable triangles

2.1. We write down for reference the formulas which we shall use from spherical trigonometry. Suppose that the sides of a spherical triangle are x, y, z, and the opposite angles are ξ, η, ζ. These parts are assumed to be between 0 and π. Then the area A of the triangle is given by

$$A = \xi + \eta + \zeta - \pi\,.$$

Also, according to the law of cosines, we have

$$\cos z = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos\zeta\,,$$

and one of Napier's analogies states that

$$\cot\frac{\xi+\eta}{2} = \frac{\cos\dfrac{x+y}{2}}{\cos\dfrac{x-y}{2}}\tan\frac{\zeta}{2}\,.$$

In a right triangle, with $\zeta = 90°$, we have

$$\cos z = \cos x \cos y = \cot \xi \cot \eta$$

and

$$\sin \xi = \frac{\sin x}{\sin z}, \quad \cos \eta = \frac{\tan x}{\tan z}.$$

2.2. We now consider how the area of a spherical triangle varies when two sides x and y are fixed and the included angle ζ is varied. We know that

$$\cot \frac{\xi + \eta}{2} = K \tan \frac{\zeta}{2}, \quad \text{where } K = \frac{\cos \frac{x+y}{2}}{\cos \frac{x-y}{2}}.$$

Here K is constant, and since $|x - y| < x + y < 2\pi - |x - y|$, we see that $-1 < K < 1$. Thus

$$A = \xi + \eta + \zeta - \pi = 2 \operatorname{arc\,cot}\left(K \tan \frac{\zeta}{2}\right) + \zeta - \pi,$$

and hence

$$\frac{dA}{d\zeta} = 1 - \frac{K \sec^2 \frac{\zeta}{2}}{1 + K^2 \tan^2 \frac{\zeta}{2}} = 1 - \frac{K}{1 - (1 - K^2) \sin^2 \frac{\zeta}{2}}.$$

The last denominator is a positive decreasing function of ζ.

The conclusions about the behaviour of A depend on the size of $x + y$. If $x + y > \pi$, then $K < 0$, hence $dA/d\zeta$ is positive and increasing; thus A is an increasing convex function of ζ. If $x + y = \pi$, then $K = 0$, and we have simply $A = \zeta$. Finally, if $x + y < \pi$, then $K > 0$, hence $dA/d\zeta$ is decreasing; thus A is a concave function of ζ. (In particular, for any $a < \pi/2$, the function $\Delta(\theta)$ defined in § 1.2 is concave; compare SCHÜTTE and VAN DER WAERDEN [8], § 9.)

We must consider the last case in more detail. If $x + y < \pi$, then A is a concave function of ζ in the interval $0 \leqq \zeta \leqq \pi$, and vanishes at the end points. Hence the area A is maximum for a unique value of ζ between 0 and π. How can we characterize the maximum triangle?

If in the formula for $dA/d\zeta$ we replace K by its value in terms of ξ, η, ζ, we obtain

$$\frac{dA}{d\zeta} = 1 - \frac{\cot \frac{\xi+\eta}{2}}{\tan \frac{\zeta}{2}} \, \frac{\sec^2 \frac{\zeta}{2}}{1 + \cot^2 \frac{\xi + \eta}{2}} = 1 - \frac{\sin(\xi + \eta)}{\sin \zeta}.$$

Since $\xi + \eta > \pi - \zeta$, we see that

$$\frac{dA}{d\zeta} > 0 \text{ if } \zeta < \xi + \eta, \quad \frac{dA}{d\zeta} < 0 \text{ if } \zeta > \xi + \eta.$$

Now $\xi + \eta$ decreases from π to 0 as ζ increases from 0 to π, so that A increases to a maximum, which occurs at the point where $\zeta = \xi + \eta$, and then decreases. Thus among all the triangles with given sides x and y, the triangle of maximum

area is characterized by the condition that $\zeta = \xi + \eta$. It is easily seen that this is equivalent to saying that the third side of the triangle is a diameter of the circumscribed circle. This result is classical; see, for example, LEGENDRE [6], Livre VII, Proposition XXVI.

2.3. The situation may also be described in a more geometrical way. Take any triangle with $x + y < \pi$, hence also $\xi + \eta < \pi$. Rotate the triangle through

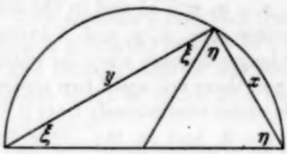

Fig. 3

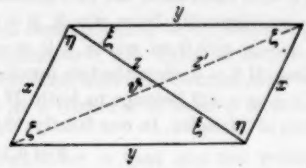

Fig. 4

180° about the midpoint of the side z. The two triangles together form a convex quadrangle whose opposite sides are equal and whose opposite angles are equal. The other diagonal divides the quadrangle into two triangles with sides x and y and included angle $\xi + \eta$. We shall call such a triangle *conjugate* to the original triangle. Clearly, conjugate triangles have equal areas. Since A is a concave function of ζ, the maximum triangle must be self-conjugate. This furnishes another proof that the maximum triangle is characterized by the condition $\zeta = \xi + \eta$.

The relation between the conjugate triangles can also be expressed in terms of the sides. Let z' be the second diagonal of the quadrangle (that is, the opposite side of the conjugate triangle), and θ the angle between the two diagonals subtended by the side x. By the law of cosines, we have

$$\cos x = \cos\frac{z}{2}\cos\frac{z'}{2} + \sin\frac{z}{2}\sin\frac{z'}{2}\cos\theta\,,$$

$$\cos y = \cos\frac{z}{2}\cos\frac{z'}{2} - \sin\frac{z}{2}\sin\frac{z'}{2}\cos\theta\,,$$

hence

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{z}{2}\cos\frac{z'}{2}\,.$$

In particular, for a self-conjugate triangle we have $z' = z$, and the above relation reduces to

$$\cos x + \cos y = 1 + \cos z\,.$$

This is another characterization of the maximum triangle with sides x and y.

We now discuss briefly the behaviour of A as a function of z when x and y are fixed. In the first place, since

$$\cos z = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos\zeta\,,$$

we see that z is an increasing function of ζ. Thus the area A increases with z if $x + y \geqq \pi$. If $x + y < \pi$, then as z increases from $|x - y|$ to $x + y$, the area A first increases and then decreases. The equation characterizing the maximum

was mentioned above. At the maximum, we have $z > x$ and $z > y$. Thus, in particular, A is an increasing function of z at least for $z \leqq \max(x, y)$. In other words, the area of a triangle increases with any side except perhaps the longest.

2.4. We now consider a quite different type of variation. Let an angle ζ of a triangle and the opposite side z be given fixed values, $\zeta = \theta$ and $z = a$. We are interested in the variation of the adjacent sides x and y, and of the area A.

If $\theta < a$, then there are two families of triangles. In one family, the triangle varies continuously from $x = 0$, $y = a$ to $x = \pi - a$, $y = \pi$, and in the other from $x = a$, $y = 0$ to $x = \pi$, $y = \pi - a$. In either case, x, y, and A increase together. If $\theta = a$, then the two families are no longer disjoint, since the triangle with $x = y = \pi/2$ belongs to both. If $\theta > a$, then there are again two separate families of triangles. In one family, the triangle varies continuously from $x = 0$, $y = a$ to $x = a$, $y = 0$, and in the other from $x = \pi$, $y = \pi - a$ to $x = \pi - a$, $y = \pi$. In the first family, we have $x + y < \pi$, and in the second, $x + y > \pi$.

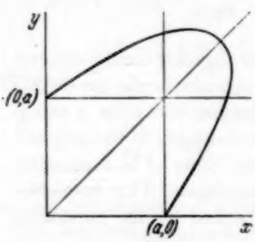

Fig. 5

We now study in some detail the family of triangles with $x + y < \pi$ which exists when $\theta > a$. When $\theta \geqq \pi/2$, we see that x and y vary in opposite directions. But when $\theta < \pi/2$, the variation from $x = 0$, $y = a$ to $x = a$, $y = 0$ occurs in three stages: first x and y increase together, then x increases and y decreases, and finally x and y decrease together.

From the law of cosines, we see that

$$(1 - \cos\theta)\cos(x + y) + (1 + \cos\theta)\cos(x - y) = 2\cos a\,.$$

Now $0 < x + y < \pi$ and $|x - y| < \pi$, hence $x + y$ and $|x - y|$ must vary in opposite directions. Thus $x + y$ is a single-valued function of $x - y$, which has a maximum when $x = y$.

To discuss the area of the triangle, we use the formula

$$\cot\frac{\xi + \eta}{2} = \frac{\cos\dfrac{x + y}{2}}{\cos\dfrac{x - y}{2}}\tan\frac{\theta}{2}\,,$$

together with the fact that $A = \xi + \eta + \theta - \pi$. Since $x + y$ and $|x - y|$ vary in opposite directions, we see that A is an increasing function of $x + y$, or a decreasing function of $|x - y|$.

If we restrict the value of $x - y$ to any interval, then the minimum possible area for the triangle will occur at an end point. In particular, if there are any triangles with $x \geqq a$ and $y \geqq a$, then the minimum area for such a triangle will be attained when $x = a$ and also when $y = a$.

§ 3. Standard triangulations

3.1. The idea of a standard triangulation was introduced in § 1.2. We notice first that the circle circumscribed to any triangle in a standard triangulation cannot contain any vertices in its interior. For this circle is the intersection of a face of the polyhedron obtained as the convex hull of the given system of points with the sphere.

Now consider a standard triangulation corresponding to a system of points which is saturated relative to a given distance $a < 90°$. Then *the circumradius of any triangle must be less than* a, since otherwise the circumcenter of the triangle could be taken as a new point at a distance at least a from all the given points.

An additional property of this triangulation is that *any two points at a distance less than* b (the diagonal of a square of side a) *must be joined by the side of a triangle.* Indeed, suppose that P and Q are two points of the given system at a distance less than b. Draw circles of radius a about P and Q. These circles will intersect at two points R and S whose distance is greater than b. All of these statements refer, as usual, to the spherical geometry. But now we turn for a minute to the Euclidean geometry of the embedding three-dimensional space. We see that the chord RS is longer than the chord PQ, and hence nearer to the center of the sphere. But all the points of the given system except P and Q are in a dihedral angle with edge RS formed by the planes of the two circles. Hence the segment PQ lies outside of the convex hull of the other points. It follows that this segment is an edge of the polyhedron which is obtained as the convex hull of the given system. Thus P and Q are joined by the side of a triangle in the corresponding standard triangulation of the sphere.

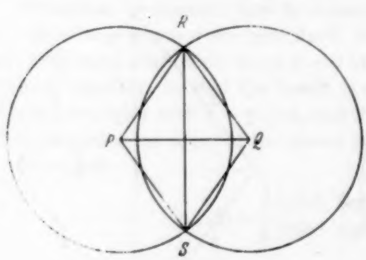

Fig. 6

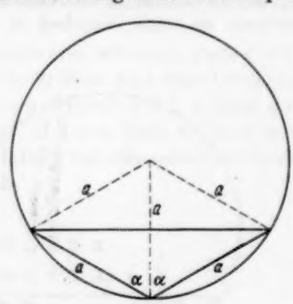

Fig. 7

We may remark that two points at a distance b need not be joined. Indeed, if four points of the given system are the vertices of a square of side a, then either one but not both of the diagonals of the square will be drawn in a standard triangulation. On the other hand, points at a distance greater than b will sometimes be joined.

3.2. Let the distance a be given, with $0 < a < \pi/2$. A triangle will be called *admissible* if it occurs in a standard t. 'angulation of a system of points which is

saturated relative to the distance a. An admissible triangle has sides at least a and circumradius less than a, as shown in § 3.1. Conversely, any such triangle is admissible. Indeed, we can obtain a saturated system for which this triangle will appear in a standard triangulation, by starting with the three vertices of the triangle and first adjoining as many points as possible on the circumference of the circumcircle, and then adjoining additional points outside until the system is saturated.

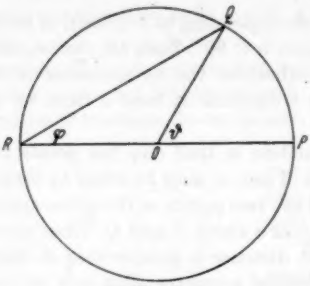

Fig. 8

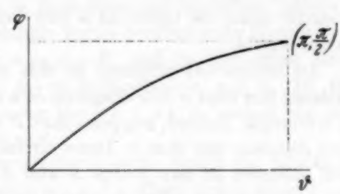

Fig. 9

The first result which we wish to prove is that *the angles of an admissible triangle lie between* $\alpha/2$ *and* 2α. (We recall from § 1.2 that α is the angle of an equilateral triangle of side a.) The upper bound for an angle of an admissible triangle is clearly attained as the angle included between two sides equal to a in a triangle whose circumradius is also a. This angle is seen to be 2α. Hence an angle of an admissible triangle is always less than 2α.

Before discussing the lower bound, we need a result concerning the relation between an angle inscribed in a circle and the corresponding central angle.

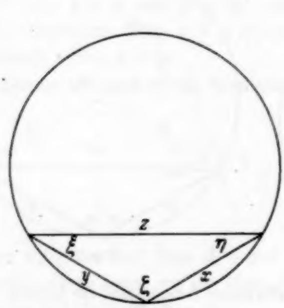

Fig. 10

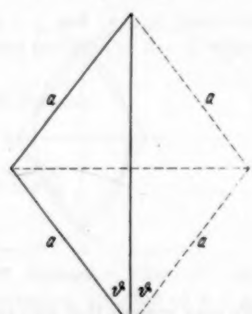

Fig. 11

Let a circle of radius r be given, where $r < \pi/2$. Let the inscribed angle PRQ, of which one side RP is a diameter, be equal to ϕ, and let the corresponding central angle POQ be equal to θ. By § 2.2, the area of the triangle QOR is a concave function of the angle $\pi - \theta$. Since this area is $2\phi - \theta$, we conclude

that ϕ is a concave function of θ. From this, it follows that an arc Q_1Q_2 of the circle with a given length subtends a larger angle at R the further it is from R.

We are now ready to find the lower bound for angles of admissible triangles. Suppose first that we know that the circumradius of the triangle is equal to r. The angle ξ is of course minimized by taking $x = a$, and by the preceeding discussion by also taking $y = a$ (or else $z = a$). If $x = y = a$, then ζ increases with r and hence ξ decreases. When $r = a$, we have $\zeta = 2\alpha$ and $\xi = \eta = \alpha/2$. Hence any angle of an admissible triangle is more than $\alpha/2$.

3.3. We shall show next that if the sides of a triangle are $\geqq a$, and the angle ζ has a fixed value θ, then the minimum possible area for the triangle is given by the formula

$$\text{Minimum Area} = \begin{cases} \Delta(2\theta) & \text{if } \theta \leqq \alpha\,, \\ \Delta(\theta) & \text{if } \theta \geqq \alpha\,. \end{cases}$$

When $\theta \geqq \alpha$, the minimum area is attained only when the adjacent sides x and y are both equal to a; the area is then $\Delta(\theta)$ by definition (§ 1.2). When $\theta \leqq \alpha$, the minimum area is attained only when the opposite side $z = a$ and either $x = a$ or $y = a$; this triangle is half of a rhombus with angle 2θ and therefore has area $\Delta(2\theta)$.

Suppose first that $\theta \geqq \alpha$. Then the area of the triangle is decreased by reducing the two adjacent sides x and y to a. This leaves $z \geqq a$, and hence furnishes the required minimum.

Now suppose that $\theta \leqq \alpha$. In this case, the minimum area can be attained only if the opposite side $z = a$. For if $z > a$, the two adjacent sides x and y cannot both be equal to a, hence the area can be diminished by decreasing one of them.

It remains to consider how to minimize the area when the angle $\zeta = \theta$ and the opposite side $z = a$ are held fixed. It follows from § 2.4 that the minimum area will be attained only when $x = a$ or $y = a$. Indeed, if $\theta \leqq a$, then x and y increase together, so that the result is clear. If $\theta > a$, then we need consider only the triangles with $x + y < \pi$, and this family was discussed there in detail. This completes the proof of the stated result.

If we put

$$A(\theta) = \begin{cases} \Delta(2\theta) & \text{for } \alpha/2 \leqq \theta \leqq \alpha\,, \\ \Delta(\theta) & \text{for } \quad \alpha \leqq \theta \leqq 2\alpha\,, \end{cases}$$

then the minimum possible area for an admissible triangle with an angle θ is $A(\theta)$. Now $\Delta(\theta)$ is concave by § 2.2, and in the interval $\alpha \leqq \theta \leqq 2\alpha$, it has its minimum value Δ at the end points and its maximum value Δ' at $\theta = \beta$. Hence $A(\theta)$ is concave in each of the intervals $\alpha/2 \leqq \theta \leqq \alpha$ and $\alpha \leqq \theta \leqq 2\alpha$. Its minimum value Δ occurs at $\theta = \alpha/2, \alpha, 2\alpha$ and its maximum Δ' at $\theta = \beta/2, \beta$.

In particular, we have now verified the theorem of Fejes Tóth that the minimum possible area for an admissible triangle is Δ. Since an angle θ of an admissible triangle must satisfy the condition $\alpha/2 < \theta < 2\alpha$, this minimum

value can be attained only when $\theta = \alpha$, that is, only for an equilateral triangle of side a.

3.4. We have been using a, b, α, β to denote four quantities related as defined in § 1.2, but we have not yet derived formulas connecting them. We shall now do this.

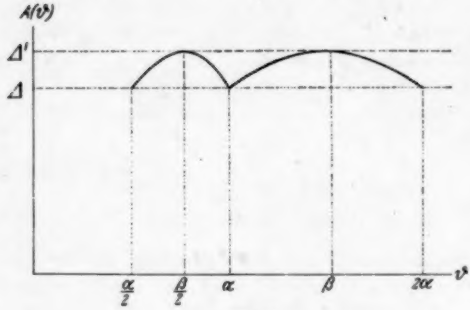

Fig. 12

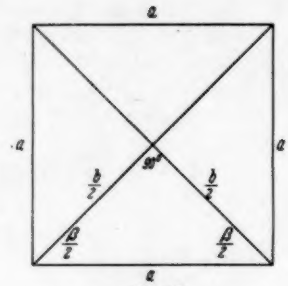

Fig. 13

From the law of cosines, applied to an equilateral triangle of side a and angle α, we find that

$$\cos a = \cos^2 a + \sin^2 a \cos\alpha ,$$

hence

$$\cos\alpha = \frac{\cos a}{1+\cos a}, \quad \cos a = \frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha} .$$

Dividing a square of side a, diagonal b, and angle β into four right triangles by the diagonals, we see that

$$\cos a = \cos^2\frac{b}{2} = \cot^2\frac{\beta}{2} .$$

It follows that

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\beta}{2} ,$$

and hence

$$\cos b = 2\cos a - 1 , \quad \cos\beta = 2\cos\alpha - 1 .$$

Various other relations between the four quantities could be found, but these will be sufficient for our purposes.

3.5. From these equations, we can find the values of a, b, α, β which correspond to the condition $4\alpha + \beta = 2\pi$. These quantities are the ones which we shall prove occur in the optimal arrangement of 24 points on the sphere. Since $\beta/2 = \pi - 2\alpha$, we have $\cos\beta/2 = -\cos 2\alpha$, and hence

$$\cos\alpha = \cos^2 2\alpha .$$

From this equation, we can determine α numerically, and then the other related quantities can be found. We obtain the following approximate values:

$$\alpha \approx 65^\circ\ 11'\ 17'' , \quad \beta \approx 99^\circ\ 14'\ 54'' ,$$

$$a \approx 43^\circ\ 41'\ 27'' , \quad b \approx 63^\circ\ 30'\ \ 9'' ,$$

$$\Delta \approx 15^\circ\ 33'\ 50'' , \quad \Delta' \approx 18^\circ\ 29'\ 48'' .$$

§ 4. Long-legged and slender triangles

4.1. Again suppose that we have a standard triangulation determined by a system of points which is saturated relative to the distance $a < \pi/2$. Consider the triangles which meet at a particular vertex O. The two sides of one of these triangles radiating from O will be called its legs. The following results are central in our development.

Long-legged triangles: *The triangles around O with a leg $> b$ have an average area $> \Delta'$.*

Slender triangles: *Any other triangle whose angle at O is $< \beta/2$ has an area $> \Delta'$.*

We shall discuss the first statement here, the second in § 4.4. We recall from § 1.2 that Δ' is the area of a triangle with sides a, a, b.

Now let Δ'' be the area of a triangle with sides a, b, b. (If $a + 2b > 2\pi$, then no such triangle exists, and this part of the discussion is unnecessary.) We shall make use of the inequality

$$\Delta'' > 3\Delta' - 2\Delta ,$$

which is proved in § 6. However, so far as the proof of Theorem Ab is concerned, we need consider only the special case where $4\alpha + \beta = 2\pi$. In this case, we may verify the inequality by computing Δ'' numerically. See § 4.5, where an even stronger inequality is verified.

It is shown in § 4.2 that any admissible triangle with two sides $> b$ has area $> \Delta''$, and in § 4.3 that a quadrangle whose sides are $\geqq a$ and $\leqq b$ and whose inner diagonals are $\geqq b$ has area $\geqq 2\Delta'$, with equality only for a square of side a. Using these facts, we shall now complete the proof of the statement about long-legged triangles.

It will be sufficient to show, for any pair or triple of abutting triangles, chosen from the triangles meeting at O and having their common legs $> b$, that the average area of these triangles is $> \Delta'$. Indeed, all of the triangles meeting at O and having a leg $> b$ can be grouped into such pairs and triples. For such a triple of triangles, with areas A_1, A_2, A_3, we have

$$A_1 + A_2 + A_3 > \Delta + (3\Delta' - 2\Delta) + \Delta = 3\Delta' ,$$

so that the average area of the triangles is $> \Delta'$. Now consider a pair of abutting triangles, with areas A_1 and A_2, whose common leg is $> b$. If another side of one of the triangles is $> b$, then we see that

$$A_1 + A_2 > \Delta + (3\Delta' - 2\Delta) = 3\Delta' - \Delta > 2\Delta' .$$

Otherwise, the two triangles together form a quadrangle whose sides are $\geqq a$ and $\leqq b$. The common leg is an inner diagonal $> b$. If the other diagonal is $< b$, then by § 3.1 it must be the side of a triangle in the triangulation, and hence cannot be an inner diagonal of the quadrangle. Thus we may apply the result of § 4.3 to show that $A_1 + A_2 > 2\Delta'$, which completes the proof.

4.2. We shall show now that any triangle whose sides are at least a, b, b, but for which no side is $> 2a$, has area $\geqq \Delta''$, with equality only if the sides are just a, b, b. Thus any admissible triangle with two sides $> b$ must have area $> \Delta''$.

Since the area of a triangle increases with any side except perhaps the longest (§ 2.3), the minimum area must be attained when two of the sides are a and b. If $a + b \geqq \pi$, then the area increases with the third side, and hence the result follows. Suppose now that $a + b < \pi$. Then by § 2.2 the area of the triangle is a concave function of the angle included between the sides a and b. The minimum area occurs when the third side has an extreme value, b or $2a$. It remains to determine which yields the minimum.

By § 2.3, the triangles with sides a, b, z and a, b, z' have equal areas if

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{z}{2} \cos \frac{z'}{2}.$$

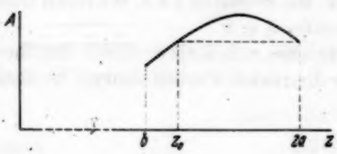

Fig. 14

Suppose that $z = z_0$ corresponds to $z' = 2a$. Then

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{z_0}{2} \cos a,$$

or

$$2 \cos a \cos \frac{z_0}{2} = 3 \cos a - 1.$$

Now if $z_0 > b$, then the minimum area A of our triangle for all z in the interval $b \leqq z \leqq 2a$ can occur only at $z = b$. (Although we have not proved that A is a concave function of z, we do know from § 2.3 that A first increases and then decreases.) Thus we need only show that

$$\cos \frac{z_0}{2} < \cos \frac{b}{2} = \sqrt{\cos a}.$$

This will be the case if

$$2(\cos a)^{\frac{3}{2}} > 3 \cos a - 1.$$

To complete the proof, we must verify that

$$2u^{\frac{3}{2}} > 3u - 1 \text{ for } 0 < u < 1.$$

This is correct, since the curve $v = 2u^{3/2}$ is convex, and is tangent to the line $v = 3u - 1$ at the point $u = 1, v = 2$.

4.3. Next, we establish the estimate for the area of a quadrangle used in § 4.1. We first clarify the terminology. By a quadrangle, we understand a figure (on the unit sphere) which can be divided into two triangles by a diagonal. Such a diagonal is called an inner diagonal. If the quadrangle is convex, there are

two inner diagonals; otherwise, just one. There are some cases in which the exterior of a quadrangle also qualifies as a quadrangle.

Consider a quadrangle $ABCD$ whose sides are $\geqq a$ and $\leqq b$, and whose (one or two) inner diagonals are at least b. What is the smallest possible area? We shall show that the minimum area is attained for a square of side a, and indeed that this is the only relative minimum.

We notice first that if the quadrangle is not a square of side a, then it cannot have two inner diagonals of length b. For suppose that AC is an inner diagonal of length b. Then the possible positions of B and D nearest to the diagonal AC are at the points B_0 and D_0 which together with A and C form the vertices of a square of side a. Now if BD is an inner diagonal, it must cross AC, so that we can have $BD = b$ only if $B = B_0$ and $D = D_0$, and the quadrangle is then a square of side a.

Suppose now that $ABCD$ is not a square of side a. Let AC be an inner diagonal of minimum length. Then BD cannot be an inner diagonal of length b.

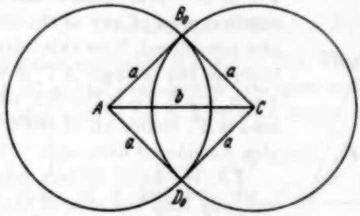

Fig. 15

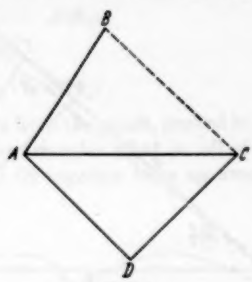

Fig. 16

Now if BD passes through A or C, then $BD \geqq 2a > b$. Hence either $BD > b$, or else BD is an outer diagonal. Either condition is preserved by a small deformation of the quadrangle. Now some side of the quadrangle is greater than a; suppose, for example, that $BC > a$. Then if we hold AB, AC, AD, and CD fixed, and decrease BC, the area of the quadrangle is diminished, by § 2.3.

We have shown that the only quadrangle satisfying the stated conditions whose area can be a relative minimum is a square of side a. Hence any of the other quadrangles has an area $> 2\Delta'$.

4.4. We must still verify the statement about slender triangles made in § 4.1. It will be sufficient to show that any triangle with

$$a \leqq x \leqq y \leqq b\,, \quad z \geqq a\,, \quad \zeta \leqq \beta/2$$

has area $A \geqq \Delta'$, with equality only when $x = a$, $y = b$, $z = a$, and hence $\zeta = \beta/2$.

Actually, no such triangle exists, other than the one with sides a, b, a, unless

$$a \leqq \text{arc cos}\,\frac{7+\sqrt{17}}{16} \approx 45°\,57'\,.$$

However, we do not need this result, so the proof is omitted. We may simply draw conclusions about the triangles on the assumption that they exist.

Notice that, in any case, the only possible triangle with $x = a$ is the one with $y = b$, $z = a$, and that this triangle is isolated. That is, this triangle is not the limit of other triangles satisfying the given conditions. We shall exclude this triangle in the following discussion, and show that $A > \Delta'$ in all other cases.

Consider first the problem of minimizing the area A when ζ has a fixed value θ. The minimum possible value of A can be attained only when $z = a$, since otherwise we could decrease x or y. Keeping $\zeta = \theta$ and $z = a$, we know from § 2.4 that A is minimized in an extreme position, which can only be when $y = b$. Thus for any possible fixed ζ, the area A must be minimized with $x > a$, $y = b$, $z = a$.

Let XYZ be the triangle of minimum area for some ζ. If we keep $y = b$ and $z = a$, then decreasing the included angle ξ will decrease x and hence also decrease A, by § 2.3. Continuing until ζ increases to $\beta/2$, we obtain a triangle $XY'Z$, with $x > a$, $y = b$, $z = a$, $\zeta = \beta/2$, which has the smallest area of any of the triangles considered. Now this triangle includes the triangle $XY''Z$ with $x = a$, $y = b$, $z = a$, $\zeta = \beta/2$, whose area is Δ'. Hence all of the triangles considered have area $> \Delta'$.

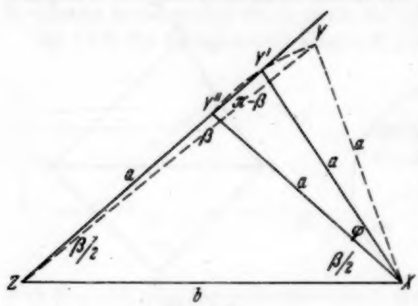

Fig. 17

4.5. We have in fact proved not only that the area of each of the triangles considered is $> \Delta'$, but also that the area is minimized for the triangle $XY'Z$. If we let ϕ denote the angle $Y'XY''$, then the area of the triangle $XY'Z$ is found to be just ϕ. The value of ϕ can be found from the equation

$$\cos a = \cot \frac{\phi}{2} \cot (\pi - \beta) ,$$

which is obtained by looking at one of the right triangles into which the isosceles triangle $XY'Y''$ is divided by its altitude.

In the special case $4\alpha + \beta = 2\pi$, we can use the numerical values from § 3.5 to show that

$$\phi \approx 25° 23' , \quad 3\Delta' - 2\Delta \approx 24° 22' ,$$

and hence

$$\phi > 3\Delta' - 2\Delta > 2\Delta' - \Delta .$$

Thus (in this special case) the triangles considered all have area $A > 2\Delta' - \Delta$, a fact which is used in § 5.5. Also, the area of the triangle $XY'Z$ is seen to be less than Δ'', so that we have verified that $\Delta'' > 3\Delta' - 2\Delta$, as mentioned in § 4.1.

§ 5. Proof of Theorem Ab

5.1. In estimating the total area of the triangles meeting at a vertex O (in a standard triangulation determined by a system of points saturated relative to the distance a), we shall make use of the function $B(\theta)$ defined by

$$B(\theta) = \begin{cases} \Delta' & \text{if } \alpha/2 \leq \theta \leq \beta/2\,, \\ \Delta(2\theta) & \text{if } \beta/2 \leq \theta \leq \alpha\,, \\ \Delta(\theta) & \text{if } \alpha \leq \theta \leq 2\alpha\,. \end{cases}$$

Notice that $B(\theta) = A(\theta)$ for $\theta \geq \beta/2$, where $A(\theta)$ is the function defined in § 3.3. We see that $B(\theta)$ is continuous for $\alpha/2 \leq \theta \leq 2\alpha$, and is concave in each of the intervals $\alpha/2 \leq \theta \leq \alpha$ and $\alpha \leq \theta \leq 2\alpha$.

We know that any angle of an admissible triangle lies between $\alpha/2$ and 2α, and that if an angle is θ, the minimum possible area is $A(\theta)$. Thus if k triangles meet at O and have angles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ there, where $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k = 2\pi$, then the combined area of the triangles satisfies the inequality

$$\text{Total Area} \geq A(\theta_1) + A(\theta_2) + \cdots + A(\theta_k)\,.$$

This result can be strengthened. Indeed, we have

$$\text{Total Area} \geq B(\theta_1) + B(\theta_2) + \cdots + B(\theta_k)\,,$$

with strict inequality if any $\theta_j < \beta/2$. This follows from the result, proved in § 4, that all of the long-legged triangles and slender triangles (that is, all of the triangles with a leg $> b$ or with angle $< \beta/2$ at O) together have an average area $> \Delta'$.

5.2. If we are given only the value of k, but not the individual angles $\theta_1, \ldots, \theta_k$, then the last inequality yields

$$\text{Total Area} \geq \min_{\theta_1, \ldots, \theta_k} \sum_{j=1}^{k} B(\theta_j),$$

where the minimum is to be taken over all $\theta_1, \ldots, \theta_k$ with $\alpha/2 \leq \theta_j \leq 2\alpha$ for $1 \leq j \leq k$ and $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 2\pi$. Equality is certainly impossible unless the minimum is attained with all $\theta_j \geq \beta/2$.

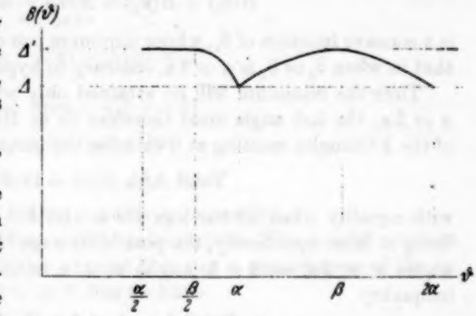

Fig. 18

We show first that the minimum can be attained with all $\theta_j \leq \alpha$ or all $\theta_j \geq \alpha$, and that if all $\theta_j \geq \beta/2$ at the minimum then one of these conditions must be satisfied. Thus in estimating the total area, we need to consider only angles θ_j which are all $\leq \alpha$ or all $\geq \alpha$.

Let a possible set of values for the θ_j be given, with some $< \alpha$ and some $> \alpha$; we may suppose that $\theta_1 < \alpha$ and $\theta_2 > \alpha$. Can these furnish a minimum? If $\theta_2 \leq \beta$, we certainly do not have even a relative minimum, since the sum can be decreased by increasing θ_1 and decreasing θ_2, keeping $\theta_1 + \theta_2$ fixed. If $\theta_2 > \beta$,

we proceed in a different way: we increase θ_1 all the way to α and decrease θ_2 by an equal amount, which is possible since $\beta > 3\alpha/2$. If $\theta_1 \geqq \beta/2$, this decreases the sum, since $B(\theta)$ decreases more between θ_1 and α than in any other interval of the same length. Hence we did not have a minimum to begin with. Finally, if $\theta_1 < \beta/2$, then $B(\theta)$ decreases from Δ' to Δ as θ increases from θ_1 to α, which is the maximum possible change, hence the sum is certainly not increased. Thus if we had a minimum, it is retained and the number of angles which are equal to α is increased. A repetition of the process would lead to a case in which we did not have some angles $< \alpha$ and other angles $> \alpha$.

In the following discussion, we shall suppose (as in Theorem Aa) that

$$60^\circ < \alpha < 72^\circ .$$

We then see that in applying the above estimate for the total area, we may suppose that

$$\begin{cases} \text{all } \theta_j \geqq \alpha & \text{if} \quad k \leqq 5 , \\ \text{all } \theta_j \leqq \alpha & \text{if} \quad k \geqq 6 . \end{cases}$$

5.3. Suppose first that $k \leqq 5$. Then we have to minimize $\Sigma\, B(\theta_j)$ where $\alpha \leqq \theta_j \leqq 2\alpha$ and $\Sigma\, \theta_j = 2\pi$. Since $B(\theta)$ is (strictly) concave in the interval $\alpha \leqq \theta \leqq 2\alpha$, the minimum can occur only with all but one of the angles θ_j having extreme values, α or 2α. Indeed, suppose that the minimum could be attained, for example, with $\alpha < \theta_1 < 2\alpha$ and $\alpha < \theta_2 < 2\alpha$. If we hold $\theta_1 + \theta_2 = \sigma$ fixed, then

$$B(\theta_1) + B(\theta_2) = B(\theta_1) + B(\sigma - \theta_1)$$

is a concave function of θ_1, whose minimum can occur only at an extreme value, that is, when θ_1 or θ_2 is α or 2α, contrary to hypothesis.

Thus the minimum will be attained only when $k-1$ of the angles θ_j are α or 2α; the last angle must therefore be ω. Hence, for $k \leqq 5$, the total area of the k triangles meeting at O satisfies the inequality

$$\text{Total Area} \geqq (k-1)\, \Delta + \Delta^* ,$$

with equality when all the legs are a, and $k-1$ angles are α or 2α, the last being ω. More specifically, the possibilities are: $k = 3$, angles $2\alpha, 2\alpha, \omega$; $k = 4$, angles $\alpha, \alpha, 2\alpha, \omega$; $k = 5$, angles $\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \omega$. In particular, we obtain the inequality

$$\text{Total Area} \geqq 4\Delta + (k-4)\, \Delta^*$$

required for Theorem Aa. For $k < 5$, this is weaker than the previous inequality; hence we can have equality here only for $k = 5$, and then just in the case mentioned above.

5.4. Second, suppose that $k \geqq 6$. We now have to minimize $\Sigma\, B(\theta_j)$ where $\alpha/2 \leqq \theta_j \leqq \alpha$ and $\Sigma\, \theta_j = 2\pi$. Much as in the first case, we find here that the minimum can be attained when all but one of the angles θ_j have extreme values, $\alpha/2$ or α. However, since $B(\theta)$ is not strictly concave in the interval $\alpha/2 \leqq \theta \leqq \alpha$, we are not sure that the minimum can be attained only in this way; but if the minimum is attained with two angles θ_j between $\alpha/2$ and α, we can say that

they must both lie in the interval $\alpha/2 < \theta < \beta/2$. Thus we see that in estimating the total area, it is sufficient to look at the cases where all but one of the angles θ_j have extreme values, $\alpha/2$ or α.

The case $k = 6$ present special difficulties, and will be discussed later (§ 5.5 and § 8). For the present, we suppose that $k \geqq 7$. There cannot be as many as five $\theta_j = \alpha$, since then

$$\sum_{j=1}^{k} \theta_j \geqq 5 \cdot \alpha + 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 6\alpha > 2\pi .$$

If at most three $\theta_j = \alpha$, than at least $k-4$ of the θ_j are equal to $\alpha/2$, and thus

$$\text{Total Area} > 4\Delta + (k-4)\,\Delta' .$$

There remains only the case when just four $\theta_j = \alpha$. In this case, we cannot have $k \geqq 8$, since this would make

$$\sum_{j=1}^{k} \theta_j \geqq 4 \cdot \alpha + 4 \cdot \frac{\alpha}{2} = 6\alpha > 2\pi .$$

Thus we have $k = 7$, four $\theta_j = \alpha$, two $\theta_j = \alpha/2$, and so the last $\theta_j = \omega - \alpha$. This is possible only if $\omega \geqq 3\alpha/2$. If $\omega \leqq \alpha + \beta/2$, then we still have, as before,

$$\text{Total Area} > 4\Delta + 3\Delta' .$$

When $\omega > \alpha + \beta/2$, we obtain the weaker inequality

$$\text{Total Area} > 4\Delta + 2\Delta' + \Delta(2\omega - 2\alpha) .$$

Since $\beta < 2\omega - 2\alpha < \omega < 2\alpha$, we have

$$\Delta(2\omega - 2\alpha) > \Delta(\omega) = \Delta^* ,$$

and hence certainly

$$\text{Total Area} > 4\Delta + 3\Delta^* .$$

Thus for $k \geqq 7$, we always obtain the inequality

$$\text{Total Area} \geqq 4\Delta + (k-4)\,\Delta^*$$

required for Theorem Aa, and indeed equality is impossible.

5.5. When $k = 6$, the preceding method is inadequate. The desired estimate for the total area of the triangles abound O is not a consequence of the inequality of § 5.2, at least when $\omega \geqq \beta$. For we have

$$\sum_{j=1}^{6} B(\theta_j) = 4\Delta + 2\Delta^*$$

when $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \alpha$, $\theta_5 = \theta_6 = \omega/2$; and this is not the minimum, as is seen by increasing θ_5 and decreasing θ_6.

The general proof of Theorem Aa for $k = 6$ will be postponed to § 8. But the most important case, $\omega = \beta$, which appears in Theorem Ab, can be handled by a special device. We present the proof here for this case.

When $k = 6$ and $\omega = \beta$, the desired inequality has the form

$$\text{Total Area} \geqq 4\Delta + 2\Delta' .$$

If there is any leg $> b$, then from the statement about long-legged triangles in § 4.1, we see that this holds, and indeed with strict inequality. If all the legs are $\leqq b$ but some angle $\theta_j < \beta/2$, then the corresponding triangle has area $> 2\Delta' - \Delta$ by § 4.5, and so we again have strict inequality. Thus we may suppose that all $\theta_j \geqq \beta/2$. The minimum of $\Sigma\, B(\theta_j)$ is then attained only when all of the θ_j are in the interval $\beta/2 \leqq \theta \leqq \alpha$, and all but one at an end point. To satisfy this condition and make $\Sigma\, \theta_j = 2\pi$, we must have four $\theta_j = \alpha$ and two $\theta_j = \beta/2$. Hence the minimum is attained in just this case. Thus we obtain the required inequality, with equality only when the angles at O are $\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta/2, \beta/2$; indeed, to have equality, there must be four equilateral triangles of side a and two half squares of side a meeting at O.

This completes the proof of Theorem Ab and hence also of Theorem Bb; that is, van der Waerden's conjecture concerning the best arrangement of 24 points on the sphere has been proved.

§ 6. Proof of Theorem Aa for $k \neq 6$

6.1. To complete the proof of Theorem Aa for $k \neq 6$, we need only show that $\Delta'' > 3\Delta' - 2\Delta$. (This result was used in § 4.1, but the proof was postponed.) Here Δ'' denotes the area of a triangle with sides a, b, b. Such a triangle exist only if $a + 2b \leqq 2\pi$, being improper when $a + 2b = 2\pi$. In this limiting case, we have

$$\cos a = \cos 2b = 2\cos^2 b - 1 = 2(2\cos a - 1)^2 - 1\,,$$

since $\cos b = 2\cos a - 1$ by § 3.4. We find from this equation that $\cos a = 1/8$. In other words, a triangle with sides a, b, b exists only if $a \leqq \operatorname{arc\,cos} 1/8$.

6.2. We start by developing some formulas concerning a right spherical triangle which will be useful in § 7.1 as well as in § 6.3. We call the sides of the triangle x, y, z, and the opposite angles ξ, η, ζ, where $\zeta = 90°$. We are interested in studying ξ and η as functions of x and z. We shall suppose that the side x is acute. The possible range of the independent variables is then seen to be

$$0 < x < \pi/2, \quad x < z < \pi - x\,.$$

Furthermore, the angle ξ must also be acute. Hence the formulas of § 2.1 yield

$$\xi = \operatorname{arc\,sin}(\sin x \csc z)\,,$$
$$\eta = \operatorname{arc\,cos}(\tan x \cot z)\,.$$

Thus ξ and η are continuous functions of x and z in the allowed range. Also, we find that

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\cos x \csc z}{\sqrt{1 - \sin^2 x \csc^2 z}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \cos^2 z}}\,,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-\sec^2 x \cot z}{\sqrt{1 - \tan^2 x \cot^2 z}} = \frac{-\cos z}{\cos x \sqrt{\cos^2 x - \cos^2 z}}\,,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{-\sin x \csc z \cot z}{\sqrt{1 - \sin^2 x \csc^2 z}} = \frac{-\sin x \cos z}{\sin z \sqrt{\cos^2 x - \cos^2 z}}\,,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\tan x \csc^2 z}{\sqrt{1 - \tan^2 x \cot^2 z}} = \frac{\sin x}{\sin z \sqrt{\cos^2 x - \cos^2 z}}\,.$$

Finally, since the area of the triangle is $A = \xi + \eta - \pi/2$, we have

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\cos^2 x - \cos z}{\cos x \sqrt{\cos^2 x - \cos^2 z}},$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\sin x(1 - \cos z)}{\sin z \sqrt{\cos^2 x - \cos^2 z}}.$$

6.3. We now turn to the proof that $\Delta'' > 3\Delta' - 2\Delta$. Since Δ, Δ', Δ'' all vanish for $a = 0$, it will be sufficient to show that

$$\frac{d\Delta''}{da} > 3\frac{d\Delta'}{da} - 2\frac{d\Delta}{da}.$$

Consider the right triangle with $x = a/2$ and $z = b$. If A is the area of this triangle, then $\Delta'' = 2A$, and so

$$\frac{d\Delta''}{da} = 2\frac{dA}{da} = 2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{da} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{dz}{da}\right).$$

Now $\cos b = 2\cos a - 1$ by § 3.4, hence

$$\frac{db}{da} = 2\frac{\sin a}{\sin b}.$$

Using the partial derivatives from § 6.2, we see that

$$\frac{d\Delta''}{da} = \frac{\cos^2\frac{a}{2} - \cos b}{\cos\frac{a}{2}\sqrt{\cos^2\frac{a}{2} - \cos^2 b}} + \frac{4\sin a \sin\frac{a}{2}(1 - \cos b)}{\sin^2 b\sqrt{\cos^2\frac{a}{2} - \cos^2 b}}.$$

After simplifying, this may be written

$$\frac{d\Delta''}{da} = \frac{2\tan a + 3\tan\frac{a}{2}}{\sqrt{8\cos a - 1}}.$$

On the other hand, $\Delta = 3\alpha - \pi$ and $\Delta' = 2\beta - \pi$, where

$$\cos\alpha = \frac{\cos a}{1 + \cos a}, \quad \cos\beta = -\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a},$$

by § 3.4. From these, we find that

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{\tan\frac{a}{2}}{\sqrt{1 + 2\cos a}}, \quad \frac{d\beta}{da} = \frac{\tan\frac{a}{2}}{\sqrt{\cos a}}.$$

Hence the required inequality may be written

$$\frac{2\tan a + 3\tan\frac{a}{2}}{\sqrt{8\cos a - 1}} > \frac{6\tan\frac{a}{2}}{\sqrt{\cos a}} - \frac{6\tan\frac{a}{2}}{\sqrt{1 + 2\cos a}}.$$

Dividing by $\tan a/2$, this becomes

$$\frac{2 + 5\cos a}{\cos a\sqrt{8\cos a - 1}} > \frac{6}{\sqrt{\cos a}} - \frac{6}{\sqrt{1 + 2\cos a}}.$$

It remains to prove that this holds for all possible values of a.

6.4. Putting $t = \sec a$, the inequality may be written

$$\frac{6\sqrt{8-t}}{5+2t}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2+t}}\right)<1\,.$$

We wish to show that this holds for $1 \leqq t \leqq 8$. For $t = 1$, the inequality reduces to $6 - 2\sqrt{3} < \sqrt{7}$, which is true. Thus it will be sufficient to show that the left side is a decreasing function of t. We shall prove the stronger result that

$$f(t)=\frac{1}{5+2t}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2+t}}\right)$$

decreases. In the first place, we find that

$$f'(t)=\frac{13+6t-4(2+t)^{\frac{3}{2}}}{2(5+2t)^2(2+t)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Now put

$$g(t) = 13 + 6t - 4(2+t)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Then

$$g'(t) = 6 - 6\sqrt{2+t} < 0$$

in the interval. Since $g(1) = 19 - 12\sqrt{3} < 0$, it follows that $g(t) < 0$ throughout the interval. Hence $f'(t) < 0$ in the interval, and therefore $f(t)$ is decreasing, as required.

This completes the proof that $\Delta'' > 3\Delta' - 2\Delta$, and hence also the proof of Theorem Aa for $k \neq 6$.

§ 7. More about triangles

7.1. We now develop some more properties of triangles, which are used in § 8 to prove Theorem Aa for $k = 6$.

We first study a right triangle with fixed hypotenuse $z = a$, where $0 < a < \pi/2$. The angles ξ and η may then be considered as functions of x alone. We shall suppose that x is acute; it must then lie in the interval $0 < x < a$. From § 6.2, we have

$$\frac{d\xi}{dx}=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\cos^2 a}}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 a\sec^2 x}}\,,$$

$$\frac{d\eta}{dx}=\frac{-\cos a}{\cos x\sqrt{\cos^2 x-\cos^2 a}}\,.$$

Thus $d\xi/dx$ is positive and increasing, whereas $d\eta/dx$ is negative and decreasing. Hence ξ is an increasing convex function of x, but η is decreasing and concave. It is easily seen that ξ increases from 0 to $\pi/2$ and η decreases from $\pi/2$ to 0 as x increases from 0 to a.

On the other hand, we could consider x as a function of either ξ or η. From the above, we see that x is an increasing concave function of ξ for $0 < \xi < \pi/2$; also, x is a decreasing concave function of η for $0 < \eta < \pi/2$.

It follows that if we let $L(\theta)$ be the base of an isosceles triangle with legs a and base angles θ, then $L(\theta)$ is a decreasing concave function of θ for $0<\theta<\pi/2$; compare VAN DER WAERDEN [11], § 2.

Now consider a triangle whose sides are $\geqq a$ and for which one angle is given, say $\zeta = \theta$. We shall show that

$$x + y \geqq \begin{cases} a + L(\theta) & \text{if} \quad \theta \leqq \alpha, \\ 2a & \text{if} \quad \theta \geqq \alpha, \end{cases}$$

with equality in the first case only for $x = z = a$ or $y = z = a$, and in the second case for $x = y = a$. Indeed, the second result is clear. In the first case, the minimum value of $x + y$ can occur only for $z = a$, since otherwise we could decrease x or y. It then follows from § 2.4 that $x + y$ is minimized only in an extreme case, that is, when $x = a$ or $y = a$. This yields the stated result.

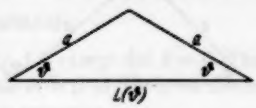

Fig. 10

7.2. Again consider the right triangle with hypotenuse $z = a$ which was studied in § 7.1. We shall now show that $A = \xi + \eta - \pi/2$ is a concave function of x. (This does not follow from looking at ξ and η separately, since η is concave but ξ is convex.) We have, from § 6.2,

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\cos^2 x - \cos a}{\cos x \sqrt{\cos^2 x - \cos^2 a}} = \frac{\sec a - \sec^2 x}{\sqrt{\sec^2 a - \sec^2 x}}.$$

If we put $t = \sec a$ and $w = \sec^2 x$, then this derivative takes the form

$$h(w) = \frac{t - w}{\sqrt{t^2 - w}}.$$

Hence

$$h'(w) = \frac{w + t - 2t^2}{2(t^2 - w)^{\frac{3}{2}}}.$$

Now $t > 1$, and the interval $0 < x < a$ corresponds to $1 < w < t^2$. In this interval, we have $w + t < 2t^2$, hence $h'(w) < 0$, so that $h(w)$ is decreasing. In other words, dA/dx is decreasing for $0 < x < a$, or A is a concave function of x. That is, the area of a right triangle with a fixed hypotenuse is a concave function of either leg, at least when the parts are acute.

Now let $T(x)$ be the area of a triangle with sides a, a, x. From the preceding result, we see that $T(x)$ is a concave function of x. Notice also that

$$T(a) = \Delta(\alpha) = \Delta, \quad T(b) = \Delta(\beta) = \Delta'.$$

7.3. Now suppose that two sides of a triangle have fixed lengths, say $x = a$ and $y = c$, where $a \leqq c \leqq 2a$. We know from § 2.2—§ 2.3 that if the included angle ζ or the third side z is restricted to some interval, then the area of the triangle is minimized at one of the end points. Suppose, in particular, that the interval is determined by the conditions $z \geqq a$, $\zeta \leqq 2\alpha$. If $c = a$, we see that the minimum area Δ is attained at both ends. We shall show that if $c > a$, then the minimum area is attained only at the left end point, $z = a$.

The result is clear if $a + c \geqq \pi$, since then the area increases with ζ (or with z). Now suppose that $a + c < \pi$. In this case, the area of the triangle is a concave function of ζ. Let ξ_0, η_0, ζ_0 be the angles of the triangle when $z = a$.

Since $z = x$ for this triangle, we have $\zeta_0 = \xi_0$. We wish to show that the minimum possible area for $\zeta_0 \leqq \zeta \leqq 2\alpha$ can occur only for $\zeta = \zeta_0$. Now (as explained in § 2.3) the conjugate triangle with the same area as the one with $\zeta = \zeta_0$ corresponds to $\zeta = \xi_0 + \eta_0$. Thus we need only show that $\xi_0 + \eta_0 > 2\alpha$.

To prove this, we now think of c as variable. Then $T(c) = \Delta(\eta_0) = 2\xi_0 - \eta_0 - \pi$ is a concave function of η_0, hence $\xi_0 + \eta_0$ is also a concave function of η_0. When $c = a$, we have $\xi_0 = \eta_0 = \alpha$, hence $\xi_0 + \eta_0 = 2\alpha$. When $c = 2a$, we have $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = \pi$, hence $\xi_0 + \eta_0 = \pi > 2\alpha$. Thus for $a < c \leqq 2a$, we have $\xi_0 + \eta_0 > 2\alpha$, as was to be shown.

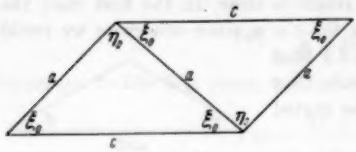

Fig. 20

7.4. Suppose that all the sides of a triangle are $\geqq a$. Suppose also that $x + y = a + c$, where $a \leqq c \leqq 2a$, and that $\zeta < 2\alpha$. We shall show that the minimum possible area for the triangle is $T(c)$ (defined in § 7.2), attained only when $x = z = a$ and $y = c$, or when $y = z = a$ and $x = c$.

We make use of Napier's analogy.

$$\cot \frac{\xi + \eta}{2} = \frac{\cos \frac{x + y}{2}}{\cos \frac{x - y}{2}} \tan \frac{\zeta}{2}.$$

From this, we see that if $x + y = a + c$ and if ζ is also held fixed, then the area of the triangle is minimized by maximizing $|x - y|$. If the conditions $x \geqq a$, $y \geqq a$ are imposed, and if we suppose (for example) that $x \leqq y$, then the area is minimized only for $x = a$, $y = c$. From the law of cosines, we have

$$2 \cos z = \cos (x + y) (1 - \cos\zeta) + \cos (x - y) (1 + \cos\zeta).$$

Thus the same choice maximizes z. Hence if any triangle with the given ζ satisfies the required condition $z \geqq a$, the one with $x = a$, $y = c$ will do so. Hence this triangle continues to furnish the minimum area (for a fixed ζ) when this last condition is imposed.

Finally, keeping $x = a$ and $y = c$, and varying ζ so that $z \geqq a$ and $\zeta < 2\alpha$, we see (by § 7.3) that the area is minimized only when $z = a$, as we wished to show.

7.5. Now consider another related problem. Suppose that a triangle satisfies the conditions

$$a \leqq x \leqq c, \quad a \leqq y \leqq c, \quad x + y \geqq a + c, \quad z \geqq a, \quad \zeta < 2\alpha,$$

where $a \leqq c \leqq 2a$. This class of triangles includes the one considered in § 7.4. We shall show that the minimum possible area is still $T(c)$, attained in just the same cases as before.

We may suppose that $x \leqq y$. Then we shall show that the minimum possible area for any given ζ can occur only when $x = a$, $y = c$, or else when $y = c$, $z = a$. If $x + y = a + c$ at the minimum, then we must have $x = a$, $y = c$, by § 7.4. Now suppose that $x + y > a + c$ at the minimum. Then $z = a$.

since otherwise we could decrease the area by decreasing x, keeping y fixed. Also, we must have $y = c$, since otherwise we could decrease x, keeping $z = a$, which would have the effect of decreasing both $x + y$ and the area, by § 2.4.

Finally, we vary ζ. The area of the triangle with $x = a$, $y = c$ is minimized only for $z = a$, as in § 7.4. The area of the triangle with $y = c$, $z = a$ is minimized only for $x = a$, by § 2.3, since we always have $a \leqq x \leqq c$. Thus among all the given triangles with $x \leqq y$, the minimum area is attained only when $x = a$, $y = c$, $z = a$, as was to be shown.

§ 8. Proof of Theorem Aa concluded

8.1. The proof of Theorem Aa was completed in § 6 except for $k = 6$. The case $k = 6$ was treated under the special hypothesis $\omega = \beta$ of Theorem Ab in § 5.5. We are now ready to look at the case $k = 6$ in general.

Suppose that we have six admissible triangles which fill the space around a point O. We wish to show that

$$\text{Total Area} \geqq 4\Delta + 2\Delta^* ,$$

and to establish the cases of equality. As before, we call the sides of the triangles radiating from O their legs. If any leg is $> b$, then by the statement about long-legged triangles in § 4.1, we have the stronger inequality

$$\text{Total Area} > 4\Delta + 2\Delta' .$$

Thus it will be sufficient to establish the required inequality using the following facts: we have six triangles surrounding O with sides $\geqq a$, legs $\leqq b$, and angles $< 2\alpha$ at O; these angles must of course add up to 2π. We shall do this by first estimating the sum of the six legs, and then estimating the total area in terms of this sum.

8.2. Consider any six triangles with sides $\geqq a$ which surround O. We shall show that the sum of their six legs satisfies

$$\text{Sum of Legs} \geqq 5a + L(\omega/2) ,$$

and that this minimum is attained only when five legs are a and the last $L(\omega/2)$, with the two angles at O next to the last leg being $\omega/2$ and the other four angles at O equal to α.

We start by introducing the function

$$F(\theta) = \begin{cases} a + L(\theta) & \text{for} \quad 0 \leqq \theta \leqq \alpha , \\ 2a & \text{for} \quad \alpha \leqq \theta \leqq \pi . \end{cases}$$

Then, by § 7.1, the sum of two adjacent legs meeting at the angle θ is $\geqq F(\theta)$, with equality in the first case only when one leg and the third side of the triangle are a, and in the second case only when both legs are a.

If θ_1, θ_2, θ_3 are alternate angles at O, then we have

$$\text{Sum of Legs} \geqq F(\theta_1) + F(\theta_2) + F(\theta_3) .$$

We may suppose that $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \leqq \pi < 3\alpha$. Now consider how the sum on the right can be minimized, subject to this condition. The minimum can be attained

only when $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$, since otherwise we could decrease $F(\theta_1) + F(\theta_2) + F(\theta_3)$ by increasing some $\theta_i < \alpha$. Similarly, the minimum can be attained only when all $\theta_j \leqq \alpha$; for if some $\theta_j > \alpha$, we could decrease the sum by decreasing this θ_j and increasing some $\theta_i < \alpha$.

Since $F(\theta)$ is concave in the interval $0 \leqq \theta \leqq \alpha$, we see (by the same argument used in § 5.3) that $\Sigma F(\theta_j)$ can be minimized only when two of the three θ_j are at ends of the interval. Since $\Sigma \theta_j > 2\alpha$, neither of these can be 0. Thus we may suppose that $\theta_1 = \theta_2 = \alpha$, and hence $\theta_3 = \pi - 2\alpha = \omega/2$. In this case, we have

$$F(\theta_1) + F(\theta_2) + F(\theta_3) = 5a + L(\omega/2) ;$$

hence this is the minimum of $\Sigma F(\theta_j)$. This leads to the required estimate for the sum of the six legs, and it is easily seen that equality can hold just in the stated case.

8.3. Now suppose that the six triangles meeting at O satisfy the conditions (sides $\geqq a$, legs $\leqq b$, angles $< 2\alpha$ at O) mentioned at the end of § 8.1, and that the sum of the six legs is $5a + d$. We shall show that

$$\text{Total Area} \geqq 4\Delta + 2T(d) \quad \text{if} \quad d \leqq b ,$$

$$\text{Total Area} > 4\Delta + 2\Delta' \quad \text{if} \quad d > \text{b} .$$

We start by introducing the function

$$G(x) = \begin{cases} T(x) & \text{if} \quad a \leqq x \leqq b , \\ \Delta' & \text{if} \quad x \geqq b . \end{cases}$$

Then the area of a triangle whose legs add up to $a + c$ is $\geqq G(c)$. For $c \leqq b$, this result follows from § 7.4, and we have equality only when the legs are a and c and the third side is a. For $c > b$, if follows from § 7.5 (with the c there replaced by b), and we always have strict inequality.

Choose either set of three alternate triangles. If the area of the jth of these triangles is A_j and the sum of its legs is $a + c_j$, then

$$A_1 + A_2 + A_3 \geqq G(c_1) + G(c_2) + G(c_3) .$$

We must have $c_1 + c_2 + c_3 = 2a + d$ and each $c_j \geqq a$. Consider how the sum on the right can be minimized subject to these conditions. We see from § 7.2 that $G(x)$ is a concave function. Hence $\Sigma G(c_j)$ can be minimized when two of the three c_j have extreme values. Indeed, even though $G(x)$ is not strictly concave, we see that the minimum can be attained only in this way. We may suppose that $c_1 = c_2 = a$ and $c_3 = d$. In this case,

$$G(c_1) + G(c_2) + G(c_3) = 2\Delta + G(d) .$$

This is the minimum of $\Sigma G(c_j)$ subject to the conditions $c_j \geqq a$, $\Sigma c_j = 2a + d$. It follows that

$$A_1 + A_2 + A_3 \geqq \begin{cases} 2\Delta + T(d) & \text{if} \quad d \leqq b , \\ 2\Delta + \Delta' & \text{if} \quad d > b . \end{cases}$$

We can have equality here only in the first case, when two of the triangles are equilateral triangles of side a, and the third triangle has one leg d and its other two sides equal to a.

Combining this with a similar estimate for the other three triangles, we obtain the stated estimate for the total area of the six triangles. Here we can have equality only for $d \leqq b$, when one leg is d and the other five legs and the six outer sides are all a. However, this is possible only if $d = L(\omega/2)$, and to make this $\leqq b$ we must have $\omega \geqq \beta$. Notice also that by § 8.2 we always have $d \geqq L(\omega/2)$.

8.4. Again suppose that we have six triangles meeting at O, with sides $\geqq a$, legs $\leqq b$, and angles $< 2\alpha$ at O. By § 8.2, the sum of the six legs is at least $5a + L(\omega/2)$. Hence the conditions of § 8.3 are satisfied with some $d \geqq L(\omega/2)$, and the result there yields

$$\text{Total Area} \geqq 4\Delta + 2\Delta^* \quad \text{if} \quad \omega \geqq \beta ,$$

$$\text{Total Area} > 4\Delta + 2\Delta' \quad \text{if} \quad \omega < \beta .$$

Indeed, the bound in § 8.3 increases with d, so we may substitute $d = L(\omega/2)$ in this bound; we have in general $T(L(\theta)) = \Delta(2\theta)$, hence $T(L(\omega/2)) = \Delta^*$; and $\omega \geqq \beta$ if and only if $L(\omega/2) \leqq b$. Also, we see that equality is possible in the first case only if one leg is $L(\omega/2)$ and the other five legs and the six outer sides are all a.

Together with the result when some leg $> b$, mentioned in § 8.1, this completes the proof of Theorem Aa in the missing case $k = 6$. (When some leg $> b$ or when $\omega < \beta$, we obtained the stronger result that the total area of the six triangles is $> 4\Delta + 2\Delta'$.) Thus Theorem Aa is established, and hence also Theorem Ba. These results are more general than Theorem Ab and Theorem Bb, whose proofs were completed in § 5.

§ 9. Some better estimates

9.1. Again consider a standard triangulation determined by a system of points saturated relative to the distance a. We assume that the corresponding angle α is between 60° and 72°.

Suppose first that $\omega < \beta$. Then if $k \geqq 6$ triangles meet at a vertex, we have from § 5.4 (for $k > 6$) and § 8.4 (for $k = 6$) that their

$$\text{Total Area} > 4\Delta + (k-4)\,\Delta' ,$$

which is more than required by Theorem Aa. Thus for all values of k, we certainly have

$$\text{Total Area} \geqq 4\Delta + \Delta^* + (k-5)\,\Delta' ,$$

and we could replace Δ' by a somewhat larger number. Summing this inequality over all the vertices, we find that

$$4n\Delta + n\Delta^* + (n-12)\,\Delta' < 12\pi ,$$

which is an improvement of Theorem Ba in the given range $\omega < \beta$. This estimate is relevant for $12 < n < 24$. Slightly stronger results could be obtained, but we shall not pursue the question.

On the other hand, if $\omega > \beta$ then Theorem Aa is sharp both for $k = 5$ and for $k = 6$, hence no improvement of this sort is possible, so long as we consider only the total area of the k triangles meeting at a vertex.

9.2. We shall now introduce the idea of the *adjusted area* of a triangle. In terms of this concept, we can give a modified proof of the previous results, and also obtain an improved estimate when $\omega > \beta$, which is of interest for $n > 24$. As usual, we suppose given a standard triangulation determined by a system of points saturated relative to the distance a, where for the present we assume only that $0 < a < \pi/2$.

We shall assign to each triangle in the standard triangulation an adjusted area in such a way that the total adjusted area of all the triangles is equal to the area of the sphere. This will be done by requiring each triangle to share the excess of its area over Δ with all triangles abutting it along a side of length $> b$, the original triangle and each of the other triangles taking an equal share. In particular, if a triangle has no side $> b$, then its adjusted area is simply its area. Also, if two triangles have a common side $> b$, but no other side of either triangle is $> b$, then the adjusted area of each is the average area of the two triangles.

With this definition, we can show that *the adjusted area of any triangle with a side $> b$ is always $> \Delta'$*. If the triangle is one of a pair whose common side is the only side $> b$, then the result follows as at the end of § 4.1. Now consider a triangle with just two sides $> b$. Then its area A satisfies

$$A > \Delta'' > 3\Delta' - 2\Delta = \Delta + 3(\Delta' - \Delta)$$

by § 4.2 and § 6. The excess area $A - \Delta$ is to be shared with two abutting triangles. Hence the share for each of the three triangles is $> \Delta' - \Delta$, making the adjusted area of each triangle $> \Delta'$. A similar argument will apply to a triangle all three of whose sides are $> b$, provided that its area $A > \Delta + 4(\Delta' - \Delta)$. It is shown in § 9.3 that in fact $A > \Delta + 6(\Delta' - \Delta)$.

9.3. Let Δ''' be the area of an equilateral triangle of side b. Such a triangle exists when $b \leqq 120°$, that is, when $a \leqq \operatorname{arc}\cos 1/4$. It is easily seen that the area of any admissible triangle with sides $\geqq b$ is $\geqq \Delta'''$. Indeed, if the sides of a triangle are $\geqq b$ and the circumradius is $\leqq a$, then each side subtends an angle $\geqq \beta > 90°$ at the center of the circumscribed circle. It follows that each side cuts off an arc less than a semicircle, and we see from § 2.2 that this implies that the area increases with any side, which gives the stated result.

We can show that $\Delta''' > 6\Delta' - 5\Delta$ much as we proved in § 6 that $\Delta'' > 3\Delta' - 2\Delta$. If θ is the angle of an equilateral triangle of side b, we see that

$$\cos\theta = \frac{\cos b}{1 + \cos b} = 1 - \frac{1}{2\cos a}.$$

From this, we find that

$$\frac{d\theta}{da} = -\frac{\tan a}{\sqrt{4\cos a - 1}}.$$

Since Δ, Δ', Δ''' all vanish for $a = 0$, it will be sufficient to show that

$$\frac{d\Delta'''}{da} > 6\frac{d\Delta'}{da} - 5\frac{d\Delta}{da}.$$

The derivatives on the right can be found from § 6.3, and on the left we use the fact that $\Delta''' = 3\theta - \pi$. The required inequality thus becomes

$$\frac{3\tan a}{\sqrt{4\cos a - 1}} > \frac{12\tan\frac{a}{2}}{\sqrt{\cos a}} - \frac{15\tan\frac{a}{2}}{\sqrt{1 + 2\cos a}}.$$

Putting $t = \sec a$, this inequality may be written

$$\frac{\sqrt{4-t}}{1+t}\left(4 - \frac{5}{\sqrt{2+t}}\right) < 1.$$

We are to prove that this holds for $1 \leqq t \leqq 4$. This may be done in the same way that a similar inequality was proved in § 6.4.

9.4. In estimating the adjusted area of a triangle, we shall make use of the function $C(\theta)$ defined by

$$C(\theta) = \begin{cases} \Delta' & \text{if} \quad \alpha/2 \leqq \theta \leqq \beta/2, \\ \Delta(2\theta) & \text{if} \quad \beta/2 \leqq \theta \leqq \alpha, \\ \Delta(\theta) & \text{if} \quad \alpha \leqq \theta \leqq \beta, \\ \Delta' & \text{if} \quad \beta \leqq \theta \leqq 2\alpha. \end{cases}$$

This function agrees in part with $A(\theta)$ of § 3.3 and with $B(\theta)$ of § 5.1. We see that $C(\theta)$ is continuous for $\alpha/2 \leqq \theta \leqq 2\alpha$, and is concave in each of the intervals $\alpha/2 \leqq \theta \leqq \alpha$ and $\alpha \leqq \theta \leqq 2\alpha$.

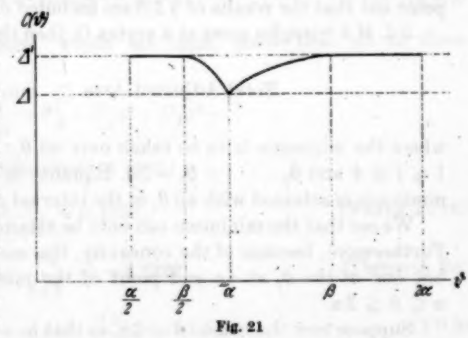

Fig. 21

We shall show that any triangle (in the triangulation being considered) with an angle θ has adjusted area $\geqq C(\theta)$, with strict inequality if $\theta < \beta/2$ or $\theta > \beta$. Since any triangle with a side $> b$ has adjusted area $> \Delta'$ by § 9.2, we need consider only triangles with sides $\leqq b$. In this case, the adjusted area is the same as the area. Now the area is at least $A(\theta)$ by § 3.3, which gives the required result for $\beta/2 \leqq \theta \leqq \beta$, since $A(\theta) = C(\theta)$ in this interval. If $\theta < \beta/2$, then the area is $> \Delta'$ by the statement about slender triangles in § 4.1. Finally suppose that $\theta > \beta$. Consider any triangle with $a \leqq x \leqq \pi - a$, $a \leqq y \leqq \pi - a$, and $\zeta = \theta$. Then, since $\zeta > \beta > \pi/2$, we must have

$$\cos z = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos\zeta$$
$$< \cos^2 a + \sin^2 a \cos\beta = \cos b.$$

and hence $z > b$. Thus if there is any triangle with sides $\geqq a$ and $\leqq b$ having the angle $\zeta = \theta$, we must have $x + y > \pi$. In this case, the area of the triangle is $> \theta > \beta > 2\beta - \pi = \Delta'$, as was to be shown.

We now verify that all of the estimates of § 5 and § 8 for the total area of the triangles around a vertex remain true for the total adjusted area. In particular, Theorem Aa and Theorem Ab are valid also for adjusted area. This leads to modified proofs of Theorem Ba and Theorem Bb.

Indeed, we see that if k triangles meet at a vertex O and have angles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ there, then these triangles have

$$\text{Total Adjusted Area} \geqq C(\theta_1) + C(\theta_2) + \cdots + C(\theta_k)\,.$$

Since this is stronger than the estimate

$$\text{Total Area} \geqq B(\theta_1) + B(\theta_2) + \cdots + B(\theta_k)$$

on which § 5.1—§ 5.4 were based, it follows that the estimates there for the total area of the triangles around O also hold for the total adjusted area. The same is true about § 8, since the most we used there about the area of any triangle was that it is $> \Delta'$, and we know that the adjusted area of a triangle is either the same as the area (if all sides are $\leqq b$) or is $> \Delta'$ (if some side is $> b$). Finally, we used at one point in § 5.5 the fact that the area of a certain triangle is $> 2\Delta' - \Delta$. However, it is easily seen that the sides of this triangle are all $\leqq b$, so that the adjusted area is the same as the area. Alternatively, we may point out that the results of § 5.5 are included in those of § 8.

9.5. If k triangles meet at a vertex O, then the triangles around O have

$$\text{Total Adjusted Area} \geqq \min_{\theta_1,\ldots,\theta_k} \sum_{j=1}^{k} C(\theta_j)\,,$$

where the minimum is to be taken over all $\theta_1, \ldots, \theta_k$ with $\alpha/2 \leqq \theta_j \leqq 2\alpha$ for $1 \leqq j \leqq k$ and $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 2\pi$. Equality is certainly impossible unless the minimum is attained with all θ_j in the interval $\beta/2 \leqq \theta \leqq \beta$.

We see that the minimum can only be attained with all $\theta_j \leqq \alpha$ or all $\theta_j \geqq \alpha$. Furthermore, because of the concavity, the minimum can be attained with all but one of the θ_j at an end point of the relevant interval, $\alpha/2 \leqq \theta \leqq \alpha$ or $\alpha \leqq \theta \leqq 2\alpha$.

Suppose now that $4\alpha + \beta < 2\pi$, so that $\omega > \beta$. If $k \leqq 5$, then the minimum is attained with all θ_j in the interval $\alpha \leqq \theta \leqq 2\alpha$, and all but one of them at an end point. The last θ_j must then be equal to ω. The other $k - 1$ are at α and 2α, and add up to 4α, so we must have $2k - 6$ of them at α and the other $5 - k$ at 2α. This leads to the estimate

$$\text{Total Adjusted Area} > (2k - 6)\,\Delta + (6 - k)\,\Delta'$$

for $k \leqq 5$. For $k \geqq 6$, we shall use the inequality

$$\text{Total Adjusted Area} \geqq 4\Delta + (k - 4)\,\Delta^*\,.$$

which is the analog of Theorem Aa for adjusted area, and is known to hold for all k. Combining the two estimates, we see that

$$\text{Total Adjusted Area} \geqq 4\Delta + (2k - 10)\,\Delta^* + (6 - k)\,\Delta'$$

for all k. Indeed, for $k \leqq 5$ this is correct with Δ^* replaced by Δ, and for $k \geqq 6$ with Δ' replaced by Δ^*. Since $\Delta' > \Delta^* > \Delta$, it is also correct as written, and equality is impossible unless $k = 6$. Summing over all the vertices, we find that

$$4n\Delta + (2n - 24)\,\Delta^* + 12\Delta' < 12\pi\,.$$

This is an improvement of Theorem Ba in the range $\omega > \beta$, since the term $12\Delta'$ replaces $12\Delta^*$. This inequality is relevant to the arrangement of n points on the sphere for $n > 24$.

§ 10. Asymptotic results

We now compare asymptotically various estimates which we have discussed. Suppose that we have n points on the unit sphere, with each pair at a distance $\geqq a$. Then the following inequalities give increasingly better estimates for n, all being valid at least when $4\alpha + \beta < 2\pi$ (corresponding to the range $n > 24$):

$$n < \frac{2\pi}{\Delta} + 2\,, \qquad \text{(Fejes Tóth)}$$

$$n < \frac{6(\pi + \Delta^*)}{2\Delta + \Delta^*}\,, \qquad \text{(Theorem Ba)}$$

$$n < \frac{6(\pi + 2\Delta^* - \Delta')}{2\Delta + \Delta^*}\,. \qquad (\S\ 9.5)$$

Straightforward calculations, which we omit, show that all of these inequalities have the form

$$n < \frac{8\pi}{\sqrt{3}a^2} + C_0 + C_1 a^2 + C_2 a^4 + \cdots.$$

with the following values of the constant term:

$$C_0 = 2 - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 0.1862\,, \qquad \text{(Fejes Tóth)}$$

$$C_0 = 2 - \frac{7\pi}{3\sqrt{3}} \approx -2.2322\,. \qquad \text{(Theorem Ba)}$$

$$C_0 = 4 - \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{7\pi}{3\sqrt{3}} \approx -2.5416\,. \qquad (\S\ 9.5)$$

Thus Theorem Ba gives an improvement of about 2.4 points as compared with Fejes Tóth's result, and § 9.5 about another 0.3 points. Hence either of these inequalities gives an estimate for n corresponding to a given small value of a which is 2 or 3 less than the estimate based on Fejes Tóth's result.

On the other hand, the asymptotic estimates of Habicht and van der Waerden [4] and van der Waerden [11] leave open the possibility that the maximum number of points which can actually be placed on the unit sphere

with mutual distances $\geqq a$ may be less than the number estimated by FEJES TÓTH by an amount of the order of the two-thirds power of the estimated number. Unfortunately, we have not appreciably diminished this gap.

References

[1] FEJES, L.: Über eine Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems. Jber. dtsch. Math. Ver. **53**, 66—68 (1943).

[2] FEJES TÓTH, L.: On the densest packing of spherical caps. Am. Math. Monthly **56**, 330—331 (1949).

[3] FEJES TÓTH, L.: Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1953.

[4] HABICHT, W., and B. L. VAN DER WAERDEN: Lagerung von Punkten auf der Kugel. Math. Ann. **123**, 223—234 (1951).

[5] LEECH, J.: The problem of the thirteen spheres. Math. Gaz. **40**, 22—23 (1956).

[6] LEGENDRE, A. M.: Éléments de géométrie. Second edition. Paris 1799.

[7] ROBINSON, R. M.: Arrangement of 24 points on a sphere (abstract). Notices Am. Math. Soc. **6**, 637—638 (1959).

[8] SCHÜTTE, K., and B. L. VAN DER WAERDEN: Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz? Math. Ann. **123**, 96—124 (1951).

[9] SCHÜTTE, K., and B. L. VAN DER WAERDEN: Das Problem der dreizehn Kugeln. Math. Ann. **125**, 325—334 (1953).

[10] TARSKI, A.: A decision method for elementary algebra and geometry. Second edition. Berkeley and Los Angeles: University of California Press 1951.

[11] VAN DER WAERDEN, B. L.: Punkte auf der Kugel. Drei Zusätze. Math. Ann. **125**, 213—222 (1952).

(Received November 19, 1960)

Rieger, G. J.
Math. Annalen 144, 49—55 (1961)

Verallgemeinerung zweier Sätze von Romanov aus der additiven Zahlentheorie

Von

G. J. Rieger in Lafayette (Indiana)

Das Ziel dieser Note ist es, zwei für den Körper P der rationalen Zahlen wohlbekannte Sätze von Romanov, wonach die Folgen[1])

$$F_a \doteq \{u : u = p + a^m,\ p \text{ prim},\ m = 1, 2, \ldots\} \quad (a \text{ natürliche Zahl}, > 1)$$

und

$$F_m \doteq \{u : u = p + a^m,\ p \text{ prim},\ a = 1, 2, \ldots\} \quad (m \text{ natürliche Zahl})$$

positive untere asymptotische Dichte haben, allgemeiner für beliebige algebraische Zahlkörper K zu beweisen (Satz 1, Satz 2).

Wir bezeichnen mit

n den Grad von K,

$\alpha, \beta, \xi, \ldots$ ganze Zahlen von K,

$\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ die Konjugierten von ξ,

$\mathfrak{f}, \mathfrak{q}$ ganze Ideale von K,

$\langle\xi\rangle$ das von ξ erzeugte Hauptideal,

$N\xi$ bzw. $N\mathfrak{f}$ die Norm von ξ bzw. $\mathfrak{f}$,

$\{\xi : \ldots\}$ die Folge der ξ aus K mit den Eigenschaften $\ldots$,

$M\{\xi, \ldots : \ldots\}$ die Anzahl der Systeme $\xi, \ldots$ mit den Eigenschaften $\ldots$,

x eine reelle Zahl > 2,

$|\xi| \prec x$ das Ungleichungssystem $|\xi^{(j)}| \leqq x\ (j = 1, \ldots, n)$,

c_j bzw. $c_j(\ldots)$ nur von K bzw. K und $\ldots$ abhängige positive Konstante.

Hilfssatz 1[2]). *Es ist*

$$M\{\xi : \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f},\ |\xi| \prec x^{1/n}\} \begin{cases} < c_1\left(\dfrac{x}{N\mathfrak{f}} + 1\right) & \text{stets}, \\ > c_2\,\dfrac{x}{N\mathfrak{f}} & \text{für} \quad x > c_3\,N\mathfrak{f}. \end{cases}$$

Hilfssatz 2. *Für* $x > c_4$ *ist*

$$c_5\,\frac{x}{\log x} < M\{\xi : \langle\xi\rangle \text{ prim},\ |\xi| \prec x^{1/n}\} < c_6\,\frac{x}{\log x}. \tag{1}$$

---

1) Vgl. [6]; $\doteq$ bedeutet = per definitionem.

2) Vgl. etwa [5], Hilfssatz 10.

Beweis. Es existiert bekanntlich[3]) eine Konstante c_7 von folgender Eigenschaft: zu jeder ganzen Zahl ξ aus K läßt sich eine Einheit ε von K finden derart, daß für $\xi_0 \doteq \varepsilon\xi$ gilt

$$|\xi_0| < c_7 |N\xi_0|^{1/n}. \tag{2}$$

Eine ganze Zahl mit (2) heiße zulässig; jedes Hauptideal von K kann man sich also durch eine zulässige Zahl erzeugt denken. Bezeichnet $\pi_K(y)$ $(y > 0)$ die Anzahl der Primhauptideale $\langle\xi\rangle$ mit $|N\xi| \leqq y$, so gilt

$$\pi_K(y) = M^*\{\xi : \langle\xi\rangle \text{ prim}, |N\xi| \leqq y\}, \tag{3}$$

wobei der * andeutet, daß aus der Schar der Konjugierten von ξ jeweils nur eine Zahl gewählt wird, die wir als zulässig voraussetzen können. In (3) können wir fortfahren:

$$\begin{aligned} &\leqq M\{\xi : \langle\xi\rangle \text{ prim}, \xi \text{ zulässig}, |N\xi| \leqq y\} \\ &\leqq M\{\xi : \langle\xi\rangle \text{ prim}, |\xi| < c_7 y^{1/n}\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Nach einem Corollar zum Primidealsatz ist

$$\pi_K(y) > c_8 \frac{y}{\log y} \qquad (y > c_9). \tag{5}$$

Aus (5), (3), (4) folgt mit $x \doteq c_7^n y$ die untere Abschätzung von (1). Die obere Abschätzung von (1) ist in einem allgemeineren Satz[4]) enthalten. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Hilfssatz 3. *Für vorgegebenes x seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beliebige Folgen von ganzen Zahlen ξ aus K mit $|\xi| < x^{1/n}$;*

$$\begin{aligned} A(\nu) &\doteq M\{\alpha', \alpha'' : \alpha' - \alpha'' = \nu, \alpha' \text{ aus } \mathfrak{A}, \alpha'' \text{ aus } \mathfrak{A}\}, \\ B(\nu) &\doteq M\{\beta', \beta'' : \beta' - \beta'' = \nu, \beta' \text{ aus } \mathfrak{B}, \beta'' \text{ aus } \mathfrak{B}\}, \\ R &\doteq M\{\nu : \alpha + \beta = \nu, \alpha \text{ aus } \mathfrak{A}, \beta \text{ aus } \mathfrak{B}\}, \\ A &\doteq M\{\alpha : \alpha \text{ aus } \mathfrak{A}\}, \\ B &\doteq M\{\beta : \beta \text{ aus } \mathfrak{B}\}; \end{aligned}$$

dann gilt

$$A^2 B^2 \leqq \Big(AB + \sum_{\substack{|\nu| < 2x^{1/n} \\ \nu \neq 0}} A(\nu)\, B(\nu)\Big) R. \tag{6}$$

Beweis. Mit

$$T(\nu) \doteq M\{\alpha, \beta : \alpha + \beta = \nu, \alpha \text{ aus } \mathfrak{A}, \beta \text{ aus } \mathfrak{B}\}$$

ist

$$\sum_{|\nu| < 2x^{1/n}} T(\nu) = AB. \tag{7}$$

Auf Grund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist

$$\Big(\sum_{|\nu| < 2x^{1/n}} T(\nu)\Big)^2 \leqq R \sum_{|\nu| < 2x^{1/n}} T^2(\nu). \tag{8}$$

---

[3]) Vgl. etwa [2], 407.

[4]) Vgl. etwa [5], Satz 15.

Wir berechnen jetzt

$$T \doteq M\{\alpha', \alpha'', \beta', \beta'' : \alpha' - \alpha'' + \beta' - \beta'' = 0\}$$

auf zwei verschiedene Arten. Einerseits ist

$$\alpha' + \beta' = \alpha'' + \beta'' \doteq \mu, \; |\mu| < 2\,x^{1/n}$$

und daher

$$T = \sum_{|\nu| < 2x^{1/n}} T^2(\nu)\,. \tag{9}$$

Anderseits ist

$$\alpha' - \alpha'' = \beta'' - \beta' \doteq \nu, \; |\nu| < 2\,x^{1/n};$$

die Anzahl dieser Lösungssysteme ist $A\,B$ für $\nu = 0$ und $A(\nu)\,B(\nu)$ für $\nu \neq 0$; daher ist

$$T = A\,B + \sum_{\substack{|\nu| < 2x^{1/n} \\ \nu \neq 0}} A(\nu)\,B(\nu)\,. \tag{10}$$

Aus (8), (7), (9), (10) folgt (6), was zu zeigen war.

Schreibt man (6) im Falle $A\,B \neq 0$ als

$$\left(\frac{1}{A\,B} + \frac{1}{A^2 B^2} \sum_{\substack{|\nu| < 2x^{1/n} \\ \nu \neq 0}} A(\nu)\,B(\nu)\right) R \geq 1\,,$$

so folgt unmittelbar

Hilfssatz 4. *Für beliebige reelle Zahlen* A', B' *mit* $0 < A' \leq A$, $0 < B' \leq B$ *gilt*

$$A'^2\,B'^2 \leq \left(A'\,B' + \sum_{\substack{|\nu| < 2x^{1/n} \\ \nu \neq 0}} A(\nu)\,B(\nu)\right) R\,.$$

Hilfssatz 5. *Für* $x > c_4$ *und*

$$\mathfrak{A} \doteq \{\xi : \langle\xi\rangle \text{ prim}, |\xi| < x^{1/n}\}$$

gilt

$$c_{10}\,\frac{x^2}{\log^2 x}\,B'^2 < \left(\frac{x}{\log x}\,B' + \frac{x}{\log^2 x} \sum_{\substack{|\nu| < 2x^{1/n} \\ \nu \neq 0}} g(\nu)\,B(\nu)\right) R\,,$$

wobei in

$$g(\nu) \doteq \sum_{\mathfrak{q} \mid \nu}{}' \frac{1}{N\mathfrak{q}}$$

die Summation über alle in ν *aufgehenden quadratfreien Ideale* $\mathfrak{q}$ *aus* K *zu erstrecken ist.*

Beweis. Zunächst ist[5])

$$A(\nu) < c_{11}\,\frac{x}{\log^2 x} \prod_{\mathfrak{p} \mid \nu} \left(1 + \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) \qquad (\mathfrak{p} \text{ prim})\,;$$

woraus zusammen mit Hilfssatz 4 und Hilfssatz 2 die Behauptung folgt.

---

[5]) Vgl. etwa [5], Satz 17.

Satz 1. *Für jede natürliche Zahl m und $x > c_1(m)$ ist*

$$M\{\xi : \xi = \omega + \alpha^m, \langle\omega\rangle \text{ prim}, |\omega| < x^{1/n}, |\alpha^m| < x^{1/n}\} > c_2(m)\,x\,.$$

Beweis. Für $x > c_3^m$ und

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(m) \doteq \{\alpha^m : |\alpha^m| < x^{1/n}\}$$

ist wegen Hilfssatz 1

$$B > B' \doteq c_2 x^{1/m}. \tag{11}$$

Ferner ist

$$\sum_{\substack{|\nu| < 2x^{1/n}\\ \nu \neq 0}} g(\nu)\, B(\nu) \leqq \sum_{\substack{|\nu| < 2x^{1/n}\\ \nu \neq 0}} B(\nu) \sum_{\mathfrak{q}|\nu} \frac{1}{N\mathfrak{q}} <$$

$$< \sum_{N\mathfrak{q} \leqq 2^n x} \frac{D(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}}, \tag{12}$$

$$D(\mathfrak{q}) \doteq \sum_{\substack{|\nu| < 2x^{1/n}\\ \nu \neq 0,\, \mathfrak{q}|\nu}} B(\nu)$$

$$= M\{\beta', \beta'' : \beta'^m - \beta''^m \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}, |\beta'| < x^{1/n}, |\beta''| < x^{1/n}\}\,.$$

Bei festem β'' hat die Kongruenz

$$\beta'^m - \beta''^m \equiv 0 \bmod \mathfrak{p} \qquad (\mathfrak{p} \text{ prim})$$

höchstens m Lösungen mod $\mathfrak{p}$, also

$$\beta'^m - \beta''^m \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}$$

höchstens $m^{w(\mathfrak{q})}$ Lösungen mod $\mathfrak{q}$; $w(\mathfrak{q}) \doteq M\{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \text{ prim}, \mathfrak{p}|\mathfrak{q}\}$. Ein festes β'' trägt zu $D(\mathfrak{q})$ wegen Hilfssatz 1 also höchstens

$$c_1\left(\frac{x^{1/m}}{N\mathfrak{q}} + 1\right) m^{w(\mathfrak{q})} < c_1\left(\left(\frac{x}{N\mathfrak{q}}\right)^{1/m} + \left(\frac{2^n x}{N\mathfrak{q}}\right)^{1/m}\right) m^{w(\mathfrak{q})}$$

bei; für β'' bestehen höchstens $c_1(x^{1/m} + 1)$ Möglichkeiten; also ist

$$D(\mathfrak{q}) < c_{12}\left(\frac{x^2}{N\mathfrak{q}}\right)^{1/m} m^{w(\mathfrak{q})}. \tag{13}$$

Wegen der Konvergenz von

$$\prod_{\mathfrak{p}}\left(1 + \frac{m}{N\mathfrak{p}^{1+1/m}}\right) \qquad (\mathfrak{p} \text{ prim})$$

konvergiert

$$c_3(m) \doteq \sum_{\mathfrak{q}}{}' \frac{m^{w(\mathfrak{q})}}{N\mathfrak{q}^{1+1/m}} \qquad (\mathfrak{q} \text{ quadratfrei})\,. \tag{14}$$

Aus Hilfssatz 5, (11), (12), (13), (14) folgt $R > c_2(m)\,x$, was zu zeigen war.

Satz 2. *Für jede Nicht-Einheitswurzel α aus K und $x > c_4$ ist*

$$M\{\xi : \xi = \omega + \alpha^m, \langle\omega\rangle \text{ prim}, |\omega| < x^{1/n}, |\alpha^m| < x^{1/n}\} > c_1(\alpha)\, x \text{ [6]}\,.$$

---

[6]) Es ist an sich überflüssig zu betonen: in Satz 1 sind ω und α, in Satz 2 dagegen ω und m die Parameter der Folge.

Beweis. Für

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\alpha) \doteq \{\alpha^m : |\alpha^m| < x^{1/n}, m = 1, 2, \ldots\}$$

gilt, da

$$\max |\alpha^{(j)}| \doteq |\alpha^{(j_0)}| > 1$$

ist,

$$B = \left[\frac{\log x}{n \log |\alpha^{(j_0)}|}\right] \begin{cases} > c_2(\alpha) \log x \doteq B', \\ < c_3(\alpha) \log x. \end{cases} \tag{15}$$

Wegen

$$g(\alpha^r - \alpha^s) = g(\alpha^s)\, g(\alpha^{r-s} - 1) \qquad (r > s)$$
$$= g(\alpha)\, g(\alpha^{r-s} - 1)$$

und $g(-\nu) = g(\nu)$ ist

$$\sum_{\substack{|\nu| < 2x^{1/n} \\ \nu \neq 0}} g(\nu)\, B(\nu) = \sum_{0 < r \leq B} \sum_{\substack{0 < s \leq B \\ r \neq s}} g(\alpha^r - \alpha^s)$$
$$= 2 \sum_{0 < s < r \leq B} \sum g(\alpha^r - \alpha^s)$$
$$= 2g(\alpha) \sum_{t=1}^{B} g(\alpha^t - 1) \sum_{\substack{0 < s < r \leq B \\ r - s = t}} 1 \leq \tag{16}$$
$$\leq 2 B g(\alpha) \sum_{t=1}^{B} \sum_{\mathfrak{q} | \alpha^t - 1}' \frac{1}{N\mathfrak{q}}.$$

Aus $\mathfrak{q} | (\alpha^t - 1)$ folgt $N\mathfrak{q} | N(\alpha^t - 1)$; wegen $|\alpha^t| < x^{1/n}$ $(1 \leq t \leq B)$, $|1| < x^{1/n}$ ist $|\alpha^t - 1| < 2x^{1/n}$ und somit $|N(\alpha^t - 1)| \leq 2^n x$. Daher ist

$$\sum_{t=1}^{B} \sum_{\mathfrak{q} | \alpha^t - 1}' \frac{1}{N\mathfrak{q}} \leq \sum_{N\mathfrak{q} \leq 2^n x}' \frac{1}{N\mathfrak{q}} \sum_{\substack{t=1 \\ \mathfrak{q} | \alpha^t - 1}}^{B} 1. \tag{17}$$

Für $(\alpha, \mathfrak{q}) \neq \mathfrak{o}$ (Einheitsideal von K) ist die letzte Summe gleich 0. Für $(\alpha, \mathfrak{q}) = \mathfrak{o}$ definieren wir $e(\alpha, \mathfrak{q})$ als die kleinste natürliche Zahl t mit $\mathfrak{q} | (\alpha^t - 1)$; es ist $e(\alpha, \mathfrak{q}) | \varphi(\mathfrak{q})$; aus $\mathfrak{q} | (\alpha^t - 1)$ folgt $e(\alpha, \mathfrak{q}) | t$. Es ist also

$$\sum_{\substack{t=1 \\ \mathfrak{q} | \alpha^t - 1}}^{B} 1 \leq \frac{B}{e(\alpha, \mathfrak{q})}. \tag{18}$$

Aus Hilfssatz 5, (15), (16), (17), (18) und einem früheren Satz[7]), wonach

$$\sum_{\mathfrak{q}}' \frac{1}{N\mathfrak{q}\, e(\alpha, \mathfrak{q})} \leq c_4(\alpha)$$

ist, folgt $R > c_1(\alpha) x$, was zu zeigen war.

Die eingangs erwähnten beiden Ergebnisse von Romanov haben in P mannigfache Verallgemeinerungen erfahren; in entsprechender Weise lassen sich ohne wesentliche neue Schwierigkeiten die Sätze 1 und 2 verallgemeinern. Eine geringfügige Modifikation im Beweis von Satz 1 liefert

[7]) Vgl. [4], Satz 4.

Satz 3. *Für jedes bezüglich K ganzzahlige Polynom $f = f(\alpha)$ vom Grade $m > 0$ und $x > c_1(f)$ ist*

$$M\{\xi : \xi = \omega + f(\alpha),\ \langle\omega\rangle \text{ prim},\ |\omega| < x^{1/n},\ |f(\alpha)| < x^{1/n}\} > c_2(f)\,x\,.$$

Eine geringfügige Modifikation im Beweis von Satz 2 liefert

Satz 4. *Es sei* $\mathfrak{M} \doteq \{m_1, m_2, \ldots\}$ *eine Folge natürlicher Zahlen mit* $1 = m_1 < m_2 < \cdots$;

$$B(x) \doteq M\{m : |\alpha^m| < x^{1/n},\ m \text{ aus } \mathfrak{M}\}$$

für jede Nicht-Einheitswurzel α aus K und $x > c_4$ ist

$$M\{\xi : \xi = \omega + \alpha^m,\ \langle\omega\rangle \text{ prim},\ |\omega| < x^{1/n},\ |\alpha^m| < x^{1/n},\ m \text{ aus } \mathfrak{M}\} > c_5(\alpha)\,\frac{x\,B(x)}{\log x}\,.$$

Satz 3 bzw. Satz 4 läßt sich leicht noch weiter verallgemeinern, indem man α eine Folge ganzer Zahlen aus K von charakteristischer x-Dichte und ω eine Folge paarweise teilerfremder ganzer Zahlen aus K von charakteristischer $\frac{x}{\log x}$-Dichte bzw. ω eine Folge ganzer Zahlen aus K von charakteristischer $\frac{x}{\log x}$-Dichte durchlaufen läßt; der Beweis verläuft fast wörtlich wie der von Satz 1 bzw. Satz 2. In Anlehnung an einen für P geläufigen Begriff[8]) definieren wir dabei, falls $\psi = \psi(x)$ eine für alle natürlichen Zahlen $x > x_0$ erklärte positivwertige Funktion mit $\psi(x) < c_{13}x$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = \infty$ bedeutet: Die Folge $\mathfrak{A}$ von ganzen Zahlen aus K heißt von charakteristischer ψ-Dichte, wenn

$$0 < \varliminf_{x\to\infty} \frac{M\{\xi : \xi \text{ aus } \mathfrak{A},\ |\xi| < x^{1/n}\}}{\psi(x)} < \infty\,.$$

Im Falle $K = P$ stammt Satz 4 bzw. Satz 3 samt den eben erwähnten weiteren Verallgemeinerungen von PRACHAR[9]) bzw. HORNFECK[10]). In Verallgemeinerung eines Satzes von ERDÖS[11]) gilt noch

Satz 5. *Für die zu Satz 2 gehörige Funktion $T(\nu)$ und jede natürliche Zahl k gilt*

$$\sum_{|\nu| < 2x^{1/n}} T^k(\nu) < c(k, \alpha)\,x\,.$$

Beweis. Für $k = 1$ bzw. $k = 2$ wurde Satz 5 im Laufe des Beweises von Satz 2 direkt bzw. mit Hilfe eines 2fachen Siebes[12]) und (19) bewiesen. Im allgemeinen Fall benutzt man zunächst ein k-faches Sieb[13]), und der Beweis reduziert sich dann nach ähnlichen Überlegungen wie im Beweis von Satz 2 auf den Beweis des nun folgenden Hilfssatzes 6 mit $f(m) \doteq m$.

---

[8]) Vgl. etwa [3], I, 79—80.
[9]) Vgl. etwa [3], II, 74.
[10]) Vgl. etwa [3], II, 75.
[11]) Vgl. [1], Satz 2.
[12]) Vgl. den Beweis von Hilfssatz 5.
[13]) Vgl. [5].

Hilfssatz 6. *Es sei $f = f(x)$ eine für alle natürlichen Zahlen erklärte, positivwertige, nicht abnehmende Funktion mit*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\,f(m)} < \infty\,;$$

für eine beliebige reelle Zahl y und eine beliebige Nicht-Einheitswurzel α aus K gilt dann

$$\sum_{\mathfrak{q}}{}' \frac{y^{w(\mathfrak{q})}}{N\mathfrak{q}\, f(e(\alpha, \mathfrak{q}))} = c(f, y, \alpha) < \infty\,.$$

Der Beweis verläuft wörtlich wie der Beweis der etwas spezielleren Aussage (19), wenn man noch

$$\sum_{\mathfrak{q}|\gamma}{}' \frac{y^{v(\mathfrak{q})}}{N\mathfrak{q}} \leq \prod_{\mathfrak{p}|\gamma}\left(1 + \frac{|y|}{N\mathfrak{p}}\right) \leq \prod_{\mathfrak{p}|\gamma}\left(1 + \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right)^{|y|}$$

beachtet.

Im Falle $K = P$, $f(m) = m$ geht Hilfssatz 6 in eine Formel von Erdös[14]) über, für die wir hiermit einen vereinfachten Beweis erhalten.

Es ist meist nicht schwer, in den oben verwendeten Konstanten $c(\ldots)$ die Abhängigkeit von ... explizit anzugeben. Man kann die obigen Sätze noch unschwer dahingehend verallgemeinern, daß man die Auszählung der ganzen Zahlen ξ nach allgemeineren geometrischen Figuren an Stelle der „Parallelotope" $|\xi| < x^{1/n}$ vornimmt.

Literatur

[1] Erdös, P.: On integers of the form $2^k + p$ and some related problems. Summa Brasil. Math. 2, 113—123 (1950).
[2] Hasse, H.: Zahlentheorie. Berlin 1949.
[3] Ostmann, H.: Additive Zahlentheorie. I. und II. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.
[4] Rieger, G. J.: Verallgemeinerung eines Satzes von Romanov und anderes. Math. Nachr. 20, 107—122 (1959).
[5] Rieger, G. J.: Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper. III. J. reine angew. Math. (im Druck).
[6] Romanov, N. P.: Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie. Math. Ann. 109, 668—678 (1934).

(Eingegangen am 18. Dezember 1960)

[14]) Vgl. [1], (14).

SWAMY, J. C.
Math. Annalen 144, 56—58 (1961)

On a paper of M. H. Mc Andrew

By

J. Chidambara Swamy in Visakhapatnam (India)*

§ 1: Let $t_1, t_2, \ldots, t_r$, $(r > 1)$ be positive integers and $\{a_{ij} : 1 \leqq j \leqq t_i;\ 1 \leqq i \leqq r\}$ and $\{c_{ij} : 2 \leqq j \leqq t_i;\ 1 \leqq i \leqq r\}$ be also positive integers. Let $N_i(x)$ for $1 \leqq i \leqq r$ be defined by

$$N_i(x) = \frac{\left(\sum_{j=1}^{t_i} a_{ij}x\right)!}{(a_{i1}x)!\,\prod_{j=2}^{t_i}(a_{ij}x + c_{ij})!} \tag{1.1}$$

McAndrew [1] proved that, for a fixed i, there exists an infinity of integers x for which $N_i(x)$ is integral. A natural problem in this connection is to examine, whether there exists an infinity of integers for which $N_i(x)$ is integral for *each i in* $1 \leqq i \leqq r$. The aim of this paper is to show that the answer to this question is in the affirmative by proving the following

Theorem: *There exists an infinity of integers x for which $N_i(x)$ is integral for each i in $1 \leqq i \leqq r$.*

§ 2: Let us write

$$c_i = \sum_{j=2}^{t_i} c_{ij} \quad \text{and} \quad A_i = \sum_{j=2}^{t_i} a_{ij} \tag{2.1}$$

$$c = \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq r} c_i \quad \text{and} \quad T = \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq r} c!\,(a_{i1}c_i + A_i c_i)!\,. \tag{2.2}$$

For each prime factor p of $c!$ let us choose an integer $M(p)$ such that

$$p^{M(p)} \geqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq r} \{T(a_{i1} + A_i)\}\,. \tag{2.3}$$

Let y_n be a solution of the congruences

$$y \equiv -1 \pmod{p^{\alpha + M(p)}},\ p^\alpha \,\|\, c! \tag{2.4}$$

and set

$$x_n = T y_n\,. \tag{2.5}$$

Finally, let

$$\lambda_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\left[\frac{(a_{i1} + A_i)x}{p^k}\right] - \left[\frac{a_{i1}x}{p^k}\right] - \left[\frac{A_i x}{p^k}\right]\right\}. \tag{2.6}$$

§ 3: Lemma I: *$N_i(x)$ is integral for all integers x for which*

$$\frac{\{(a_{i1} + A_i)x\}!}{(a_{i1}x)!\,(A_i x + c_i)!}$$

is integral.

*) Andhra University Waltair.

Proof:

$$N_i(x) = \frac{\{(a_{i1} + A_i)x\}!}{(a_{i1}x)!\,(A_ix + c_i)!} \cdot \frac{(A_ix + c_i)!}{\prod_{j=2}^{t_i} (a_{ij}x + c_{ij})!}$$

and

$$\frac{(A_ix + c_i)!}{\prod_{j=2}^{t_i} (a_{ij}x + c_{ij})!}$$

is integral for all integers x by (2.1).

Lemma II: ***For all integers*** x_n ***given by*** (2.5)

$$\frac{(a_{i1}x_n + A_ix_n)!}{(a_{i1}x_n)!\,(A_ix_n)!\,c_i!}$$

is an integer for each i ***in*** $1 \leq i \leq r$.

Proof: Let p be any prime factor of $c_i!$ and $p^{\alpha_i} \| c_i!$; so that we have from (2.2)

(3.1) $\alpha_i \leq \alpha$, α being the highest power of p in $c!$.

Now, for $M(p) \leq j < \alpha_i + M(p)$, it follows by (2.5) and (2.4) that

$$(a_{i1} + A_i)x_n = (a_{i1} + A_i)\,T y_n \equiv -(a_{i1} + A_i)\,T \,(\mathrm{mod}\, p^j).$$

Observing from (2.3), that

$$(a_{i1} + A_i)\,T \leq p^j,$$

we have

$$\left[\frac{(a_{i1} + A_i)x_n}{p^j}\right] = \frac{(a_{i1} + A_i)\,T(y_n + 1)}{p^j} - 1\,. \tag{3.2}$$

Similarly, it follows that

$$\left[\frac{a_{i1}x_n}{p^j}\right] = \frac{a_{i1}\,T(y_n + 1)}{p^j} - 1 \quad\text{and}\quad \left[\frac{A_ix_n}{p^j}\right] = \frac{A_i\,T(y_n + 1)}{p^j} - 1\,. \tag{3.3}$$

Now, (3.2) and (3.3) show that the jth term in $\lambda_i(x_n)$ given by (2.6) is $+1$, so that $\lambda_i(x_n) \geq \alpha_i$. This being true for every prime factor of $c_i!$, the lemma follows.

Lemma III: ***For all integers*** x_n ***given by*** (2.5)

$$\frac{(a_{i1}x_n + A_ix_n)!}{(a_{i1}x_n)!\,(A_ix_n + c_i)!}$$

is integral for each i ***in*** $1 \leq i \leq r$.

Proof: We write

$$\frac{(a_{i1}x_n + A_ix_n)!}{(a_{i1}x_n)!\,(A_ix_n + c_i)!} = \left\{\frac{(a_{i1}x_n + A_ix_n)!}{(a_{i1}x_n)!\,(A_ix_n)!\,c_i!}\right\}\left\{\frac{(A_ix_n + c_i)!}{(A_ix_n)!\,c_i!}\right\}^{-1}$$

$$= \left\{\frac{(a_{i1}x_n + A_ix_n)!}{(a_{i1}x_n - c_i)!\,(A_ix_n + c_i)!}\right\}\left\{\frac{(a_{i1}x_n)!}{(a_{i1}x_n - c_i)!}\right\}^{-1}$$

where the quantities in $\{\ldots\}$ are integers by lemma II and a well-known result of elementary Number Theory.

Now, if π is a common prime factor of

$$\frac{(A_ix_n + c_i)!}{(A_ix_n)!\,c_i!} \quad\text{and}\quad \frac{(a_{i1}x_n)!}{(a_{i1}x_n - c_i)!}\,,$$

it follows that there exist integers e and b such that

$$\pi | A_i x_n + e\,, \quad 1 \leq e \leq c_i$$

and

$$\pi | a_{i1} x_n - b\,, \quad 1 \leq b \leq c_i - 1\,;$$

consequently, $\pi | a_{i1} e + A_i b$, and since $a_{i1} e + A_i b > 0$, it follows that

$$\pi \leqq a_{i1} e + A_i b < (a_{i1} c_i + A_i c_i)\,. \tag{3.5}$$

Also, by (2.2) and (2.5) it follows that

$$x_n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, c_i!\,(a_{i1} c_i + A_i c_i)!)\,,$$

and consequently

$$(A_i x_n + 1)(A_i x_n + 2) \cdots (A_i x_n + c_i)$$
$$\equiv c_i! \bmod (c_i!\,(a_{i1} c_i + A_i c_i)!)\,.$$

Dividing both sides by $c_i!$, we obtain

$$\frac{(A_i x_n + c_i)!}{(A_i x_n)!\, c_i!} \equiv 1 \bmod (a_{i1} c_i + A_i c_i)!\,.$$

By (3.5), the modulus of this congruence would be divisible by π and hence it would follow that

$$0 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, \pi)$$

which is impossible. Hence we have

$$\left(\frac{(A_i x_n + c_i)!}{(A_i x_n)!\, c_i!}\,, \frac{(a_{i1} x_n)!}{(a_{i1} x_n - c_i!)} \right) = 1\,.$$

The lemma is now clear.

Finally, we observe that our theorem follows from the lemmas I and III.

Reference

[1] McAndrew, M. H.: Note on a problem of Erdös. Proc. Cambridge Phil. Soc. 55, 210—212 (1959).

(Received December 31, 1960)

COLLINGWOOD, E. F., and G. PIRANIAN
Math. Annalen 144, 59—63 (1961)

Asymmetric Prime Ends

By

E. F. COLLINGWOOD and G. PIRANIAN in Alnwick and Ann Arbor

Summary

Each simply connected domain in the plane has at most countably many prime ends whose right and left wings do not coincide. On the other hand, to each countable set E on the unit circle C there corresponds a function which is holomorphic and univalent in the unit disk D and which has the property that it carries each point of E and no point of $C \setminus E$ onto a prime end with unequal wings.

1. Cluster Sets

Let f denote a function which maps the unit disk D: $|z| < 1$ onto the Riemann sphere R, and let $e^{i\theta}$ be a fixed point on the unit circle C: $|z| = 1$. A point w on R belongs to the *cluster set* $C(f, e^{i\theta})$ of f at $e^{i\theta}$ provided there exists a sequence $\{z_n\} = \{r_n e^{i\theta_n}\}$ such that $r_n \uparrow 1$, $\theta_n \to \theta$, $f(z_n) \to w$. It belongs to the *radial cluster set* $C_\varrho(f, e^{i\theta})$ provided the sequence $\{z_n\}$ can be chosen with $\theta_n = \theta$ for all n. It belongs to the *right cluster set* $C_R(f, e^{i\theta})$ (or to the *left cluster set* $C_L(f, e^{i\theta})$) provided the sequence $\{z_n\}$ can be chosen with $\theta_n \uparrow \theta$ (or with $\theta_n \downarrow \theta$).

If f is continuous in D, then the set of points $e^{i\theta}$ where $C_\varrho(f, e^{i\theta})$ does not contain $C(f, e^{i\theta})$ is a set of first category [1]; but even if f is required to be holomorphic and univalent in D, the point set in question may have measure 2π, as can be seen, for example, from the construction described in [4, Section 2]. In other words, the set where the radial cluster set is a proper subset of the complete cluster set is thin topologically but may be large geometrically. The following theorem implies that the point set where the right and left cluster sets do not coincide is subject to much more severe restrictions, even if no conditions whatever are imposed on the function f.

Theorem 1. *If f maps the unit disk into the Riemann sphere, then*

$$C_R(f, e^{i\theta}) = C(f, e^{i\theta}) = C_L(f, e^{i\theta})$$

for all except at most countably many points $e^{i\theta}$.

Since the right (left) cluster set of a function contains the set which has been called the right (left) boundary cluster set, Theorem 1 is a corollary of Collingwood's recent theorem [2] to the effect that the right and left boundary cluster sets at $e^{i\theta}$ coincide with $C(f, e^{i\theta})$, except possibly at countably many points $e^{i\theta}$. However, for the sake of completeness and simplicity, we give here a proof which is independent of the concept of boundary cluster sets.

We cover the Riemann sphere R with a succession of nets N_k^* $(k = 1,2,\ldots)$, each with finitely many (closed) triangular meshes m_{kn} $(n = 1, 2, \ldots, n_k)$ of diameter less than $1/k$. By means of any convenient ordering, we arrange all the meshes m_{kn} into a sequence $\{m_j\}$. For each index j, we consider the set S_j of those points $e^{i\theta}$ for which the mesh m_j contains a point of $C(f, e^{i\theta})$ but does not meet the set $C_R(f, e^{i\theta})$. Clearly, the set S_R of points $e^{i\theta}$ for which $C(f, e^{i\theta})\backslash C_R(f, e^{i\theta})$ is not empty is the union of the sets S_j.

If $e^{i\theta} \in S_j$, then $e^{i\theta}$ is the endpoint of some arc $I(\theta) = (e^{i\varphi}, e^{i\theta})$ $(\phi < \theta)$ such that $C(f, e^{i\psi})$ does not meet the mesh m_j if $e^{i\psi}$ lies on $I(\theta)$; for otherwise m_j would meet the set $C_R(f, e^{i\theta})$, contrary to the hypothesis that $e^{i\theta} \in S_j$. Since the arc $I(\theta)$ can not contain points of S_j, the set S_j is at most countable, and therefore S_R is at most countable. Likewise, the corresponding set S_L is at most countable, and the theorem is proved.

2. Asymmetric Prime Ends

Let the function f be holomorphic and univalent in the unit disk D, and let B denote the image of D under f. If P is the prime end of B that corresponds to the point $e^{i\theta}$, the two cluster sets $C_R(f, e^{i\theta})$ and $C_L(f, e^{i\theta})$ coincide with what Ursell and Young [6, p. 14] have called the *right* and *left wings* of P. We shall say that the prime end P is *asymmetric* if its two wings are not identical. The following theorem is an immediate consequence of Theorem 1.

Theorem 2. *Each simply connected plane domain has at most countably many asymmetric prime ends.*

In order to formulate our next theorem, we partition the set of asymmetric prime ends of a fixed simply connected domain into three classes U_R, U_L, and U_{RL}, as follows: a prime end belongs to U_R if its left wing is a proper subset of its right wing, to U_L if its right wing is a proper subset of its left wing, and to U_{RL} if neither of its wings is a subset of the other.

Theorem 3. *Let E_R, E_L, and E_{RL} be three disjoint sets on the unit circle C, each at most countable. Then there exists a function f which maps the unit disk conformally onto a domain B in such a way that each point in E_R, E_L, or E_{RL} corresponds to a prime end in U_R, U_L, or U_{RL}, respectively, while all other points of C correspond to symmetric prime ends of B.*

To prove Theorem 3, we order the points of $E_R \cup E_L \cup E_{RL}$ into a sequence $\{z_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. With each point z_j we associate a sequence of points z_{jp} lying on C and converging to z_j. We construct a function of the form

$$f(z) = z + \sum_{j,p} A_{jp}\{1 - (1 - z/\varrho_{jp} z_{jp})^{k_{jp}}\},$$

where the A_{jp} are appropriate complex constants, $k_{jp} \downarrow 0$ and $\varrho_{jp} \downarrow 1$ as $p \to \infty$, and where the symbol in braces represents that branch of the corresponding function which takes the value 0 at $z = 0$.

The constants that determine the function f can be chosen in such a way that f is holomorphic and univalent in D, such that the radial limit $f(e^{i\theta})$ of f exists, for each value θ, and such that the boundary of the image of D, in the

neighborhood of a point $f(z_j)$, appears roughly as in Figure 1, 2, or 3, according as z_j belongs to E_R, E_L, or E_{RL}. We say "roughly" because each of the tooth-like extensions of the domain B may carry further extensions (indeed, the deformations may be everywhere dense on the boundary; difficulties that might arise from unwanted condensations of singularities can be avoided by subjecting the constants $A_{j\nu}$ to the restriction $|A_{j\nu}| \leq 1/j!$, in other words,

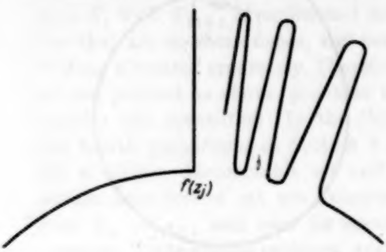

Fig. 1

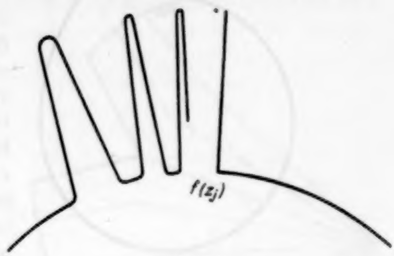

Fig. 2

by requiring that the teeth associated with the point z_j have length at most $1/j!$). The details of the proof are similar to the details in [3, Sections 3 and 4], and we omit them.

Theorem 3 makes no mention of Carathéodory's four kinds of prime ends. Our construction leads to a domain whose asymmetric prime ends are of the second kind and whose symmetric prime ends are of the first kind. No matter

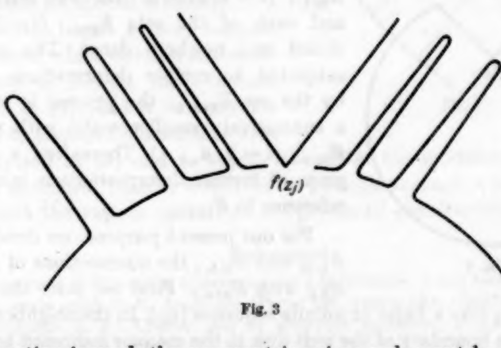

Fig. 3

what construction is used, the asymmetric prime ends must be of the second or fourth kind, since the prime ends of first and third kinds have no subsidiary points. The following theorem shows that no other topological restriction on the distribution of the asymmetric prime ends exists.

Theorem 4. *Let $C = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ be a decomposition of the unit circle such that some homeomorphic mapping of the unit disk onto a simply connected domain B induces a homeomorphism ϕ of the sets E_1, E_2, E_3, E_4 onto the sets of prime ends of the first, second, third, and fourth kind, respectively.*

of B. Let S_R, S_L, and S_{RL} be disjoint countable subsets of $E_2 \cup E_4$. Then the domain B can be chosen in such a way that S_R, S_L, and S_{RL} correspond to the sets U_R, U_L, and U_{RL}, respectively, under the homeomorphism ϕ.

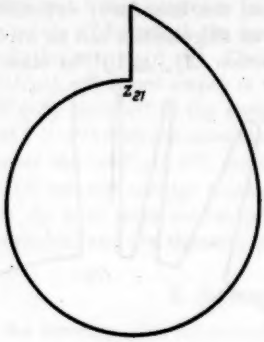

Fig. 4

Fig. 5

A detailed proof of Theorem 4 would be tedious, and we give only a brief sketch to show how the construction in Sections 3 to 8 of [5] can be modified so as to yield the desired result.

In [5], the set E_{234} of points corresponding to prime ends of the second, third, or fourth kind is represented as the union of a sequence of disjoint sets $E_{234 \cdot i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. The set $E_{234 \cdot 1}$ is open, and each of the sets $E_{234 \cdot i}$ $(i = 2, 3, \ldots)$ is closed and nowhere dense. The unit disk is subjected to certain deformations determined by the set $E_{234 \cdot 2}$; the process is repeated (on a successively smaller scale) with reference to $E_{234 \cdot i}$ $(i = 3, 4, \ldots)$. Thereafter, a special program of further deformations is launched with reference to $E_{234 \cdot 1}$.

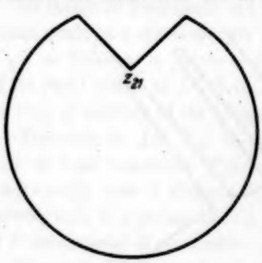

Fig. 6

For our present purpose, we denote by $S_{R \cdot i}$, $S_{L \cdot i}$, and $S_{RL \cdot i}$ the intersections of S_R, S_L, and S_{RL} with $E_{234 \cdot i}$. First we order the set $S_{R \cdot 2} \cup \cup S_{L \cdot 2} \cup S_{RL \cdot 2}$ into a finite or infinite sequence $\{z_{2j}\}$. In the neighborhood of z_{21}, we deform the boundary of the unit disk in the manner indicated by Figures 4, 5, or 6, according as z_{21} belongs to S_R, S_L, or S_{RL}, and we map the set $C \backslash z_{21}$ onto the curved portion of the deformed boundary. We proceed similarly (but on smaller scales) with regard to $z_{22}, z_{23}, \ldots$. The unit disk is then mapped onto the star-domain which has been obtained, in such a way that the radii of D are deformed as is indicated in Figure 7. Clearly, the transformation can be constructed in such a way that it is continuous throughout the disk $|z| < 3/4$ and on every radius of D that does not terminate at one of the points z_{2j}. The

transformed unit disk is then further deformed according to the program in Sections 5 and 6 of [5].

The analogous deformations which have to be carried out with reference to the sets $E_{234 \cdot i}$ $(i = 3, 4, \ldots)$ are obvious (see Section 7 of [5]).

The deformations of the disk D that are used in [5] for the sake of the set $E_{234 \cdot 1}$ are somewhat more complicated, because $E_{234 \cdot 1}$ consists of interior points. However, the intersection of $E_2 \cup E_4$ with $E_{234 \cdot 1}$ is partitioned into sets that are nowhere dense, and each of these is treated separately. Therefore we can proceed as above, provided we exercise one precaution: In the third and fourth paragraphs of Section 8 of [5], a certain denumerable set and a certain near-perfect set are extracted from $E_2 \cap E_{234 \cdot 1}$ and used for special purposes. These special purposes would interfere with our technique of creating asymmetric prime ends at the points of the extracted sets, and therefore the extracted sets must be selected in such a way that they contain no points of S_R, S_L, or S_{RL}. Since E_2 is locally uncountable in $E_{234 \cdot 1}$, the latter requirement presents no special difficulty.

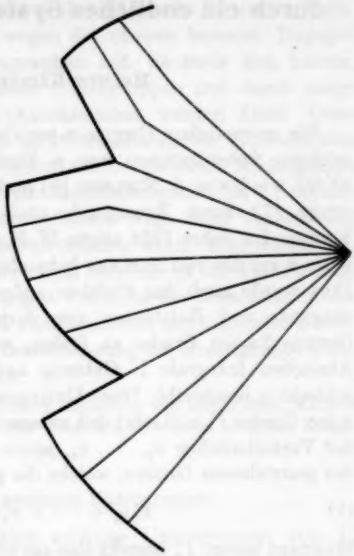
Fig. 7

This sketch must suffice, because any exposition which covered all details would have to include the laborious description in [5]; and it is easier for the reader to acquaint himself first with the description in [5] and to supply thereafter the modifications which we have now sketched, than it would be to struggle through a detailed description in which the various operations are presented simultaneously.

References

[1] Collingwood, E. F.: Sur le comportement à la frontière, d'une fonction méromorphe dans le cercle unité. C. R. Acad. Sci. (Paris) **240**, 1502—1504 (1955).

[2] Collingwood, E. F.: Cluster sets of arbitrary functions. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **46**, 1236—1242 (1960).

[3] Herzog, F., and G. Piranian: Sets of convergence of Taylor series. II. Duke Math. J. **20**, 41—54 (1953).

[4] Lohwater, A. J., and G. Piranian: The boundary behavior of functions analytic in a disk. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. **239**, 1—17 (1957).

[5] Piranian, G.: The distribution of prime ends. Michigan Math. J. **7**, 83—95 (1960).

[6] Ursell, H. D., and L. C. Young: Remarks on the theory of prime ends. Mem. Am. Math. Soc. **3**, 1—29 (1951).

(Received September 13, 1960)

KLINGEN, H.
Math. Annalen 144, 64—82 (1961)

Charakterisierung der Siegelschen Modulgruppe durch ein endliches System definierender Relationen

Von

HELMUT KLINGEN in Marburg/Lahn

Die unimodulare Gruppe n-ten Grades, bestehend aus allen linearen ganzzahligen Substitutionen von n Veränderlichen mit der Determinante ± 1, ist für $n = 3$ von J. NIELSEN [6] und für beliebiges n zuerst von J. A. de SÉGUIER [7] durch Erzeugende und definierende Relationen charakterisiert worden. Im Jahre 1934 zeigte W. MAGNUS [5], daß man den Fall eines beliebigen n auf den von NIELSEN behandelten Spezialfall $n = 3$ zurückführen kann. Dort wurde auch das Problem aufgeworfen, eine Kennzeichnung durch Erzeugende und Relationen von derjenigen Untergruppe der unimodularen Gruppe $2n$-ten Grades zu finden, welche die Periodentransformationen der Abelschen Integrale 1. Gattung auf einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht n beschreibt. Diese Untergruppe heißt heute Siegelsche Modulgruppe n-ten Grades Γ_n und setzt sich zusammen aus allen ganzzahligen Substitutionen der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ und den simultanen Substitutionen der gestrichenen Größen, welche die antisymmetrische Bilinearform

$$x_1' y_1 + \cdots + x_n' y_n - x_1 y_1' - \cdots - x_n y_n' \tag{1}$$

invariant lassen. Γ_n besteht also aus allen ganz-rationalen $2n$-reihigen Lösungen M der Matrizengleichung

$$M' I M = I\,, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei also E die Einheitsmatrix und I die Matrix der Bilinearform (1) ist.

Einfache Erzeugende für Γ_n wurden von L. K. HUA und I. REINER [3] angegeben und der Beweis von mir [4] später vereinfacht und verallgemeinerungsfähiger gestaltet. Um ein System definierender Relationen für Γ_n zu bekommen, bietet sich zunächst ein geometrisches Verfahren an, indem man den Fundamentalbereich und seine Nachbarn untersucht. Dies ist durch E. GOTTSCHLING [1, 2] kürzlich für $n = 2$ geschehen, und es ist prinzipiell ohne Schwierigkeiten möglich, aus seinen Untersuchungen ein endliches System definierender Relationen für Γ_2 abzulesen. Zugleich aber nimmt das Gottschlingsche Ergebnis die Hoffnung, auf diesem geometrischen Wege für beliebiges n ein vollständiges Relationensystem zu finden, da der Fundamentalbereich durch zu viele Flächen berandet zu sein scheint.

In der vorliegenden Arbeit soll nun mittels einer anderen Methode ein endliches System definierender Relationen von Γ_n für beliebiges n abgeleitet

werden. Der erste Paragraph behandelt einen rein gruppentheoretischen Sachverhalt, der einen Einblick in den Aufbau von Γ_n aus gewissen einfach zugänglichen Untergruppen gestattet. Dies wird in den beiden ersten Hilfssätzen näher auseinandergesetzt. Im zweiten Paragraphen wird dieser Aufbau beschrieben durch Erzeugende und Relationen. Dies gelingt in einfacher Weise, wenn man die Erzeugendensysteme der zu betrachtenden Gruppen im allgemeinen so wählt, daß Untergruppen durch Teilsysteme erzeugt werden. Die Angabe von Erzeugenden ist jeweils leicht und wird bereits im ersten Paragraphen der einfacheren Formulierung wegen des öfteren benutzt. Dagegen treten Relationen erst im zweiten Paragraphen auf. Es stellt sich heraus, daß Γ_n durch Relationensysteme bekannter Untergruppen und durch einige wenige neue Relationen übersichtlich charakterisiert werden kann. Diese Untergruppen sind isomorph zu der von MAGNUS behandelten unimodularen Gruppe n-ten Grades und zu der von GOTTSCHLING betrachteten Modulgruppe zweiten Grades Γ_2. Ich verzichte darauf, ein Relationensystem für Γ_3 explizit aufzustellen, obwohl dieses auch auf arithmetischem Wege unter Verwendung der gleichen Normalform wie unten erhalten werden kann. Aber dieses Relationensystem ist leider etwas kompliziert, und ohnehin ist der Fall Γ_2 prinzipiell durch GOTTSCHLING erledigt. So ergibt vielleicht die Kombination der Resultate von MAGNUS und GOTTSCHLING zusammen mit den folgenden Untersuchungen den bequemsten Zugang zur Kennzeichnung der Modulgruppe n-ten Grades durch Erzeugende und Relationen.

Zusatz bei der Korrektur: Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. MAGNUS ist dieselbe Fragestellung von seinem Schüler PH. GOLD aus New York in dessen Dissertation gleichzeitig zu dieser Arbeit behandelt worden.

§ 1. Aufbau von Γ_n aus gewissen Untergruppen

In diesem Paragraphen werden einige wichtige Untergruppen von Γ_n besprochen, die eine Einsicht in die Struktur der vollen Gruppe Γ_n ermöglichen. Ist in einer Modulsubstitution

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$B = C = 0$, so folgt nach (2) $A = U, D = U'^{-1}$ mit unimodularem n-reihigen U. Daher ist die Untergruppe

$$\mathfrak{U} = \{M \in \Gamma_n \mid B = C = 0\}$$

in natürlicher Weise isomorph zur unimodularen Gruppe n-ten Grades und kann in der Bezeichnung von [5] erzeugt werden durch

$$\mathfrak{U} = [O_{i-1}, d_{i-1,i}, d_{i,i-1} \mid i = 2, \ldots, n], \tag{3}$$

wobei also

$$\begin{aligned} O_{i-1}&: \; x_{i-1} \to -x_{i-1}, \quad && y_{i-1} \to -y_{i-1}, \\ d_{i-1,i}&: \; x_{i-1} \to x_{i-1} + x_i, \quad && y_i \to y_i - y_{i-1}, \qquad (i = 2, \ldots, n) \\ d_{i,i-1}&: \; x_i \to x_i + x_{i-1}, \quad && y_{i-1} \to y_{i-1} - y_i \end{aligned}$$

ist. Bei einer solchen Beschreibung von Modulsubstitutionen als lineare Substitutionen der Variablen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ sei stets stillschweigend verabredet, daß Fixvariable nicht erwähnt werden. Zur späteren Verwendung mögen noch die folgenden Elemente

$$(4) \qquad P_{i-1} = O_{i-1}\, d_{i-1,i}^{-1}\, d_{i,i-1}\, d_{i-1,i}^{-1} \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

$$(5) \qquad d_{lr} = d_{l,l-1}\, d_{l-1,r}\, d_{l,l-1}^{-1}\, d_{l-1,r}^{-1} \qquad (0 < r < l-1 < n)$$

von $\mathfrak{U}$ wie in [5] eingeführt werden. Die Untergruppen

$$(6) \qquad \mathfrak{U}^{(i-1)} = [O_{i-1}, d_{i-1,i}, d_{i,i-1}] = [O_{i-1}, P_{i-1}, d_{i,i-1}] \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

von $\mathfrak{U}$ sind in einem gewissen Sinne die Bausteine von $\mathfrak{U}$ (vgl. [5]) und sämtlich isomorph zur unimodularen Gruppe zweiten Grades.

Sodann werden für $\nu = 1, \ldots, n$ die Untergruppen $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ benötigt, welche aus allen Modulsubstitutionen

$$(7) \qquad M^{(\nu)}\colon\ x_\nu \to a\,x_\nu + b\,y_\nu, \quad y_\nu \to c\,x_\nu + d\,y_\nu$$

bestehen. Sie sind also sämtlich isomorph zu Γ_1. Infolgedessen können diese Gruppen erzeugt werden durch

$$\mathfrak{M}^{(\nu)} = [M_1^{(\nu)}, M_2^{(\nu)}],$$

wobei

$$M_1^{(n)}\colon\ y_n \to x_n + y_n,$$
$$M_2^{(n)}\colon\ x_n \to y_n, \quad y_n \to -x_n$$

und

$$(8) \qquad M_\sigma^{(\nu)} = P_\nu \ldots P_{n-1}\, M_\sigma^{(n)}\, P_{n-1} \ldots P_\nu \qquad (\sigma = 1, 2;\ \nu = 1, \ldots, n-1)$$

ist. Bekanntlich [3] erzeugen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{M}^{(n)}$ die Modulgruppe Γ_n,

$$(9) \qquad \Gamma_n = [O_{i-1}, d_{i-1,i}, d_{i,i-1}, M_1^{(n)}, M_2^{(n)} \mid i = 2, \ldots, n].$$

Nun definiere man die Größen

$$(10) \qquad t_{kl} = M_2^{(k)-1}\, d_{kl}\, M_2^{(k)} \qquad (l < k),$$

die also Modulsubstitutionen der Form $\begin{pmatrix} E & 0 \\ T & E \end{pmatrix}$ sind mit symmetrischen Matrizen T, deren Elemente alle verschwinden mit Ausnahme der Stellen (k, l) und (l, k), wo sich die Zahl 1 befindet. Dann wird

$$(11) \qquad \mathfrak{T} = [O_{i-1}, d_{i,i-1}, d_{i-1,i}, M_1^{(\nu)}, t_{kl} \mid i = 2, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, n;\ 1 \leq l < k \leq n]$$

gerade die Untergruppe aller Modulsubstitutionen mit $B = 0$.

Neben $\mathfrak{U}$ seien noch zwei in $\mathfrak{T}$ enthaltene Untergruppen erwähnt, nämlich

$$\mathfrak{V} = [d_{k1}, d_{k2}, t_{k2}, t_{11}, M_1^{(\nu)} \mid k = 3, \ldots, n;\ l = 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2]$$

und

$$\mathfrak{L} = [t_{k1}, d_{k1}, M_1^{(1)} \mid k = 2, \ldots, n].$$

$\mathfrak{V}$ besteht aus allen Modulsubstitutionen der Form

$$(12) \qquad A = \begin{pmatrix} E^{(2)} & 0 \\ * & E \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0^{(n-2)} \end{pmatrix}, \quad B = 0, \quad D = A'^{-1}$$

und $\mathfrak{L}$ aus denjenigen der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & E \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad B = 0, \quad D = A'^{-1}. \tag{13}$$

Schließlich wird noch die Untergruppe

$$\mathfrak{N} = [O_{i-1}, d_{i-1,i}, d_{i,i-1}, M_\sigma^{(n)} \mid i = 3, \ldots, n; \sigma = 1, 2] \cong \Gamma_{n-1} \tag{14}$$

benötigt, die also aus allen Modulsubstitutionen besteht, bei denen nur $x_2, \ldots, x_n$, $y_2, \ldots, y_n$ einer Modulsubstitution $(n-1)$-ten Grades unterworfen werden, und die darin enthaltene Untergruppe

$$\mathfrak{Q} = [O_{n-1}, d_{n-1,n}, d_{n,n-1}, M_1^{(n)}, M_2^{(n)}] \cong \Gamma_2 .$$

Es sei noch erwähnt, daß $\mathfrak{N}\mathfrak{L}$ die Gruppe aller Modulsubstitutionen mit dem ersten Einheitsvektor als erster Zeile ist und in NL ($N \in \mathfrak{N}$, $L \in \mathfrak{L}$) die Faktoren eindeutig bestimmt sind,

$$NL = E \Rightarrow N = L = E . \tag{15}$$

Die genannten Untergruppen von Γ_n stehen in der folgenden Beziehung zueinander.

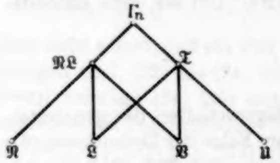

Fig. 1

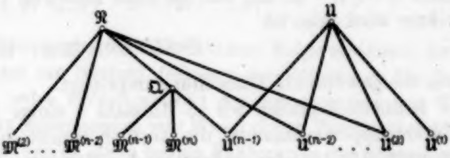

Fig. 2

Die Gruppe Γ_n läßt sich nun in der folgenden Weise aus den Untergruppen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ ($\nu = 1, \ldots, n$) aufbauen.

Hilfssatz 1: *Jedes Element $M \in \Gamma_n$ gestattet eine Darstellung in der folgenden Normalform*

$$M = M^{(n)} \ldots M^{(1)} U N L$$

mit $M^{(\nu)} \in \mathfrak{M}^{(\nu)}$, $U \in \mathfrak{U}$, $N \in \mathfrak{N}$ und $L \in \mathfrak{L}$.

Beweis: Man benutze die Tatsache, daß die Elemente jeder Reihe einer Modulmatrix teilerfremde Zahlen sind und jede Reihe teilerfremder Zahlen zu einer unimodularen Matrix ergänzt werden kann. Zu vorgegebenem $M \in \Gamma_n$ bestimme man zunächst $M^{(n)} \in \mathfrak{M}^{(n)}$ so, daß in $M^{(n)-1} M$ an der Stelle $(n, n+1)$ die Zahl 0 steht, dann wähle man $M^{(n-1)} \in \mathfrak{M}^{(n-1)}$ gemäß der Forderung, daß in $M^{(n-1)-1} M^{(n)-1} M$ das Element an der Stelle $(n-1, n+1)$ verschwindet, usw. So werden schließlich in $M^{(1)-1} \ldots M^{(n)-1} M$ die ersten n Elemente der $(n+1)$-ten Spalte Null. Über $U \in \mathfrak{U}$ kann dann so verfügt werden, daß

$$U^{-1} M^{(1)-1} \ldots M^{(n)-1} M \tag{16}$$

den $(n+1)$-ten Einheitsvektor als $(n+1)$-te Spalte besitzt. Aus der Moduleigenschaft (2) wird dann ersichtlich, daß die erste Zeile von (16) der erste Einheitsvektor ist, also diese Matrix zu $\mathfrak{N}\mathfrak{L}$ gehört.

Die obige Normalform ist offensichtlich nicht eindeutig durch M bestimmt; in dieser Richtung kann aber folgende Aussage gemacht werden.

Hilfssatz 2: *Ist*

$$M^{(n)} \dots M^{(1)} U N L = E$$

und multipliziert man evtl. noch U *von links und* $M^{(1)}$ *von rechts mit* $O_1 = M_2^{(1)2}$, *so gehören sämtliche Faktoren der Normalform zu* $\mathfrak{N}\mathfrak{L}$.

Dies ist trivial für alle Faktoren außer $M^{(1)}$ und U. Für diese ergibt sich die Behauptung, indem man die zugehörigen Matrizen auf beiden Seiten vergleicht. Genauer ist sogar

$$M^{(1)} \in \mathfrak{M}^{(1)} \cap \mathfrak{L}\,, \quad U \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{L}\,. \tag{17}$$

Eine Verfeinerung der Normalform aus Hilfssatz 1 wird gegeben durch

Hilfssatz 3: *Jedes Element* $U \in \mathfrak{U}$ *läßt sich zerlegen in der Form*

$$U = U^* U^{(1)} N L$$

mit $U^*,\ N \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{N},\ U^{(1)} \in \mathfrak{U}^{(1)},\ L \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{L}$.

Beweis: Man bestimme zu gegebenem $U \in \mathfrak{U}$ die Matrix $U^* \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}$ so, daß die letzten $n-2$ Elemente der ersten Zeile von $U^{-1}U^*$ verschwinden, dann $U^{(1)} \in \mathfrak{U}^{(1)}$ derart, daß die erste Zeile von $U^{-1}U^*U^{(1)}$ der erste Einheitsvektor wird. Also ist

$$U^{-1}U^*U^{(1)} \in \mathfrak{N}\mathfrak{L} \cap \mathfrak{U}\,,$$

was die gewünschte Darstellung impliziert.

Schließlich stellen wir in Hilfssatz 4 einige Eigenschaften der genannten Untergruppen zusammen, die sämtlich unmittelbare Folge der Definitionen (6), (7), (12), (13), (14) der vorkommenden Matrizengruppen $\mathfrak{U}^{(i)}, \mathfrak{M}^{(\nu)}, \mathfrak{V}, \mathfrak{L}, \mathfrak{N}$ sind.

Hilfssatz 4: *Es gilt*

$$\mathfrak{U}^{(i)} \rightleftarrows \mathfrak{M}^{(\nu)} \qquad (\nu \neq i,\ i+1)\,, \tag{18}$$

$$\mathfrak{M}^{(\nu)} \rightleftarrows \mathfrak{M}^{(\mu)} \qquad (\nu \neq \mu)\,, \tag{19}$$

$$U^{-1}\mathfrak{V}U = \mathfrak{V} \qquad \textit{für alle } U \in \mathfrak{U}^{(1)}\,, \tag{20}$$

$$N^{-1}\mathfrak{L}N = \mathfrak{L} \qquad \textit{für alle } N \in \mathfrak{N}\,. \tag{21}$$

Dabei bedeutet der Doppelpfeil die elementweise Vertauschbarkeit zweier Gruppen.

§ 2. Ein vollständiges Relationensystem für Γ_n

Der im vorigen Paragraphen geschilderte gruppentheoretische Aufbau von Γ_n läßt sich dazu benutzen, ein vollständiges Relationensystem für Γ_n in den Erzeugenden (9) abzulesen. Dazu ist es notwendig, die beiden folgenden Aufgaben zu lösen. Erstens ist zu zeigen, daß jedes Potenzprodukt der Erzeugenden (9) mittels der aufzustellenden Relationen in die Normalform des Hilfssatzes 1 übergeführt werden kann. Zweitens werden jene Relationen hinreichen, um eine beliebige in der Normalform gegebene Relation in das abstrakte Einselement überzuführen.

Wir denken uns also fortan Γ_n durch (9) erzeugt, definieren die Größen

$$P_\nu,\ d_{kl},\ M_\sigma^{(\nu)},\ t_{kl} \qquad (\nu = 1, \dots, n-1\,;\ k > l\,;\ \sigma = 1, 2)$$

durch (4), (5), (8), (10) und erzeugen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^{(i)}$, $\mathfrak{M}^{(\nu)}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{Q}$ wie in Paragraph 1. Für $\mathfrak{U}$ hat MAGNUS [5] ein System definierender Relationen angegeben, das abkürzend mit

$$\mathfrak{U}_\mu = E \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{22}$$

bezeichnet sei. Es ist sehr einfach, ein System definierender Relationen für $\mathfrak{T}$ in den Erzeugenden (11) anzugeben. Man nehme nämlich das Magnussche Relationenssystem (22), die Vertauschbarkeitsrelationen

$$(t_{kl}, M_1^{(\nu)}) \rightleftarrows (t_{rs}, M_1^{(\mu)}) \quad (\nu, \mu = 1, \ldots, n;\ 1 \leq l < k \leq n;\ 1 \leq s < r \leq n) \tag{23}$$

und Relationen, welche die Beziehung

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ T & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ U'TU & E \end{pmatrix} \tag{24}$$

zum Ausdruck bringen. Letzteres soll heißen, daß man diese Relation hinschreibt für

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ T & E \end{pmatrix} = M_1^{(\nu)}, t_{kl} \qquad (\nu = 1, \ldots, n;\ \ 1 \leq l < k \leq n)$$

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix} = O_{i-1},\ \ d_{i,i-1}^{\pm 1},\ \ d_{i-1,i}^{\pm 1} \qquad (i = 2, \ldots, n)\,.$$

Man sieht sofort, daß ein Teil der so erhaltenen Relationen Folgerelationen der übrigen sind. (22) bis (24) bilden ein System definierender Relationen für $\mathfrak{T}$. Denn vermöge (24) läßt sich jedes Potenzprodukt der Erzeugenden von $\mathfrak{T}$ schreiben als Potenzprodukt der Erzeugenden von $\mathfrak{U}$ mal einem Potenzprodukt der $M_1^{(\nu)}$, t_{kl}. (22) bzw. (23) erlauben es, diese beiden Faktoren in das abstrakte Einselement überzuführen, sofern man von einer Relation in $\mathfrak{T}$ ausgeht.

Das durch (22) bis (24) beschriebene System definierender Relationen für $\mathfrak{T}$ werde abkürzend mit

$$\mathfrak{T}_\nu = E \qquad (\nu = 1, \ldots, p) \tag{25}$$

bezeichnet. Ferner sei

$$\mathfrak{Q}_\mu = E \qquad (\mu = 1, \ldots, q) \tag{26}$$

ein System definierender Relationen für $\mathfrak{Q}$, das man etwa aus den Gottschlingschen Untersuchungen ablesen kann. Man nehme noch die folgenden wegen (18) geltenden Vertauschbarkeitsrelationen hinzu,

$$\begin{aligned} d_{i,i-1} M_2^{(\nu)} &= M_2^{(\nu)} d_{i,i-1} \\ P_{i-1} M_2^{(\nu)} &= M_2^{(\nu)} P_{i-1} \end{aligned} \qquad (\nu = 1, \ldots, n;\ i = 2, \ldots, n;\ \nu \neq i, i-1), \tag{27}$$

wovon natürlich wieder ein Teil Folgerelationen der übrigen sind. Dann gilt der folgende Satz.

Satz: *Die Relationen* (25) *bis* (27) *bilden ein vollständiges Relationensystem der Siegelschen Modulgruppe* Γ_n $(n \geq 2)$.

Bevor wir mit dem eigentlichen Beweis beginnen, sollen die gruppentheoretischen Aussagen von Hilfssatz 4 als Folgerelationen von (25) bis (27) hergeleitet werden. Zunächst sind die Relationen (27) mit M_1 an Stelle von

M_2 auch richtig und in (24) enthalten, so daß

$$(P_{i-1}, d_{i,i-1}) \rightleftarrows (M_1^{(\nu)}, M_2^{(\nu)}) \qquad (\nu \neq i, i-1)$$

wird. Ferner ist

$$(M_1^{(\nu)}, M_2^{(\nu)}) \rightleftarrows (M_1^{(\mu)}, M_2^{(\mu)}) \qquad (\nu \neq \mu)$$

für $\nu = n-1$, $\mu = n$ als Relation in $\mathfrak{Q}$ Folgerelation von (26) und ergibt sich allgemein vermöge (8) und (27). Ebenso ist die Relation

$$(28) \qquad O_i = M_2^{(i)2} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

für $i = n$ als Relation in $\mathfrak{Q}$ in (26) enthalten und ergibt sich allgemein nach (8) und (22). Zusammengefaßt findet man also die elementweise Vertauschbarkeit der Gruppen $\mathfrak{U}^{(i)}$ und $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ $(\nu \neq i,\ i-1)$ sowie von $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ und $\mathfrak{M}^{(\mu)}$ $(\nu \neq \mu)$, indem dies für die Erzeugenden der einzelnen Gruppen nachgewiesen wurde.

Die dritte Aussage von Hilfssatz 4 muß sich aus dem vollständigen Relationensystem (25) für $\mathfrak{T}$ ergeben, da $\mathfrak{U}^{(1)}$ und $\mathfrak{V}$ Untergruppen von $\mathfrak{T}$ sind.

Schließlich hat man zum Nachweis von (21) zu zeigen, daß die Relationen (25) bis (27) es gestatten, jeden Ausdruck LN auf die Form NL^* zu bringen; dabei sind $L, L^* \in \mathfrak{L}$, $N \in \mathfrak{N}$. Es genügt, dies für die Erzeugenden N von $\mathfrak{N}$ und L von $\mathfrak{L}$ nachzuweisen. Da $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{T}$, ist das eine Folge von (25) für alle Erzeugenden von $\mathfrak{N}$ bis auf $M_2^{(n)}$. Die verbleibenden Relationen ergeben sich zu

$$(29) \qquad \begin{array}{lll} d_{k1} M_2^{(n)} = M_2^{(n)} d_{k1} & (k \neq n) & \text{nach (18)}, \\ d_{n1} M_2^{(n)\pm 1} = M_2^{(n)\pm 1} t_{n1}^{\pm 1} & & \text{nach (10), (22), (28)}, \\ t_{k1} M_2^{(n)} = M_2^{(n)} t_{k1} & (k \neq n) & \text{nach (10), (18), (19)}, \\ t_{n1} M_2^{(n)\pm 1} = M_2^{(n)\pm 1} d_{n1}^{\mp 1} & & \text{nach (29)}, \\ M_1^{(1)} M_2^{(n)} = M_2^{(n)} M_1^{(1)} & & \text{nach (19)}. \end{array}$$

also sämtlich als Folgerelationen von (25) bis (27). — Wir haben also fortan den Hilfssatz 4 zur Verfügung.

Die Lösung der zu Beginn dieses Paragraphen formulierten ersten Aufgabe wird nun mittels der Relationen (25) bis (27) im nächsten Hilfssatz durchgeführt.

Hilfssatz 5: *Sei z ein beliebiges Element aus dem Erzeugendensystem* (9) *von Γ_n. Dann kann*

$$z^{\pm 1} M^{(n)} \ldots M^{(1)} U N L$$

mit Hilfe der Relationen (25) *bis* (27) *in die Normalform übergeführt werden.*

Dabei sind also $M^{(\nu)}$, U, N, L der Reihe nach gegeben als Potenzprodukte der Erzeugenden der Gruppen $\mathfrak{M}^{(\nu)}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$. Dieser Hilfssatz ermöglicht dann die schrittweise Überführung eines beliebigen Elementes aus Γ_n in die Normalform.

Beweis: Ist $z = M_1^{(n)}, M_2^{(n)}$, so fasse man $z^{\pm 1}$ einfach mit dem ersten Faktor $M^{(n)}$ zusammen. Da bereits das vollständige Relationensystem (22) von $\mathfrak{U}$ in dem zu untersuchenden Relationensystem vorkommt, kann man die Erzeugenden (3) ersetzen durch die Erzeugenden

$$d_{n,n-1},\ P_k,\ O_i \qquad (k = 1, \ldots, n-1;\ i = 1, \ldots, n)$$

von $\mathfrak{U}$. Ist $z = O_i$, so zeigen (19) und (28) die Möglichkeit, z mit $M^{(i)}$ zusammenzufassen. Sei nun $z = P_k$. (8), (18) und (19) gestatten es, $z^{\pm 1}$ durch $M^{(n)} \ldots M^{(1)}$ hindurchzuziehen und mit U zu vereinigen. Dabei ändern sich lediglich $M^{(k)}$ und $M^{(k+1)}$. — Schließlich sei $z = d_{n,n-1}$. Der Hilfssatz 4 zeigt, daß es ausreicht,

$$d_{n,n-1}^{\pm 1} M^{(n)} M^{(n-1)} U$$

in die Normalform überzuführen. Nun erlauben es die Relationen (22), U in der Normalform des Hilfssatzes 3 anzunehmen, wobei wieder der rechte Faktor NL nach Hilfssatz 4 weggelassen werden kann. Also hat man nur noch

(30) $$d_{n,n-1}^{\pm 1} M^{(n)} M^{(n-1)} U^* U^{(1)} \quad (U^* \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}, \quad U^{(1)} \in \mathfrak{U}^{(1)})$$

in die Normalform überzuführen. Die ersten vier Faktoren sind aus $\mathfrak{N}$. Unter der Annahme, daß der zu beweisende Satz über die Vollständigkeit des Relationensystems für $n - 1$ statt n richtig ist, kann man mittels der Relationen (25) bis (27), welche das entsprechende Relationensystem für $\mathfrak{N} \cong \Gamma_{n-1}$ enthalten, jenes Produkt der ersten vier Faktoren auf die Normalform von Γ_{n-1} bringen. (30) nimmt dann die Gestalt an

(31) $$M^{(n)} \ldots M^{(2)} U N V U^{(1)},$$

wobei jetzt N und V Potenzprodukte der folgenden Elemente sind

$$N = \mathfrak{P}\,(\mathring{O}_{i-1}, d_{i-1,i}, d_{i,i-1}, M_\sigma^{(n)} | i = 3, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2),$$
$$V = \mathfrak{P}\,(d_{k1}, t_{k1}, M_1^{(2)} | k = 3, \ldots, n).$$

Es ist also insbesondere $V \in \mathfrak{V}$, so daß nach (20) der Faktor $U^{(1)}$ in (31) vor den Faktor V gezogen werden kann. Dies gibt

$$M^{(n)} \ldots M^{(2)} U N U^{(1)} V^*$$

mit $V^* \in \mathfrak{V}$. Die Relationen (22) und (18) zeigen die Vertauschbarkeit von $U^{(1)}$ und N, so daß man $U^{(1)}$ mit U vereinigen kann. Schließlich ist $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{N}\mathfrak{L}$, so daß nach (21) $V^* = NL$ und damit die Normalform erreicht wird.

Schließlich soll die zweite am Anfang dieses Paragraphen gestellte Aufgabe gelöst werden in

Hilfssatz 6: *Die Relationen* (25) *bis* (27) *erlauben es, eine beliebige in der Normalform gegebene Relation von Γ_n in das abstrakte Einselement überzuführen.*

Beweis: Sei

(32) $$M^{(n)} \ldots M^{(1)} U N L \quad (= E)$$

eine Relation in der Normalform. Indem man noch evtl. $M^{(1)}$ von rechts mit $M_2^{(1)2}$ und U von links mit O_1 multipliziert, folgt nach Hilfssatz 2, daß sämtliche Faktoren aus $\mathfrak{N}\mathfrak{L}$ sind und nach (17) $M^{(1)}$ sogar zu $\mathfrak{L}$ gehört. Dann ist $M^{(1)}$ eine Potenz von $M_1^{(1)}$ allein, und vermöge des Systems definierender Relationen von $\mathfrak{M}^{(1)}$,

(33) $$(M_2^{(\nu)} M_1^{(\nu)})^3 M_2^{(\nu)2} = E, \qquad M_2^{(\nu)4} = E,$$

für $\nu = 1$, kann man $M^{(1)}$ auf die Form $M_1^{(1)s} \in \mathfrak{L}$ bringen. Die Relationen (33) für $\nu = n$ sind aber als Relationen in $\mathfrak{Q}$ Folgerelationen von (26) und ergeben

sich für beliebiges ν aus (8) und (25). — $U \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{L}$ ist Potenzprodukt von

$$U = \mathfrak{P}\,(d_{k1}, O_{i-1}, d_{i-1,i}, d_{i,i-1} \mid k = 2, \ldots, n;\ i = 3, \ldots, n)\,,$$

also vermöge der Relationen (22) von $\mathfrak{U}$ in ein Potenzprodukt der Erzeugenden von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{L}$ überführbar. Folglich kann (32) nach (21) auf die Form

$$NL \quad (= E)$$

gebracht werden. Dann ist aber nach (15) N eine Relation in $\mathfrak{N}$ und L eine Relation in $\mathfrak{L}$. L läßt sich als Relation in $\mathfrak{T}$ vermöge (25) in das abstrakte Einselement überführen und N unter der Annahme, daß der behauptete Satz für Γ_{n-1} statt Γ_n richtig ist.

Ein Induktionsschluß vollendet den Beweis der beiden letzten Hilfssätze, wodurch dann die Vollständigkeit des Relationensystems (25) bis (27) erkannt ist.

Literatur

[1] GOTTSCHLING, E.: Explizite Bestimmung der Randflächen des Fundamentalbereichs der Modulgruppe zweiten Grades. Math. Ann. **138**, 103—124 (1959).

[2] GOTTSCHLING, E.: Über die Fixpunkte der Siegelschen Modulgruppe. Math. Ann. **143**, 111—149 (1961).

[3] HUA, L. K. and I. REINER: On the generators of the symplectic modular group. Trans. Am. Math. Soc. **65**, 415—426 (1949).

[4] KLINGEN, H.: Über die Erzeugenden gewisser Modulgruppen. Nachr. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen **1956**, 173—185.

[5] MAGNUS, W.: Über n-dimensionale Gittertransformationen. Acta Math. **64**, 353—367 (1934).

[6] NIELSEN, J.: Die Gruppe der dreidimensionalen Gittertransformationen. Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Math.-fysiske Meddelelser V, **12**, 1—29 (1924).

[7] DE SÉGUIER, J. A.: Sur les automorphismes de certaines groupes. Compt rend. **179**, 139—142 (1924).

(Eingegangen am 11. Januar 1961)

Huber, P. J.
Math. Annalen 144, 73—76 (1961)

Homotopical Cohomology and Čech Cohomology

By

Peter J. Huber*) in Zürich and Geneva

1. Introduction

Let $K(G, n)$ be an Eilenberg-MacLane complex, i.e. a CW-complex having a single non-vanishing homotopy group G in dimension n. The n-th Homotopical Cohomology Group $H^n(X; G)$ of a space X is defined as the group of homotopy classes of maps $X \to K(G, n)$, the group structure being induced by any of the H-structures of $K(G, n)$. It is rather irrelevant whether we consider only basepoint-preserving maps or all maps (as we shall do here), since it may be shown easily that we obtain for $n > 0$ the same groups.

It will be proved that for paracompact Hausdorff spaces X, the homotopical cohomology group $H^n(X; G)$ is isomorphic with the Čech cohomology group $\check{H}^n(X; G)$, provided either that G is countable or that X is a k-space ([6], p. 230; the most important k-spaces are the Hausdorff spaces which are either locally compact or satisfy the first axiom of countability).

This assertion or similar ones seem to be known only for the particular case where X is either a polyhedron or a compact space; they have been proved either

(a) by an application of obstruction theory, and thus establishing a $1-1$ correspondence between the homotopy classes and the elements of some cohomology group, or

(b) by verifying the Eilenberg-Steenrod axioms (they are valid if X is a normal space) and then applying the various uniqueness theorems (cf. [1]), or

(c) by straightforward identification of the homotopical cohomology groups with the simplicial groups of a complex ([2]).

The proof below is quite different and seems to be interesting in itself. Its main idea is to realize the space $K(G, n)$ as a topological group, and to investigate the sheaf cohomology of the sheaf of germs of continuous functions $X \to K(G, n)$. (Throughout this paper, we use sheaf cohomology in the sense of Grothendieck-Godement [5], [4], which is isomorphic with Čech sheaf cohomology, if X is paracompact.)

The proof proceeds by a number of lemmas:

*) This research was partly supported by the U. S. Department of Army through its European Research Office.

2. Local contractibility

Lemma 2.1. Let Y be a space having the homotopy type of a CW-complex. Then Y is weakly locally contractible (wlc, FADELL [3]), i.e. each point $y \in Y$ has a neighborhood U which is contractible in Y.

Proof. It is well known that simplicial complexes are wlc. Since the property wlc is an invariant of the homotopy type, the assertion follows.

Lemma 2.2. Let Y be pathwise connected, and let EY be the space of paths beginning in some fixed point o of Y. The fibre map $p: EY \to X$, which maps each path on its endpoint, admits local sections if and only if Y is wlc.

Proof. Assume that Y is wlc, and let U be a neighborhood of $y \in Y$ which is contractible in Y. Since Y is pathwise connected, there is a contraction $\varphi: U \times I \to Y$ which contracts U to the point o. Then we define a local section $\psi: U \to EY$ by $\psi(u)(t) = \varphi(u, t)$. Conversely, each local section defines a local contraction.

3. The $K(G, n)$-sheaves

According to MILNOR [7], there exist CW-complexes $K(G, n)$, which are topological abelian groups, if G is countable. By $G^k = \Omega^{n-k} K(G, n)$, we denote the $(n-k)$-fold iterated space of loops on $K(G, n)$; G^k is an Eilenberg-MacLane space $K(G, k)$ having the homotopy type of a CW-complex (MILNOR [8]). The group structure in $K(G, n)$ induces topological group structures in G^k and in the space of paths EG^k. Obviously, we have exact sequences of topological groups

$$O \to G^{k-1} \xrightarrow{j} EG^k \xrightarrow{p} G^k \to O \qquad (1 \leqq k \leqq n) \tag{1}$$

j and p being the natural inclusion map and fibre map respectively.

Let $\mathcal{G}^k$ and $\mathcal{E}^k$ be the sheaves of germs of continuous functions on a space X with values in G^k and EG^k respectively.

Lemma 3.1. The exact sequences (1) induce exact sheaf sequences

$$O \to \mathcal{G}^{k-1} \xrightarrow{j_*} \mathcal{E}^k \xrightarrow{p_*} \mathcal{G}^k \to O \qquad (1 \leqq k \leqq n).$$

Proof. (1) Exactness at the left hand term is clear.

(2) Obviously, we have $p_* j_* = o$. Since j is a homeomorphism of G^{k-1} into EG^k, each germ of $\mathcal{E}^k$, which is mapped by p_* onto zero, is the image of some germ of $\mathcal{G}^{k-1}$; hence, we have exactness at the middle term.

(3) By Lemma 2.1, G^k is wlc. Since G^k is pathwise connected for $k > o$, p admits local sections (Lemma 2.2); hence, p_* is epimorphic.

Lemma 3.2. Let X be a paracompact Hausdorff space. If the space E is contractible, then the sheaf $\mathcal{E}$ of germs of continuous functions $X \to E$ is soft ("faisceau mou").

Proof. We have to show that any section s of $\mathcal{E}$ over a closed subset $A \subset X$ may be extended to a section over X. s may be represented by a continuous function $s': U \to E$, U being an open neighborhood of A. Since a paracompact space is normal, we may find open sets V, W such that $U \supset \overline{V} \supset V \supset \overline{W} \supset W \supset A$. By the Urysohn Lemma, we have a real valued continuous function $f: X \to I$

which is o on $\overline{W}$ and 1 outside V. Let $\varphi : E \times I \to E$ be a contraction of E: $\varphi(x, o) = x$, $\varphi(x, 1) = o$. We define

$$s''(x) = \varphi(s'(x), f(x)), \quad x \in U,$$
$$s''(x) = o \quad , \quad x \notin U.$$

Obviously, s'' is continuous, and we have $s''(x) = s'(x)$ for $x \in W$. Hence, s'' is an extension of s.

4. Exact sheaf cohomology sequences

Proposition 4. Let X be a paracompact Hausdorff space, G^0 a topological abelian group, and Q an open and closed subgroup of G^0. By $\mathscr{G}^0$ we denote the sheaf of germs of continuous functions $X \to G^0$. If Q is contractible, then we have

$$\check{H}^m(X; \mathscr{G}^0) \cong \check{H}^m(X; G^0/Q) \qquad (m > o),$$

Proof. Let $\mathscr{Q}$ and $\mathscr{G}$ be the sheaves of germs of continuous functions on X with values in Q and $G = G^0/Q$ respectively. Since G is discrete, $\mathscr{G}$ is a constant sheaf. Then we have an exact sequence of sheaves

$$O \to \mathscr{Q} \to \mathscr{G}^0 \to \mathscr{G} \to O.$$

The left hand term $\mathscr{Q}$ is soft (by Lemma 3.2); hence, $\check{H}^m(X; \mathscr{Q}) = O$ $(m > o)$. The exact cohomology sequence

$$\cdots \to \check{H}^m(X; \mathscr{Q}) \to \check{H}^m(X; \mathscr{G}^0) \to \check{H}^m(X; \mathscr{G}) \to \check{H}^{m+1}(X; \mathscr{Q}) \ldots$$

implies $\check{H}^m(X; \mathscr{G}^0) \cong \check{H}^m(X; \mathscr{G})$, $(m > o)$.
Since $\check{H}^m(X; G) = \check{H}^m(X; \mathscr{G})$, the assertion follows.

Now consider the exact cohomology sequences induced by the exact sheaf sequences of Lemma 3.1:

$$\cdots \to \check{H}^m(X; \mathscr{G}^{k-1}) \to \check{H}^m(X; \mathscr{E}^k) \to \check{H}^m(X; \mathscr{G}^k) \to \check{H}^{m+1}(X; \mathscr{G}^{k-1}) \to \cdots$$

Lemma 3.2 implies that $\mathscr{E}^k$ is soft; hence, $H^m(X; \mathscr{E}^k) = O$ for $m > o$. Therefore

$$\check{H}^{m+1}(X; \mathscr{G}^{k-1}) \cong \check{H}^m(X; \mathscr{G}^k), \qquad (m > o)$$
$$\check{H}^1(X; \mathscr{G}^{k-1}) \cong \check{H}^0(X; \mathscr{G}^k)/\operatorname{Im} \check{H}^0(X; \mathscr{E}^k),$$

and thus

$$\check{H}^n(X; \mathscr{G}^0) \cong \check{H}^0(X; \mathscr{G}^n)/\operatorname{Im} \check{H}^0(X; \mathscr{E}^n), \qquad (n > o).$$

$\check{H}^0(X; \mathscr{G}^n)$ is the group of global maps $X \to K(G, n)$, $\operatorname{Im} \check{H}^0(X; \mathscr{E}^n)$ is the subgroup consisting of those maps, which may be factored through the map $EK(G, n) \to K(G, n)$, i.e. precisely of the nullhomotopic maps. Hence, we have the following isomorphism between Čech and Homotopical Cohomology:

$$\check{H}^n(X; \mathscr{G}^0) \cong H^n(X; G), \qquad (n > o).$$

Theorem. *Let X be a paracompact Hausdorff space. The homotopical cohomology group $H^n(X; G)$ is isomorphic with the Čech cohomology group $\check{H}^n(X; G)$, provided either that G is countable, or that X is a k-space.*

Proof. If G is countable, this follows immediately from the preceding isomorphism and Proposition 4, since the component of the zero element of $G^0 = \Omega^n K(G, n)$ (which is open in G^0) has vanishing homotopy groups, and is therefore contractible. If G is not countable, then the group operation in Milnors realization

$$m: K(G, n) \times K(G, n) \to K(G, n)$$

is not necessarily continuous. However, a closer inspection of the above proof shows that continuity of m actually is needed only to guarantee that the sum $s' + s''$ of two continuous local functions $s', s'' : U \to G^k$ (and EG^k respectively) again is continuous, so that we may introduce a group structure into the sheaves. Since the restriction of m to compact subsets is continuous in any case, it follows that $s' + s'' : U \to K(G, n)$ is continuous on compacta, which implies continuity, if X is a k-space. For the spaces G^k and EG^k, a somewhat more complicated argument is necessary. First, one replaces the set of maps $\mathrm{Map}(U, G^k)$ in a canonical way by the subset of $\mathrm{Map}(U \times S_{n-k}, K(G, n))$ consisting of those maps which map $U \times \{o\}$ onto o. Lemma 2.10 of [9] then implies that $X \times S_{n-k}$ is a k-space, and continuity of $s' + s''$ follows. An analogous consideration shows the same for the spaces EG^k instead of G^k[1]).

It is easy to show directly that the theorem is valid in dimension $n = o$, too. If we consider only basepoint-preserving maps $X \to K(G, n)$, then we obtain the reduced instead of the ordinary cohomology groups.

References

[1] Eckmann, B., et P. J. Hilton: Groupes d'homotopie et dualité. Note III. Compt. rend. **246**, 2991 (1958).

[2] Eckmann, B., and P. J. Hilton: Simplicial and homotopical cohomology, obstructions (to appear).

[3] Fadell, E.: On fiber spaces. Trans. Am. Math. Soc. **90**, 1 (1959).

[4] Godement, R.: Theorie des faisceaux. Paris 1958.

[5] Grothendieck, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Math. J. **9**, 119 (1957).

[6] Kelley, J. L.: General Topology. New York 1955.

[7] Milnor, J.: The geometric realization of a semi-simplicial complex. Ann. Math. **65**, 377 (1957)

[8] Milnor, J.: On spaces having the homotopy type of a CW-complex. Trans. Am. Math. Soc. **90**, 272 (1959).

[9] Spanier, E.: Infinite symmetric products, function spaces and duality. Ann. Math. **69**, 142 (1959).

(Received December 23, 1960)

---

[1]) In fact, it may be proved that for arbitrary paracompact Hausdorff spaces X and arbitrary abelian groups G, the Čech cohomology groups $\check{H}^n(X; G)$ are isomorphic with the groups of homotopy classes of c-maps $X \to K(G, n)$. (A c-map is a function which is continuous on compacta.)

OSSERMAN, R.
Math. Annalen 144, 77—79 (1961)

Hyperbolic surfaces of the form $z = f(x, y)$

By

ROBERT OSSERMAN*) in Washington, D. C.

Given a surface of the form $z = f(x, y)$ over the whole x, y-plane, it is called *hyperbolic* if it can be mapped conformally onto the interior of the unit circle. The question whether any such surfaces exist was raised by LOEWNER and has been answered by the construction of a number of examples. In the present note, an example is given which is considerably simpler than the previous ones of the author [4, 5], and where the proof that the surface is hyperbolic consists of an explicit quasiconformal map onto the unit disk. The proofs that the surfaces in [2] and [3] are hyperbolic are more involved, but it should be pointed out that the surfaces constructed there are infinitely differentiable to start with, whereas we would need some sort of approximation theorem if we wished to obtain infinitely-differentiable hyperbolic surfaces.

The surfaces which we shall consider are polyhedral. By a conformal map of a polyhedral surface onto a plane region, we mean a topological map of the whole surface which is conformal in the interior of each plane face[1]). The behavior of the map along the edges and at the vertices is then uniquely determined by classical theorems in function theory.

We first define a surface S over the strip $x \geqq 0$, $0 \leqq y \leqq 1$. The chief property of S is that z oscillates rapidly between 0 and 1 as y goes from 0 to 1, the rate of oscillation increasing exponentially with x. More specifically, on each ray: $x \geqq n$, $y = k/3^n$, we have $z = 0$ or $z = 1$ according as k is even or odd.

We denote by S_0 the part of the surface over $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$. It may be chosen as an arbitrary polyhedral surface (the union of a finite number of plane triangles) of the form $z = f(x, y)$, satisfying

1. the boundary of S_0 consists of the line segments joining successively the points $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $\left(1, \frac{1}{3}, 1\right)$, $\left(1, \frac{2}{3}, 0\right)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$;
2. none of the triangles of S_0 lies in a plane parallel to the y-axis.

Such a surface can easily be constructed using four triangles.

We denote by S_n the part of the surface over the rectangle $n \leqq x \leqq n + 1$, $0 \leqq y \leqq \frac{1}{3^n}$, defined in terms of S_0 by setting

$$f(x, y) = f(x - n, 3^n y) .$$

*) This work was supported by the Office of Ordnance Research, U.S.Army.

[1]) This elegant characterization of the conformal structure of polyhedral surfaces was pointed out to the author by L. BERS.

We then extend the surface over the square $n \leq x \leq n+1$, $0 \leq y \leq 1$, by successive reflections in the vertical planes $y = k/3^n$, $k = 1, 2, \ldots, 3^n - 1$. By virtue of property 1 of S_0, we obtain in this way a polyhedral surface S of the form $z = f(x, y)$ over the whole strip $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$.

We now define a map φ of S onto the rectangle $R: 0 \leq \xi < \frac{3}{2}, 0 \leq \eta \leq 1$, by setting

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{3^n}(x - n) \\ \eta &= y \end{aligned}\right\} \quad \text{for} \quad n \leq x \leq n+1 .$$

The map φ thus defined is clearly a topological map of S onto R, and it is furthermore linear in each triangle of S. We show next that the dilatations of all of these linear maps are uniformly bounded above.

Let T_n be an arbitrary triangle of S_n, and let T_0 be the corresponding triangle in S_0. If the plane of T_0 is $z = ax + by + c$, then T_n lies in the plane $z = a(x - n) + 3^n b y + c$. In terms of the variables ξ, η we obtain

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 3^{2n}(E\, d\xi^2 + 2F\, d\xi\, d\eta + G\, d\eta^2)$$

where

$$E = a^2 + 1, \quad F = ab, \quad G = b^2 + 3^{-2n}$$

for points on T_n. Hence

$$\frac{E + G}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{a^2 + b^2 + 1 + 3^{-2n}}{\sqrt{b^2 + (a^2 + 1)\, 3^{-2n}}} < \frac{2 + a^2 + b^2}{|b|}$$

where we note that $b \neq 0$ by property 2 of S_0.

Thus we obtain an upper bound for the dilatation on T_n, depending not on n, but only on the corresponding triangle T_0 of S_0. Since S_0 consists of a finite number of triangles we obtain a uniform bound for all triangles of S. Along the common edge of two triangles the map φ will not be differentiable, but as is well known [1], the maximal dilatation remains unchanged if we delete analytic arcs. Thus φ is indeed quasiconformal.

To obtain the example cited in the introduction, we merely extend S by successive reflections to a surface W over the whole plane, and then extend the map φ, again by reflection, to a map of W onto the infinite strip $T: -\frac{3}{2} < \xi < \frac{3}{2}$. This extended map will be quasiconformal (with the same maximal dilatation as φ) and if we compose it with an elementary conformal map of T onto the unit disk D, we get an explicit quasiconformal map of W onto D.

Remark: Although the surface W is of interest because it (and the map onto D) may be given in such an elementary and explicit manner, it is worth noting that if the surface S is extended in an *arbitrary* manner to a surface W' over the whole plane, then W' must be hyperbolic. Namely, if W' were parabolic, it would follow that S must have a single prime end at infinity, which would in turn imply that under a quasiconformal map, the ideal boundary

of S at infinity would correspond to a single boundary point. But under φ we obtain the whole right hand side of the rectangle R.

It is also worth noting that by altering the polyhedral surfaces S and W in sufficiently small neighborhoods of their edges and vertices, we can construct infinitely differentiable surfaces having the same conformal properties. This may be done by the method used in [5], or again by means of quasiconformal mappings.

References

[1] Ahlfors, L. V.: On quasiconformal mappings. J. d'Analyse 3, 1—58 (1954).
[2] Huber, H.: Riemannsche Flächen von hyperbolischem Typus im euklidischen Raum. Math. Ann. 139, 140—146 (1959).
[3] Jenkins, J. A.: (To appear).
[4] Osserman, R.: A hyperbolic surface in 3-space. Proc. Am. Math. Soc. 7, 54—58 (1956).
[5] Osserman, R.: Riemann surfaces of Class A. Trans. Am. Math. Soc. 82, 217—245 (1956).

(Received October 25, 1960)

Copeland, A. H., and J. de Groot
Math. Annalen 144, 80—92 (1961)

Linearization of a Homeomorphism

By

A. H. Copeland jr.*) in Lafayette (Indiana) and J. de Groot**) in Amsterdam

Introduction

A classical result of Urysohn states that every separable, metrizable space M is topologically imbeddable in separable Hilbert space H. In this sense one may say that H is *universal* for the class of separable, metrizable spaces. Now suppose that $\varphi : M \to M$ is an autohomeomorphism of M onto itself. We shall define a fixed bounded linear homeomorphism Λ of H onto H such that H, Λ is universal for the class of pairs of the form M, φ. That is, if M, φ is given, then there exists an imbedding $\mu : M \to M^* = \mu M$ of M in H such that the map $\varphi^* = \mu \varphi \mu^{-1}$ on M^* is equal to the restriction of Λ to M^*. In other words, we have replaced the pair M, φ by a topologically equivalent pair M^*, φ^* such that the map φ^* of $M^* \subset H$ is *linearized*. This result is derived in Section 1. Although it is possible to generalize these results to other maps and other spaces (see, e.g. [4]), we restrict ourselves in this paper to the investigation of a single homeomorphism on a separable, metrizable space.

In Section 2, we investigate the case in which M has finite dimension n and φ has finite order. The classical result of Menger-Nöbeling-Hurewicz states that M can always be imbedded in E^{2n+1}, Euclidean space of dimension $2n+1$. Now we want such an imbedding M^* of M that the map φ^* corresponding to φ is induced by an orthogonal transformation of a Euclidean space of *least possible* dimension. Our main result, Theorem III, states that if φ has *prime order*, this can always be achieved in E^{3n+3} (sometimes even in E^{3n+2}). Observe that the dimension $3n + 3$ does not depend on the prime order.

Sections 3 and 4 are devoted to showing that the above dimensions are the least possible. Section 3 reviews the Lefschetz invariant and adapts it to our needs. In Section 4, this is applied to the construction of examples of pairs M, φ which cannot be linearized in dimensions less than those specified. The main result has been announced in [2].

The authors are indebted to Victor Klee and Hans Samelson for valuable remarks.

---

*) Received support from the Office of Ordinance Research (Contract No. DA — 33 — 088 — ORD — 1988).

**) Received support from the National Science Foundation (Contract No. NSF G — 12980).

Section 1. Homeomorphisms of arbitrary order

Let the pair M, φ denote a separable metrizable space M and an autohomeomorphism $\varphi : M \to M$ of M onto itself. E or E^n will stand for Euclidean space or n-dimensional Euclidean space respectively. H stands for separable real Hilbert space. The symbols $\Phi, \Lambda, \ldots$ will indicate linear autohomeomorphisms of some linear space L onto itself.

Definition. The pair M, φ admits a (topological) *linearization* in the pair L, Φ if there exists a topological imbedding

$$\mu : M \to L$$

such that

$$\mu\varphi = \Phi\mu .$$

That is, the space M must be homeomorphic to a subspace $M^* = \mu M$ of L in such a way that the autohomeomorphism

$$\varphi^* = \mu\varphi\mu^{-1}$$

on M^* is a restriction to M^* of the linear map Φ:

$$\varphi^* = \Phi | M^* .$$

The pair M^*, φ^* is "topologically equivalent" to M, φ. So, if we have the situation as described in this definition, the map φ is topologically linearized and the equivalent map $\varphi^* | M^*$ admits a linear extension Φ over L.

It may happen that one and the same pair L, Φ linearizes a whole family of pairs M, φ. In this case we say, that the family $\{M, \varphi\}$ admits a *universal linearization* L, Φ (thus universal means "universal with respect to the given family").

We shall use a fixed orthogonal coordinate-system in H, enumerated by means of two indices (i, n) in the following way: The points x of H will have real coordinates $x_{i,n}$

$$x = (x_{i,n}) \qquad i \in I, n \in A$$

where i runs through the positive integers I and n runs through all integers A.

Definition. The transformation Λ

$$y = \Lambda x$$

of H onto itself is defined by the formulae

$$(1) \qquad \begin{cases} y_{i,n} = 2x_{i,n+1}, & i \in I, n \geqq 0 \\ y_{i,n} = \frac{1}{2} x_{i,n+1}, & i \in I, n < 0 . \end{cases}$$

Λ is easily to be seen a *bounded linear autohomeomorphism* on H. The fact that every autohomeomorphism φ on M can be linearized by a bounded linear operator in Hilbert space, actually by Λ, so in a universal way, is expressed in the following theorem.

Theorem I. *The family of all pairs M, φ — where M is some separable metrizable space and φ indicates some autohomeomorphism of M — admits a*

***universal linearization in the pair H, Λ, where H is separable Hilbert space and Λ the bounded linear operator defined by* (1).**

Lemma 1. Suppose $k_{i,n}$ $(i \in I, n \in A)$ are non-negative reals for which

$$\sum_{i,n} k_{i,n}^2 < \infty .$$

Then the set $Z = \{z\}$ of all vectors $z = (z_{i,n})$ for which

$$0 \leqq z_{i,n} \leqq k_{i,n} ,$$

is a compact subset of H.

The proof follows in a way similar to the proof of the compactness of the fundamental cube.

Proof of Theorem I. Using a theorem of Urysohn we can think of M as being imbedded topologically in the fundamental cube of the sub-Hilbert space H' of H, where H' is defined as the set of all points x of H for which

$$x_{i,n} = 0, \quad \text{if} \quad n \neq 0 . \tag{2}$$

So every point $x \in M$ satisfies the relations (2) and

$$0 \leqq x_{i,0} \leqq \frac{1}{i} : \tag{3}$$

Now we define a map $\mu : M \to M^* \subset H$ by

$$\mu x = x^* = (x^*_{i,n})$$

with

$$x^*_{i,n} = 2^{-|n|} (\varphi^n x)_{i,0} \qquad i \in I, n \in A . \tag{4}$$

We observe the following facts

(i) One can easily find numbers $k_{i,n}$ (satisfying the proposition above) such that

$$0 \leqq x^*_{i,n} \leqq k_{i,n} .$$

This proves that $\mu M = M^* = \{x^*\}$ is a subset of H and that its closure $\overline{M}^*$ in H is compact.

(ii) μ is one to one. Indeed μ^{-1} is apparently a projection, obtained by setting all coordinates $x^*_{i,n}$ $(n \neq 0)$ of a point x^* equal to zero.

(iii) μ^{-1} is continuous since it is an orthogonal projection. μ is continuous too, since φ is continuous, so if the sequence x^j converges to x in M, the coordinates $x^{*j}_{i,n}$ (fixed i, n) of x^{*j} tend to $x^*_{i,n}$, so x^{*j} tends to x^*, since coordinate-wise convergents implies convergence in the compact subset $\overline{M}^*$ of H.

This proves that μ is a homeomorphism of M onto M^*. So M^*, φ^* with $\varphi^* = \mu \varphi \mu^{-1}$ is equivalent to the given pair M, φ.

The action of φ^* on M^* is apparently determined by the following transformation

$$y^* = \varphi^* x^*$$

with

$$y^*_{i,n} = 2^{-|n|} (\varphi^{n+1} x)_{i,0} .$$

So

$$y^*_{i,n} = 2x^*_{i,n+1}, \qquad \text{if} \quad n \geq 0,$$

$$y^*_{i,n} = \frac{1}{2} x^*_{i,n+1}, \qquad \text{if} \quad n < 0.$$

Hence φ^* is equal to Λ restricted to M^*, which had to be proven.

Remarks. (1) Theorem I can be restated in terms of extension of the homeomorphism φ. In particular φ^* can be extended topologically over the compact closure $\overline{M}^*$ of M^*.

(2) MORRIS KLINE, Representation of homeomorphisms in Hilbert space, Bull. Am. Math. Soc. 45, 138–140 (1939) states a theorem which has some similarity with theorem I, although it is essentially weaker. However, the proof given is incorrect[1]).

(3) One might ask, whether there exists a *unitary* operator linearizing φ. However, this operator would be an isometry and it is known that this is generally impossible if φ has infinite order. In fact in the most simple, nontrivial case of a compact space M which consists of a sequence of points converging to a limit point, one can easily define an autohomeomorphism φ which cannot be isometrized.

In the next section we need a special case of the following theorem.

Theorem II. *If M is a finite-dimensional, separable metrizable space and if Γ is a finite group of autohomeomorphisms of M onto M, then M, Γ admits an orthogonal linearization E^*, Γ^* where E^* is a Euclidean space of suitable dimension and Γ^* is a group isomorphic to Γ and operating as a group of orthogonal transformations on E^*.*

MOSTOW [6] proves a much stronger theorem, replacing Γ by a compact Lie group with "only a finite number of inequivalent orbits in M". However the special case expressed in theorem II admits a very simple proof — which might be well known, although we have no specific reference — and moreover indicates exactly the amount in which our main theorem, theorem III in Section 3 intersects with Mostow's result.

Proof. Let $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ where γ_1 is the identity element. M can be embedded topologically in (a bounded subset of) some Euclidean space E. Let E^* be the topological product of n copies of E. If x is the vector representing a point $x \in M$ in E, then the map

$$\mu : M \to M^* \subset E^*$$

is defined (in vector notation) by

$$\mu x = x^* = (\gamma_1 x, \gamma_2 x, \ldots, \gamma_n x) \in E^*.$$

Observe $\gamma_1 x = x$.

μ is easily to be seen a homeomorphism, so the pair M^*, Γ' with $\Gamma' = \mu \Gamma \mu^{-1}$ is equivalent to M, Γ. The action of $\gamma_i^* \in \Gamma'$ on M^* is given by the formula

$$\gamma_i^*(\gamma_1 x, \ldots, \gamma_n x) = (\gamma_1 \gamma_i x, \ldots, \gamma_n \gamma_i x).$$

1) The claim of existence of an "irreducible base" in a topological space is wrong, except in a few trivial cases.

So γ_i^* is induced by a fixed permutation of the factors E whose product is E^*. Using the fact that the right regular permutation group of a group is isomorphic to the group itself (Cayley's theorem), these permutations form a group isomorphic to Γ', whence to Γ. Since, clearly every such "permutation" induces an orthogonal map of E^* on E^*, the entire group Γ' admits a natural extension over E^* as a group of orthogonal transformations. This extension is the Γ^* of the theorem.

Section 2. Homeomorphisms of finite order

Theorem III. *The family of pairs M, φ, where M is an n-dimensional, separable, metrizable space and φ is an autohomeomorphism of prime order p, admits an (n, p)-universal, orthogonal linearization E^s, Φ, where E^s denotes s-dimensional Euclidean space with*

$$s = \begin{cases} 3n+2 & \text{if} \quad p = 2 \text{ or if } n \text{ is odd}, \\ 3n+3 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

Addenda. Note that the pair E^s, Φ depends only on the pair of integers (n, p); the embedding of M in E^s will, however, depend on M and on φ. The map Φ can be described as follows. If $p = 2$, Φ is induced by a reflection in $n + 1$ coordinates of a suitable orthogonal coordinate system in E^s and is constant in the remaining $2n + 1$ coordinates. If $p \neq 2$ and if n is odd (respectively, n even), then Φ is induced by rotations of order p around the origin in $\frac{1}{2}(n+1)$ $\left(\text{respectively, } \frac{1}{2}(n+2)\right)$ mutually orthogonal, 2-dimensional subspaces and is constant on the complementary $(2n + 1)$-dimensional subspace. Observe that it follows from this theorem that linearization in E^{3n+3} is always possible and that the dimension $3n + 3$ is *independent of the prime order p*.

In Section 4 it will be proved that the number s is, in general, the best possible. However, in many special cases, it is possible to improve on the number s. This fact is expressed in Theorem IV, below.

We break up the proof of Theorem III into several lemmas and another theorem. It is understood throughout this section that M stands for an n-dimensional, separable, metrizable space and φ for an autohomeomorphism of finite order k on M.

A *φ-orbit* in M is a subset of the form $\{\varphi^j x \mid j = 1, 2, \ldots, k\}$ $(x \in M)$. The *orbit space* Q of M, φ is the set of φ-orbits, together with the quotient topology. The quotient map $\omega : M \to Q$ is called the *orbit projection*.

Remark. If B is a subset of M, then $\omega^{-1}\omega[B] = B \cup \varphi[B] \cup \cdots \cup \varphi^{k-1}[B]$. Since φ is a homeomorphism, $\omega^{-1}\omega[B]$, whence $\omega[B]$ is open (closed) whenever B is open (closed). Thus the map ω is both open and closed.

Lemma 2. *The orbit space Q of M, φ is separable, metrizable and has dimension n.*

Proof. Suppose k is a prime number. It is routine to verify that Q is separable and metrizable. Let $m \in M$ be a point not fixed under φ. Then there

exists a suitably small closed neighborhood U of m such that $U, \varphi U, \ldots, \varphi^{k-1} U$ are mutually disjoint. This means that ω is a homeomorphism on U, whence $\dim \omega U = \dim U \leqq n$. Note that ωU is closed in Q. The subset A of φ-invariant points of M is mapped homeomorphically by ω. Again, A is closed and $\dim \omega A \leqq n$. Since Q is separable, metrizable, we may write Q as the union of ωA and a countable number of sets of the form ωU. From the Sum Theorem of dimension theory it follows that $\dim Q \leqq n$. On the other hand, if $\dim Q$ were less than n, then ωA and each ωU would have dimension less than n. Thus A and each U would have dimension less than n. Then the Sum Theorem would lead to the contradiction: $\dim M < n$. The case in which k is composite can be reduced, by iteration, to this case.

Definitions. Let a pair M, φ be given. A map

$$\tau : M \to M_\tau$$

is called a *tracer projection*, and the space M_τ is called a *tracer space*, if there exists an autohomeomorphism φ_τ, the *tracer map*, of M_τ such that

$$\tau \varphi = \varphi_\tau \tau$$

and such that τ is one-to-one on each φ-orbit of M. In this case we call M_τ, φ_τ a *tracer (pair)* of M, φ under the tracer projection τ. Examples of tracers we shall encounter:

(i) Let φ be an orthogonal transformation of some Euclidean space E. Then φ is one-to-one and maps the unit sphere S onto itself. If M is some subset of E which does not contain the origin and which is mapped onto itself by φ, then the central projection τ (from the origin) of M into S is a tracer projection with tracer space $M_\tau = \tau[M]$ and tracer map $\varphi_\tau = \varphi \mid M_\tau$.

(ii) Let φ and φ' be rotations of prime period p on the linear spaces E and E', respectively. Let K be the subspace of φ-invariant points in E, and let $M \subset E \times E'$ be some subset which is mapped onto itself by the map $\varphi \times \varphi'$. Note that the orbits in M under $(\varphi \times \varphi' | M)$ are of just two types: those consisting of p points and those consisting of a single point. The natural projection $\Lambda : E \times E' \to E$ defines a tracer projection of M, $(\varphi \times \varphi' | M)$ if and only if no orbit of p points is mapped by Λ into K. The tracer in this case is $\Lambda[M]$, $(\varphi | \Lambda[M])$.

The fact that, in many cases, the pair M, φ is determined by its orbit space and some tracer pair is expressed in the following lemma.

Lemma 3. *Let M, φ and some tracer M_τ, φ_τ be given. Then the map*

$$\lambda : M \to M_\tau \times Q$$

given by $\lambda(x) = (\tau x, \omega x)$ $(x \in M)$ is an imbedding and the map φ^* of $M^* = \lambda[M]$ on itself, given by $\varphi^*(\tau x, \omega x) = (\tau \varphi x, \omega x)$ $(x \in M)$ is an autohomeomorphism. Thus λ is a topological equivalence between M, φ and M^*, φ^*.

Proof. λ is one-to-one, since if $x_1 \neq x_2$ and $\tau x_1 = \tau x_2$, then x_1 and x_2 must belong to different φ-orbits, whence $\omega x_1 \neq \omega x_2$. The function λ is continuous, since both τ and ω are continuous. The fact that λ^{-1} is continuous may be

deduced from the fact that ω is closed and τ 1 − 1 on each orbit. The rest of the conclusion follows from the observation that $\varphi^* = \lambda \varphi \lambda^{-1}$.

According to Theorem II, every tracer M_τ, φ_τ admits an orthogonal linearization E_τ, Φ_τ.

Definition. The *rank* of M, φ, *rank* (M, φ), is the least integer r for which there exists a tracer M_τ, φ_τ and a pair E_τ, Φ_τ (linearizing the tracer) such that $\dim E_\tau = r$.

Definition. $emb(M, \varphi)$ is the least integer l such that the orbit space Q of M, φ can be topologically imbedded in Euclidean l-space.

Theorem IV. *If M is a finite dimensional, separable metrizable space and if φ is an autohomeomorphism of finite order on M, then M, φ admits an orthogonal linearization E, Φ, where*

$$\dim E = \operatorname{rank}(M, \varphi) + \operatorname{emb}(M, \varphi) .$$

Proof. There exists a tracer pair M_τ, φ_τ such that linearization of this pair in some pair E_1, Φ_1 with $\dim E_1 = \operatorname{rank}(M, \varphi)$ is possible. On the other hand, the orbit space Q admits an imbedding in a linear space E_2 with $\dim E_2 := \operatorname{emb}(M, \varphi)$. The construction of Lemma 3 now produces an imbedding $\lambda : M \to E_1 \times E_2$, and hence the desired linearization.

We shall make use of the following classical result.

Lemma 4. *If Φ is an orthogonal map on a Euclidean space E, then, in a suitable orthogonal coordinate system, Φ is induced (in a unique way) by a rotation around the origin in a number of coordinate planes, by a reflection at the origin in at most one of the remaining coordinate axes, and by the identity on the other coordinate axes.*

Proofs of the following two lemmas may be found in [5, pp. 78—80].

Lemma 5. *Let γ be a map of some separable, metrizable space X into the n-dimensional sphere S^n. A point $y \in \gamma(X)$ is unstable under γ if and only if, for every neighborhood U of y, there exists a mapping χ of X in S^n satisfying*

$$\chi(x) = \gamma(x) \quad \text{if} \quad \gamma(x) \notin U ,$$

$$\chi(x) \in U \quad \text{if} \quad \gamma(x) \in U ,$$

$$y \notin \chi(X) .$$

Lemma 6. *Let γ be a mapping of a space of dimension less than m into a space containing an open subset U homeomorphic to E^m. Then every value of γ in U is unstable.*

Proof of Theorem III. Applying Lemma 2, we observe that $\operatorname{emb}(M, \varphi) \leq 2n + 1$, since $\dim M = \dim Q = n$. According to Theorem IV, we only have to prove that the rank of M, φ is at most $n + 1$, if $p = 2$ or if n is odd, and that it is at most $n + 2$, otherwise. So, it suffices to construct a tracer M_τ^*, φ_τ^* which is linearized in the appropriate dimension.

We *first* discuss the case in which φ has *no fixed points* and $p \neq 2$. It follows from Theorem II that we can linearize M, φ by a Euclidean, orthogonal

linearization E, Φ. Applying Lemma 4, we project the imbedded M orthogonally into the subspace E' spanned by those coordinate axes of E which are not pointwise fixed under Φ.

Note that since Φ has prime period, the reflection is missing. Thus the dimension of E' is even. The image of M will not contain the origin. Project this image centrally from the origin into the unit sphere S in E'. If τ is taken to be the product of the imbedding of M in E with the two projections, then $M_\tau = \tau[M]$ is a tracer space and $\varphi_\tau = \Phi | M_\tau$ is a tracer map. Now suppose

$$\dim S \geq n + 2 \,. \tag{1}$$

Using Lemmas 5 and 6, we shall prove that, in this case, we can "free" a great circle C on S from M_τ, i.e., we shall determine another tracer for which the tracer space has empty intersection with C, where C is the intersection of S with some coordinate plane of E'. Let $t \to \Phi_t$ $(0 \leq t \leq 1)$ be a parametrization of the geodesic arc, in the group of orthogonal transformations of S, from the identity Φ_0 to $\Phi = \Phi_1$. Pick a point $c \in C$ and a "small" disc D contained in S. The disc is to be of dimension one less than the dimension of S, its center is to be c, and it is to be orthogonal to C. As t ranges from 0 to 1, the moving disc $\Phi_t[D]$ sweeps out a cell T, part of whose boundary is $D \cup \Phi[D]$. The union of the cells $T, \Phi[T], \ldots, \Phi^{p-1}[T]$ is a neighborhood of C in S, while the intersection of any two of these cells is either empty or is a translated disc $\Phi^i D$, provided D is chosen small enough. From (1) and Lemma 6, it follows that τ is unstable at some interior point y of T. Applying Lemma 5, with U being the interior of T and with $\gamma = \tau$, we obtain a map χ which frees the point y. Let ϱ be a retraction of $T \setminus \{y\}$ onto the boundary of T. The maps $\Phi^i \varrho \Phi^{-i}$ $(i = 1, \ldots, p-1)$ will then be similar retractions of $\Phi^i[T] \setminus \{\Phi^i y\}$. We use these retractions to create a new map τ' on M, as follows. If $\tau(x)$ is in $\Phi^i T$ $(x \in M, i = 0, 1, \ldots, p-1)$, set $\tau(x) = \Phi^i \varrho \chi \Phi^{-i}(x)$; elsewhere, leave $\tau'(x) = \tau(x)$. Then $\tau' : M \to M_{\tau'} \subset S$ is a tracer projection such that $M_{\tau'} \cap C$ consists of, at most, the points $c, \Phi c, \ldots, \Phi^{p-1} c$. We must still free these points. From (1), it follows that $\dim D > \dim M$. Therefore, using Lemmas 5 and 6, we can change τ' on a small neighborhood of c and free c. When the corresponding changes are made at $\Phi c, \ldots, \Phi^{p-1} c$, we obtain a tracer projection τ'' with tracer space $M_{\tau''} = \tau''[M]$ and tracer map $\varphi_{\tau''} = \Phi | M_{\tau''}$. The next step is to project $M_{\tau''}$ into a Euclidean subspace E'' of E' by setting the coordinates of the plane in which C is located equal to zero. The image of $M_{\tau''}$ does not contain the origin, so we can project this image centrally into the unit sphere $S' \subset E''$. As before, this gives us a new tracer whose tracer space is contained in a sphere S' of dimension two less than that of S. As long as the condition (1) is satisfied, with S replaced by S', we can repeat the process. So, ultimately, we find a tracer M_{τ^*}, $\varphi_{\tau^*} = \Phi | M_{\tau^*}$ with $M_{\tau^*} \subset S^*$ and

$$\dim S^* = n \quad \text{or} \quad n + 1 \,.$$

The dimension of the corresponding Euclidean space $E^* \supset S^*$ is $n + 1$ or $n + 2$.

Since the dimension of E', whence the dimension of E^*, is even, we have,

$$\dim E^* = \begin{cases} n+1 & \text{if } n \text{ is odd} \\ n+2 & \text{if } n \text{ is even}. \end{cases}$$

This means that the tracer M, φ has the required rank.

Secondly, suppose $p = 2$ and φ has no fixed points. In this case, we have reflections on all of those axes which are not pointwise fixed. We carry out a process very much like that of the first case, save that since the rotations of the previous case are replaced by reflections, we need free only the two points in which an axis intersects the sphere S. Thus our reduction is one dimension at a time, and terminates when $\dim E^* = n + 1$.

Thirdly, suppose φ has a nonempty fixed-point set $F \subset M$. If $x \in M$, let $\varrho(x)$ be the distance from x to F in some fixed metric on M. Put

$$\nu(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \varrho(\varphi^i x).$$

Note that ν is continuous $\nu(x) = \nu(\varphi x)$ and, since F is closed, ν is positive on $N = M \setminus F$. Using the appropriate one of the first two constructions, we obtain a tracer projection

$$\sigma^* : N \to N_{\sigma^*} \subset S^* \subset E^*$$

for the pair N, $\varphi | N$ such that $\dim E^* = n + 1$ or $n + 2$, as required. The desired tracer projection τ^* is now obtained by mapping F into the origin of E^* and by setting $\tau^*(x)$ equal to the product of the scalar $\nu(x)$ with the vector $\sigma^*(x)$ when $x \in N$.

Section 3. The Lefschetz invariant of a map

Let F be a field, X a finitely triangulable space and $f : X \to X$ a map. If n is an integer, then the homology group $H_n(X; F)$ is a finite-dimensional vector space over F and $f_* : H_n(X; F) \to H_n(X; F)$ is an endomorphism of this vector space. Let t_n be the trace of this endomorphism. The alternating sum

$$L(f; F) = \sum (-1)^n t_n$$

is a homotopy invariant of f, and is called the *Lefschetz invariant* of f.

Theorem V. *Let X be a triangulable space, let λ be an autohomeomorphism of prime period p on X, and let J_p be the field of integers modulo p. Suppose that λ has no fixed points and that it is simplicial relative to some triangulation T on X. If $f : X \to X$ is a map such that $f\lambda = \lambda f$, then $L(f; J_p) = 0$.*

Proof. If $x \in X$ is a fixed point of f, then $f\lambda^i x = \lambda^i f x = \lambda^i x$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$. Thus the fixed points, and, in particular, the fixed vertices, occur in multiples of p. The higher dimensional simplexes act in a similar way. Thus the Lefschetz invariant is a multiple of p. We express this formally as follows.

We may assume the triangulation T so fine that no simplex intersects its λ-translates. The Simplicial Approximation Theorem insures the existence of a triangulation T' of X, obtained from T by barycentric subdivisions, and of a

map g homotopic to f such that g is simplicial relative to T'. Observe that λ is simplicial relative to T' and that $f_* = g_*$ on $H_*(X; J_k)$. Let π denote the natural equivalence from the chains of T to those of T'. If σ is a simplex of T' (and we shall also use σ to denote the corresponding chain) let $a(\sigma)$ be the coefficient of σ in the chain $g\pi(\sigma)$. An easy modification of the corresponding work in [8, § 16] yields a proof of the fact that

$$L(g; J_p) = \sum \{(-1)^j a(\sigma) \mid j = 0, 1, \ldots, \sigma \text{ a } j\text{-simplex of } T'\} .$$

Let R_j be a set consisting of exactly one j-simplex of T' from each λ-equivalence class. If $\sigma \in R_j$, then $g\pi\lambda^i\sigma = \lambda^i g\pi\sigma$ $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$. Thus $a(\lambda^i\sigma) = a(\sigma)$. From this it follows that

$$L(g; J_p) = \sum \{(-1)^j pa(\sigma) | \sigma \in R_j, j = 0, 1, \ldots\} = 0 .$$

Thus $L(f; J_p) = L(g; J_p) = 0$.

Section 4. The minimality of the imbedding dimension

In this section we shall describe, for each non-negative integer n and each prime p, a space $X_{n,p}$ and an autohomeomorphism $\varphi_{n,p}$ such that $X_{n,p}$, $\varphi_{n,p}$ cannot be linearized in dimension $s - 1$, where $s = 3n + 2$ if $p = 2$ or if n is odd and $s = 3n + 3$ otherwise.

Let a non-negative integer r and a prime $p > 2$ be given. Let C^r denote a complex r-dimensional vector space and let $\xi \neq 1$ be a pth root of unity. The transformation sending $z \in C^r$ into ξz is an isometry leaving the origin fixed, and thus induces an autohomeomorphism λ of period p on the unit sphere S^{2r-1} in C^r. Let B_r be the open unit ball

$$B_r = \{z | z \in C^r, \|z\| < 1\} ,$$

let $\overline{B}_r$ be its closure and let J_p be the discrete topological group of integers modulo p. Define the function

$$\alpha : \overline{B}_r \times J_k \to S^{2r-1} \cup (B_r \times J_k)$$

by

$$\alpha(z, i) = \begin{cases} z & \text{if } z \in S^{2r-1}, i \in J_p \\ (z, i) & \text{if } z \in B_r, i \in J_p . \end{cases}$$

Let $K_{r,p}$ be the topological space whose underlying pointset is $S^{2r-1} \cap (B_r \times J_p)$ and whose topology is the quotient topology under α. Note that $K_{r,p}$ has a finite, $2r$-dimensional, cell-decomposition. Let $\nu = \nu_{r,p}: K_{r,p} \to K_{r,p}$ be the map induced by $(z, i) \to (\xi z, i + 1)$ $(z \in \overline{B}_r, i \in J_p)$. It is immediate that ν is an autohomeomorphism of period p, and that it has no fixed points.

If n is a positive integer, let A_n be the n-skeleton of a $(2n + 2)$-simplex. We may assume A_n disjoint from S^{2r-1} and $K_{r,p}$, for all r, p. Define the spaces $X_{n,p}$ as follows

$$X_{n,p} = \begin{cases} A_n \cup S^n & \text{if } p = 2 \\ A_n \cup S^{2r-1} & \text{if } n = 2r - 1 \text{ is odd, } p \text{ an odd prime} \\ A_n \cup K_{r,p} & \text{if } n = 2r \text{ is even, } p \text{ an odd prime} . \end{cases}$$

Define the autohomeomorphisms $\varphi_{n,p}$ of period p on $X_{n,k}$ by setting

$$\varphi_{n,2}(x)=\begin{cases} x & \text{if } x\in A_n \\ -x & \text{if } x\in S_n \end{cases}$$

while, for p a prime larger than 2,

$$\varphi_{n,p}(x)=\begin{cases} x & \text{if } x\in A_n \\ \lambda x & \text{if } n=2r-1,\ x\in S^{2r-1} \\ x & \text{if } n=2r,\ x\in K_{r,p}\,. \end{cases}$$

Lemma 7. *Let S^n be the unit sphere in E^{n+1} and let h be an orthogonal transformation of finite period p on E^{n+1}. Then S^n has a triangulation such that $h\,|\,S^n$ is simplicial.*

Proof. Let σ be an $(n+1)$-simplex in E^{n+1} whose interior contains the origin 0. If A is any subset of $E^{n+1}-0$, let

$$KA=\{ta\,|\,t>0,\ a\in A\}$$

be the cone generated by A. If $\sigma_0,\ldots,\sigma_{p-1}$ are interiors of proper faces of σ, the set

$$(K\sigma_0)\cap(Kh[\sigma_1])\cap\cdots\cap(Kh^{p-1}[\sigma_{p-1}])$$

is a convex, rectilinear subset of E^{n+1}. Let J be the family of such subsets. The following are easily verified: $\bigcup J=E^{n+1}-0$; h permutes the members of J; if two members of J have a point in common, they are the same. The sets $T\cap S^n\ (T\in J)$ give rise to a cellular decomposition of the type described by POINCARÉ [7, pp. 337–343]. The first regular subdivision of such a decomposition is defined and is simplicial. The construction of this subdivision involves choosing interior points in each of the cells. If these interior points are so chosen that they are permuted by h, then h will be simplicial in the resulting subdividion.

Theorem VI. *If n is a non-negative integer and if p is prime, then $X_{n,p}$, $\varphi_{n,p}$ cannot be linearized in dimension less than s, where*

$$s=\begin{cases} 3n+2 & \text{if } p=2 \text{ or if } n \text{ is odd}\,, \\ 3n+3 & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

Proof. Let $\zeta: X_{n,p}\to E^t$ be an imbedding, and let η be a linear transformation on E^t such that $\zeta\varphi=\eta\zeta\ (\varphi=\varphi_{n,p})$. Let U be the linear subspace of E^t consisting of η-invariant points. Since φ is the identity on A_n, the image set $\zeta[A_n]$ lies in U. It follows from a theorem of FLORES [3] that $\dim U \geqq 2n+1$. Let V be the null space of η, and set $W=E^t/(U+V)$. If $\bar\eta$ is the automorphism on W induced by η and if $g: X_{n,p}\to W$ is the composite of ζ with the natural projection $E^t\to W$, then $g\varphi=\bar\eta g$. But then $g[X_{n,p}]$ is contained in the subspace E^u of points in W which are invariant under $\bar\eta^p$. It suffices to show $u\geqq s-2n-1$. We shall now regard $\bar\eta$ as an automorphism of E^u and g as a map from $X_{n,p}$ into E^u. Then,

(1) $\bar\eta$ is an automorphism of period p,

(2) the origin 0 is the only $\bar\eta$-invariant point of E^u,

(3) $g\varphi=\bar\eta g$.

Observe that $gx = 0$ if and only if $x \in A_n$, for no point of $\zeta[X_{n,p} - A_n]$ can lie in $U + V$. At this point the argument breaks naturally into three parts.

The case $p = 2$.

Since $\bar{\eta}$ is a linear transformation of period two, $v + \bar{\eta}v$ is a fixed point for each $v \in E^u$. Since 0 is the only fixed point of E^u under $\bar{\eta}$, $\bar{\eta}v = -v$. Thus the map which sends $x \in S^n$ into $\|gx\|^{-1} \cdot gx \in S^{u-1}$ is a map such that pairs of antipodal points are carried into pairs of antipodal points. From [1, p. 483] it follows that $u - 1 \geqq n$. Since $s = 3n + 2$ when $p = 2$, this case is now settled.

In the remaining two cases, we have $p > 2$, and the argument depends upon whether n is even or odd. The conditions (1) and (2), together with the fact that $p > 2$ imply that u is even (see Lemma 4). In both cases we shall use $2m$ to denote the smallest even integer larger than n, so that $s = 2n + 1 + 2m$.

The case n odd, $p > 2$.

Here, we have $n = 2m - 1$ and $X_{n,p} = A^n \cup S^n$. We shall assume $u < 2m$, whence $u \leqq 2m - 2$, and derive a contradiction. Let S^{u-1} be the unit sphere in E^u. Since $x \to \|\bar{\eta}x\|^{-1} \cdot \bar{\eta}n$ is an autohomeomorphism of period p on S^{u-1}, there exists a map $h : S^{u-1} \to E^u$ $(= C^{1/2u})$ such that

$$h(\|\bar{\eta}x\|^{-1} \cdot \eta x) = \xi \cdot hx$$

and

$$hx \neq \xi \cdot hx$$

when $x \in S^{u-1}$ and $\xi \neq 1$ is a given *pth* root of unity (see Lemma 5). Let

$$f_1(x) = \|h(\|gx\|^{-1} \cdot gx)\|^{-1} \cdot h(\|gx\|^{-1} \cdot gx)$$

when $x \in S^n$. Then $f_1 : S^n \to S^{s-1}$ satisfies

$$\begin{aligned} f_1\varphi x &= \|h(\|g\varphi x\|^{-1} \cdot g\varphi x)\|^{-1} \cdot h(\|g\varphi x\|^{-1} \cdot g\varphi x) \\ &= \|\xi h(\|gx\|^{-1} \cdot gx)\|^{-1} \cdot \xi h(\|gx\|^{-1} \cdot gx) \\ &= \xi f_1 x \end{aligned}$$

for $x \in S^n$. Let

$$f_2 : E^u(= C^{1/2u}) \to E^{n+1}(= C^{1/2(n+1)})$$

be defined by

$$f_2(z_1, \ldots, z_{1/2u}) = (z_1, \ldots, z_{1/2u}, 0, \ldots, 0) \qquad (z_1, \ldots z_{1/2u} \in C)\,.$$

Let $f = f_2 f_1 : S^n \to S^n$. Then $f[S^n] \neq S^n$, whence f is inessential and $L(f; J_k) \neq 0$. But $\lambda = \varphi | S^n = \xi | S^n$, from which it follows that $\lambda f = f\lambda$ and $L(f; J_k) = 0$. This contradiction establishes the desired inequality $s \geqq 2m$.

The case n even, $k < 2$.

If n is even, then $n = 2m - 2$ and $X_{n,p} = A_n \cup K_{m-1,p}$. Since $K_{m-1,p}$ has no φ-invariant points, let us regard g as a map of the form

$$g : K_{m-1,k} \to E^u - 0\,.$$

Note that the $(n-1)$-skeleton of $K_{m-1,p}$ is a sphere S^{n-1} and that φ carries this sphere onto itself. Thus the arguments used in the odd-dimensional case show $u \geqq n$. Let us suppose $u = n$. The earlier arguments again yield a map $f_1 : S^{n-1} \to S^{n-1}$ such that

$$f_1\lambda = f_1\varphi = \xi f_1 = \lambda f_1\,.$$

Thus $L(f_1; J_k) = 0$, and f_1 is essential. But $(g \mid S^{n-1}) : \dot{S}^{n-1} \to E^n - 0$ is a factor of f_1, hence essential. This contradicts the fact that g may be extended over the n-cells of $K_{m-1,p}$. Thus $u > n$. Since u is even, $u \geqq n + 2 = 2m$.

References

[1] Alexandroff, P., u. H. Hopf: Topologie I. Berlin: Springer 1935.

[2] Copeland, A. H. jr., and J. de Groot: Linearization of autohomeomorphisms. Notices Am. Math. Soc. 6, 844 (1959).

[3] Flores, A.: Über n-dimensionale Komplexe, die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind. Ergebnisse eines math. Kolloq. 6, 4—7 (1933/34).

[4] Groot, J. de: Every continuous mapping is linear. Notices Am. Math. Soc. 6, 754 (1959).

[5] Hurewicz, W., and H. Wallman: Dimension Theory. Princeton 1941.

[6] Mostow, G. D.: Equivariant embeddings in Euclidean space. Ann. Math. 65, 432—446 (1957).

[7] Poincaré, H.: Complément à l'analysis situs. Rend. Circ. Math., Palermo 13, 285—343 (1899).

[8] Pontryagin, L. S.: Foundations of Combinatorial Topology. Rochester: Graylock 1952.

(Received November 7, 1960)

DIRAC, G. A.
Math. Annalen 144, 93—96 (1961)

A contraction theorem for abstract graphs

By

G. A. DIRAC in Hamburg

Introduction. This paper is primarily concerned with the four colour conjecture. *Graph* is taken to mean an abstract graph which may have multiple edges. Graphs are denoted by Greek capital letters, if Γ is a graph then $\mathscr{V}(\Gamma)$ denotes the set of its vertices. Vertices are denoted by l.c. latin letters. An edge which joins the vertices x and y is denoted by (x, y) and (y, x). A graph with ν vertices in which each pair of distinct vertices are joined by one edge is denoted by the symbol $\langle\nu\rangle$, and a graph obtained from a $\langle\nu\rangle$ through deleting one edge by $\langle\nu-\rangle$.

K. WAGNER showed that the four colour theorem is equivalent (!) to the following statement: *Every 5-chromatic graph is homomorphic to a* $\langle 5\rangle$ [1], and more recently that *every 5-chromatic graph is homomorphic to a* $\langle 5-\rangle$ [2]. The object of this paper is to give a short proof of a general condition for a graph to be homomorphic to a $\langle 5-\rangle$ and of the theorem that *if Γ is a 5-chromatic graph then either Γ is homomorphic to a $\langle 5\rangle$ or $(\forall x)\ [x \in \mathscr{V}(\Gamma) \Rightarrow \Gamma - x$ is homomorphic to a $\langle 5-\rangle]$*. The method used is different from the approach in [2], it utilises the concept of the degree of connectedness of a graph. All necessary definitions are given below:

Deletion. If $\Gamma' \subsetneq \Gamma$ then $\Gamma - \Gamma'$ denotes the graph obtained from Γ by deleting all vertices belonging to Γ' and all edges having at least one end-vertex belonging to Γ'.

Contraction. Homomorphism. The graph Γ can be *contracted* into the graph Δ if there exists a mapping Φ of $\mathscr{V}(\Gamma)$ onto $\mathscr{V}(\Delta)$ such that 1. $(\forall x)\ [x \in \mathscr{V}(\Delta) \Rightarrow$ $\Rightarrow \Gamma - (\Gamma - \Phi^{-1}(x))$ is connected], 2. $(\forall x, y)\ [x, y \in \mathscr{V}(\Delta)\ \&\ (x, y) \in \Delta\ .\Leftrightarrow.\ \Gamma$ contains at least one edge joining a vertex belonging to $\Phi^{-1}(x)$ to a vertex belonging to $\Phi^{-1}(y)]$[1]. The graph Γ is *homomorphic* to the graph Δ, in symbols $\Gamma \succ \Delta$, if Γ can be contracted into a graph of which Δ is a subgraph. Two obvious properties: (i). If $\Gamma \succ \Delta$ and if Γ can be drawn on the surface $\mathfrak{F}$ without crossing of edges, then so can Δ. (ii). If $\Gamma \succ \Delta$ and $\Delta \succ \Lambda$, then $\Gamma \succ \Lambda$.

[1]) *i.e.* $\Gamma = \Delta$, or Δ can be obtained from Γ by shrinking each of a set of connected subgraphs of Γ into a single vertex.

Colouring. A graph is *$\varkappa$-colourable* if its vertices can be partitioned into a set of at most $\varkappa$ mutually disjoint (colour) classes in such a way that no two distinct vertices belonging to the same class are joined by an edge. A graph is *$\varkappa$-chromatic*, or has *chromatic number* $\varkappa$, if it is $\varkappa$-colourable and is not $\varkappa'$-colourable if $\varkappa' < \varkappa$.

Degree of connectedness. The graph Γ is said to be *λ-fold connected* if $(\forall a, b)$ $[a, b \in \mathscr{V}(\Gamma)$ & $a \neq b .\Rightarrow.$ Γ contains a set of λ paths each of which have a and b as their end-vertices, and any two of which have only a and b in common]. If Γ is λ-fold connected and $\lambda' < \lambda$ then Γ is λ'-fold connected.

Theorem 1. *If Γ is a 3-fold connected graph without multiple edges and contains a vertex x such that $\Gamma - x$ is 3-fold connected, then Γ is homomorphic to a $\langle 5- \rangle$.*

The proof utilises the following

Definitions. A graph obtained from a $\langle \nu \rangle$ by the process of dividing edges into two through inserting new vertices is denoted by $\langle \nu U \rangle$, and a graph obtained from a $\langle \nu - \rangle$ by this process by $\langle \nu U - \rangle$. (Thus any path is a $\langle 2U \rangle$ and also a $\langle 3U- \rangle$ and a circuit is a $\langle 3U \rangle$.) For $\nu \geqq 4$ the ν vertices of degree $\nu - 1$ of a $\langle \nu \rangle$ or $\langle \nu U \rangle$ are called its *branch-vertices*. A path contained in a $\langle \nu \rangle$ or $\langle \nu U \rangle$ which has two branch-vertices as its end-vertices and passes through no other branch-vertex is called a *boundaryline* of the $\langle \nu \rangle$ or $\langle \nu U \rangle$. If Γ_1 and Γ_2 are two mutually disjoint graphs then a path is called a *$(\Gamma_1)(\Gamma_2)$-path* if one end-vertex belongs to Γ_1 and the other to Γ_2 and the path has nothing except its end-vertices in common with $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. The following simple facts are used in the proof of Theorem 1:

(1) *If Γ is a connected graph and Γ_1, Γ_2 are two non-empty mutually disjoint subgraphs of Γ, then Γ contains at least one $(\Gamma_1)(\Gamma_2)$-path.*

(2) *A $\langle \nu U \rangle$ is homomorphic to a $\langle \nu \rangle$ and a $\langle \nu U - \rangle$ is homomorphic to a $\langle \nu - \rangle$.*

(3) *If Λ is a $\langle 4 \rangle$ or a $\langle 4U \rangle$, x is a vertex which does not belong to Λ, and $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3$ are three $(x)(\Lambda)$-paths such that $\Upsilon_i \cap \Upsilon_j = x$ if $1 \leqq i < j \leqq 3$, and if the vertices $\Upsilon_1 \cap \Lambda$, $\Upsilon_2 \cap \Lambda$, $\Upsilon_3 \cap \Lambda$ do not all belong to the same boundaryline of Λ, then $\Lambda \cup \Upsilon_1 \cup \Upsilon_2 \cup \Upsilon_3$ can be contracted into a $\langle 5- \rangle$.*

Proof of Theorem 1. Let y_1 and y_2 denote two vertices of Γ which are joined by edges to x. Since $\Gamma - x$ is 3-fold connected, it contains at least one $\langle 4 \rangle$ or $\langle 4U \rangle$ which has y_1 and y_2 as branch vertices [3], let Λ denote such a $\langle 4 \rangle$ or $\langle 4U \rangle$, and let the other two branch vertices of Λ be y_3 and y_4. Let $\Upsilon_{ij} (= \Upsilon_{ji})$ denote the boundaryline of Λ joining y_i and y_j $(1 \leqq i, j \leqq 4, i \neq j)$.

$\Gamma - y_1 - y_2$ is connected because Γ is 3-fold connected, hence $\Gamma - y_1 - y_2$ contains at least one $(x)(\Lambda - y_1 - y_2)$-path. If $\Gamma - y_1 - y_2$ contains an $(x)(\Lambda - y_1 - y_2)$-path Υ such that $\Upsilon \cap \Lambda \notin \Upsilon_{12}$, then $\Lambda \cup x \cup (x, y_1) \cup \cup (x, y_2) \cup \gamma\ (\subseteq \Gamma)$ can be contracted into a $\langle 5- \rangle$ by **(3)**, and therefore Γ is homomorphic to a $\langle 5- \rangle$.

There remains the possibility that every (x) $(\Delta - y_1 - y_2)$-path contained in $\Gamma - y_1 - y_2$ has one end-vertex in $Y_{12} - y_1 - y_2$. Let it be assumed that this is the case. $\Gamma - x - y_1 - y_2$ then contains at least one $(Y_{12} - y_1 - y_2)$ $(\Delta - Y_{12})$-path because $Y_{12} - y_1 - y_2 \neq \theta$ and $\Gamma - x$ is 3-fold connected. Let Y' denote such a path and let $Y_{12} \cap Y'$ be denoted by z. Let the graph obtained from Γ by contracting the edge (x, y_1) into the vertex y_1 be denoted by Γ^*. Γ^* contains the edge (y_1, y_2). $Y_{13} \cup Y_{14} \cup Y_{23} \cup Y_{24} \cup Y_{34} \cup (y_1, y_2)$ is a $\langle 4\rangle$ or a $\langle 4U\rangle$ contained in Γ^*, let it be denoted by Δ^*. Γ^* contains three (z) (Δ^*) paths satisfying the conditions of **(3)**, namely Y', the part of Y_{12} connecting z with y_1, and the part of Y_{12} connecting z with y_2. Hence by **(3)** $\Gamma^* \succ a\langle 5-\rangle$, and therefore, since $\Gamma \succ \Gamma^*$, $\Gamma \succ a\langle 5-\rangle$. This proves Theorem 1.

Theorem 2. *If Γ is a graph with chromatic number $\geqq 5$, then either Γ is homomorphic to a $\langle 5\rangle$ or $(\forall x)$ $[x \in \mathscr{V}(\Gamma) \Rightarrow \Gamma - x$ is homomorphic to a $\langle 5-\rangle]$.*

Definition. A connected graph with finite chromatic number $\varkappa$ is called *contraction critical* if it is not homomorphic to any graph with fewer vertices and chromatic number $\varkappa$. (A $\langle\varkappa\rangle$, with $\varkappa$ finite, is contraction-critical.) Clearly *a finite $\varkappa$-chromatic graph is either contraction-critical or it is homomorphic to a contraction-critical $\varkappa$-chromatic graph*, because contracting a $\langle 2\rangle$ contained in a graph into a single vertex changes the chromatic number by at most 1.

Proof of Theorem 2. Every $\varkappa$-chromatic graph, $\varkappa$ finite, contains a finite $\varkappa$-chromatic subgraph. (Theorem of de Bruijn and Erdös [4].) It follows that Γ contains a finite 5-chromatic graph without loops and multiple edges, Δ say, as a subgraph; $\Delta = \Gamma$ possibly. To prove Theorem 2 it is obviously sufficient to show that Δ is homomorphic to a $\langle 5\rangle$ or else $(\forall x)$ $[x \in \mathscr{V}(\Delta) \Rightarrow \Delta - x$ is homomorphic to a $\langle 5-\rangle]$. If $\Delta \succ a\langle 5\rangle$ then $\Gamma \succ a\langle 5\rangle$. If $\Delta \not\succ a\langle 5\rangle$ then either Δ is contraction-critical or Δ is homomorphic to a contraction-critical 5-chromatic graph which is not a $\langle 5\rangle$; suppose that $\Delta \succ \Delta^*$, where Δ^* is 5-chromatic and contraction-critical and has no multiple edges, $\Delta^* = \Delta$ possibly. Let x^* denote the vertex of Δ^* onto which x is mapped, $x^* = x$ possibly. Then $\Delta - x \succ \Delta^* - x^*$.

Every connected contraction-critical graph with finite chromatic number $\geqq 5$ which has more than 5 vertices is 5-fold connected [5], hence Δ^* is 5-fold connected. Therefore $\Delta^* - x^*$ is 4-fold connected, hence if any vertex is deleted from $\Delta^* - x^*$ the remaining graph is 3-fold connected. Therefore by Theorem 1 $\Delta^* - x^* \succ a\langle 5-\rangle$, hence $\Delta - x \succ a\langle 5-\rangle$, consequently $\Gamma - x \succ a\langle 5-\rangle$. This proves Theorem 2.

There exist connected 4-chromatic graphs which are not homomorphic to any graph without loops and multiple edges of which a $\langle 4\rangle$ is a proper subgraph, a graph consisting of a circuit with an odd number of vertices together with a vertex not belonging to the circuit and joined by an edge to each vertex of the circuit is an example.

References

[1] Wagner, K.: Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. Math. Ann. 114, 570—590 (1937), footnote 14.

[2] Wagner, K.: Bemerkungen zu Hadwigers Vermutung. Math. Ann. 141, 433—451 (1960), p. 451.

[3] Dirac, G. A.: In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen. Math. Nachr. 22, 61—85 (1961), Satz 8.

[4] de Bruijn, N. G., and P. Erdös: A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. Proc. K. Nederl. Akad. Wetensch. Amsterdam ser. A 54, 371—373 (1951).

[5] Dirac, G. A.: Trennende Knotenpunktmengen und Reduzibilität abstrakter Graphen mit Anwendung auf das Vierfarbenproblem. J. reine angew. Math. 204, 116—131 (1960), Reduzierungssatz.

(Received January 18, 1961)

Körner, O.
Math. Annalen 144, 97—109 (1961)

Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper

Von
Otto Körner in Marburg

Diese Arbeit ist als Ergänzung zu meiner Arbeit [2] gedacht. Es sollen Konsequenzen und Verschärfungen von Ergebnissen aus [2] diskutiert werden.

Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade n über dem Körper der rationalen Zahlen und befinde sich unter den n zueinander konjugierten Körpern $K^{(1)}, \ldots, K^{(n)}$, wobei $n = n_1 + 2n_2$, $K^{(l)}$ reell für $l = 1, \ldots, n_1$ und $K^{(l)}$, $K^{(l+n_2)}$ konjugiert komplex zueinander für $l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$ seien. Es bezeichne D die Diskriminante, H die Klassenzahl, R den Regulator und w die Anzahl der Einheitswurzeln von K. Für eine Zahl γ aus K bedeute $\gamma^{(l)}$ die zu ihr konjugierte in $K^{(l)}$ $(l = 1, \ldots, n)$, und $\varphi(\mathfrak{a})$ bzw. $\mu(\mathfrak{a})$ sei die Eulersche bzw. die Möbiussche Funktion für ganze Ideale $\mathfrak{a} \neq (0)$ in K. Mit beliebigen reellen Zahlen v_{ml} $(m = 1, \ldots, r; l = 1, \ldots, n_1 + n_2)$ und beliebigen ganzrationalen Zahlen w_{ml} $(m = 1, \ldots, r; l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2)$ definieren wir für alle Körperzahlen $\gamma \neq 0$ folgende r (r natürliche Zahl) Ausdrücke:

$$\Lambda_m(\gamma) = \prod_{l=1}^{n_1+n_2} |\gamma^{(l)}|^{i v_{ml}} \prod_{l=n_1+1}^{n_1+n_2} \left(\frac{\gamma^{(l)}}{|\gamma^{(l)}|}\right)^{w_{ml}} \qquad (m = 1, \ldots, r).$$

Eine Körperzahl γ heißt totalpositiv, wenn $\gamma^{(l)} > 0$ $(l = 1, \ldots, n_1)$. Zu einem ganzen Ideal $\mathfrak{t} \neq (0)$ von K definieren wir $\Omega(\mathfrak{t})$ als die Menge aller totalpositiven Körperzahlen ω mit der Eigenschaft, daß $(\omega)\mathfrak{t}^{-1}$ ein Primideal von K ist. Sei $\mathfrak{s}$ ein ganzes Ideal $\neq (0)$ von K und $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ ganze, zu $\mathfrak{s}$ teilerfremde Körperzahlen. Dann setzen wir für eine totalpositive ganze Körperzahl λ:

$$A_r(\lambda) = \sum_{\omega_1, \ldots, \omega_r} \prod_{m=1}^{r} \Lambda_m(\omega_m),$$

wobei summiert werde über alle r-tupel $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ von Zahlen aus $\Omega(\mathfrak{t})$ mit

$$\omega_1 + \cdots + \omega_r = \lambda, \tag{1}$$

$$\omega_m \equiv \sigma_m \bmod \mathfrak{s} \qquad (m = 1, \ldots, r), \tag{2}$$

$$|\omega_m^{(l)}| < |\lambda^{(l)}| \qquad (m = 1, \ldots, r; l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2). \tag{3}$$

In [2] wurde bewiesen[1]):

---

[1]) Siehe auch Mitsui [3].

Satz 1. *Für alle totalpositiven ganzen Zahlen λ aus K gilt bei $r \geqq 3$ mit beliebigem natürlichen f für $N(\lambda) \to \infty$ die asymptotische Formel*

$$A_r(\lambda) = \frac{\sqrt{|D|}}{(4\pi)^{n_2}} \left(\frac{w}{2^{n_1-n_2} R H}\right)^r \mathfrak{S}_r(\lambda) \prod_{m=1}^{r} \Lambda_m(\lambda) \left(\frac{N(\lambda)}{N(\mathfrak{t})}\right)^{r-1} \sum_{k=0}^{f-1} \frac{b_k}{(\log N(\lambda))^{r+k}} + $$
$$+ O\left(\frac{N(\lambda)^{r-1}}{(\log N(\lambda))^{r+f}}\right),$$

wobei die O-Konstante nur von K, r, f, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ und den nr Größen v_{ml}, w_{ml} abhängt,

$$b_k = \Delta(\mathfrak{t}) \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r \geqq 0 \\ k_1+\cdots+k_r = k}} \left(\sum_{l=1}^{n_1+n_2} i e_l \frac{\partial}{\partial v_{1l}}\right)^{k_1} \cdots \left(\sum_{l=1}^{n_1+n_2} i e_l \frac{\partial}{\partial v_{rl}}\right)^{k_r} (\Delta(\mathfrak{t}))^{-1} \times$$

$$\prod_{l=1}^{n_1} \frac{\prod_{m=1}^{r} \Gamma(1 + i v_{ml})}{\Gamma\left(r + i \sum_{m=1}^{r} v_{ml}\right)} \prod_{l=n_1+1}^{n_1+n_2} \int_0^\infty \prod_{m=1}^{r} \left(\int_0^1 J_{w_{ml}}(zu) u^{1+i v_{ml}} du\right) J_{\sum_{m=1}^{r} w_{ml}}(z) z\, dz,$$

$$e_l = 1\ (l = 1, \ldots, n_1), \quad e_l = 2\ (l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2),$$

$$\Delta(\mathfrak{t}) = N(\mathfrak{t})^{\frac{i}{n} \sum_{m=1}^{r} \sum_{l=1}^{n_1+n_2} v_{ml}}$$

und $J_v(z)$ die v-te Besselsche Funktion ist. Die singuläre Reihe $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ hat folgende Eigenschaften: Sei $\mathfrak{l}$ das Produkt aller verschiedenen Primideale $\mathfrak{p}$ von K mit $N(\mathfrak{p}) = 2$ oder, falls keine solchen $\mathfrak{p}$ in K vorhanden sind, sei $\mathfrak{l} = (1)$. Es werde $\mathfrak{L} = \mathfrak{l}(\mathfrak{l}, \mathfrak{s})^{-1}$ gesetzt und mit g die Anzahl der Primteiler von $\mathfrak{L}$ bezeichnet. Wenn

(4) $$\lambda \equiv \sigma_1 + \cdots + \sigma_r \bmod \mathfrak{s},$$

(5) $$(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = 1,$$

(6) $$\mathfrak{t} \mid \lambda$$

und

(7) *entweder* $\mathfrak{L} \mid (r, \lambda\mathfrak{t}^{-1})$ *oder* $(\mathfrak{L}, r) = (\mathfrak{L}, \lambda\mathfrak{t}^{-1}) = 1$

ist, so gilt: $\mathfrak{S}_r(\lambda) = \mathfrak{T}_r(\lambda, \mathfrak{s}, \mathfrak{t})$, *wobei*

$$\mathfrak{T}_r(\lambda, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = \frac{2^r N(\mathfrak{s})}{\varphi^r(\mathfrak{s})} \prod_{N(\mathfrak{p})>2} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p}) - 1}\right)^r\right) \times$$
$$\times \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{s} \\ \mathfrak{p} \mid \lambda\mathfrak{t}^{-1} \\ N(\mathfrak{p})>2}} \frac{(N(\mathfrak{p}) - 1)^r + (-1)^r (N(\mathfrak{p}) - 1)}{(N(\mathfrak{p}) - 1)^r - (-1)^r} \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{s} \\ N(\mathfrak{p})>2}} \frac{(N(\mathfrak{p}) - 1)^r}{(N(\mathfrak{p}) - 1)^r - (-1)^r}$$

gesetzt ist und die Produkte über alle Primideale $\mathfrak{p}$ von K mit den angegebenen Bedingungen erstreckt werden. Offenbar gibt es in diesem Fall zwei positive, nur von K, r und $\mathfrak{s}$ abhängige Konstanten c_1, c_2 mit $c_1 < \mathfrak{S}_r(\lambda) < c_2$. Ist mindestens eine der Bedingungen (4) bis (7) nicht erfüllt, so ist $\mathfrak{S}_r(\lambda) = 0$[2]*.*

Über das Nichtverschwinden der Koeffizienten b_k kann ich wenig aussagen. Für den wichtigsten Fall, nämlich für $v_{ml} = w_{ml} = 0$ $(m = 1, \ldots, r;\ l = 1, \ldots, n_1 + n_2)$

---

[2]) Diese singuläre Reihe unterscheidet sich von der in [2, Satz 1] um den Faktor $N(\mathfrak{t})^{r-1}$.

gilt [2, Satz 1]:

$$b_0 = \frac{1}{[(r-1)!]^{n_1}} \left(\frac{2r}{r+1} \int_0^\infty J_1^{r+1}(z) \frac{dz}{z^r} \right)^{n_1} > 0 .$$

Setzt man zusätzlich $n_2 = 0$, $N(\mathfrak{t}) = 1$ voraus, so errechnet man leicht:

$$b_1 = \frac{nr}{[(r-1)!]^n} \left(\frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} \right) = \frac{nr}{[(r-1)!]^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r-1)}{(m+1)(m+r)} > 0 ,$$

woraus folgt, daß sich bei $f = 1$ das Restglied der asymptotischen Formel von Satz 1 nicht verbessern läßt. Wir werden zeigen, daß sich die in Satz 1 auftretende asymptotische Reihe durch eine von f unabhängige Funktion ersetzen läßt, die ein bezüglich des logarithmischen Faktors beliebig kleines Restglied gestattet. Unser Ergebnis ist

Satz 2. *Für alle totalpositiven ganzen Zahlen λ aus K gilt bei $r \geqq 3$ mit beliebigem reellen $f > 0$ für $N(\lambda) \to \infty$ die asymptotische Formel*

$$A_r(\lambda) = \frac{\sqrt{|D|}}{(4\pi)^{n_2}} \left(\frac{w}{2^{n_1 - n_2} R H} \right)^r \mathfrak{S}_r(\lambda) \prod_{m=1}^{r} \Lambda_m(\lambda)\, G(\lambda, \mathfrak{t}, r, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_r) + \\ + O\left(\frac{N(\lambda)^{r-1}}{(\log N(\lambda))^{r+f}} \right),$$

wobei die O-Konstante nur von $K, r, f, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ und den nr Größen v_{ml}, w_{ml} abhängt und

$$G(\lambda, \mathfrak{t}, r, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_r) = \int_{1/2}^{1} \cdots \int_{1/2}^{1} \left[\prod_{l=1}^{n_1} \frac{\prod_{m=1}^{r} \Gamma(y_m + i v_{ml})}{\Gamma\left(\sum_{m=1}^{r} (y_m + i v_{ml}) \right)} \times \right. \\ \left. \times \prod_{l=n_1+1}^{n_1+n_2} \int_0^\infty \prod_{m=1}^{r} \left(\int_0^1 J_{w_{ml}}(uz)\, u^{2y_m - 1 + i v_{ml}} du \right) J_{\sum_{m=1}^{r} w_{ml}}(z)\, z\, dz \right] \times \\ \times \left(\frac{N(\lambda)}{N(\mathfrak{t})} \right)^{y_1 + \cdots + y_r - 1} dy_1 \ldots dy_r$$

ist.

Die Funktion $G(\lambda, (1), r, 1, \ldots, 1)$ taucht für $n = 1$ und für $n = 2$, $n_2 = 0$ schon in Betrachtungen von Rademacher [4, (1.13) und (4.682)] auf, der bemerkte, daß man mittels dieser Funktion im Falle der Gültigkeit einer verallgemeinerten Riemannschen Vermutung eine sehr gute Approximation für $A_r(\lambda)$ erhält.

Wie Prof. C. L. Siegel mir mitteilte, ist $\Lambda_m(\gamma)$ der allgemeine beschränkte Charakter der multiplikativen Gruppe der von 0 verschiedenen Zahlen des Körpers K, wenn dieser bezüglich der archimedischen Bewertungen abgeschlossen wird. Es liegt deshalb nahe, das asymptotische Verhalten des Ausdrucks

$$A_r^*(\lambda) = \sum_{\omega_1, \ldots, \omega_r} \prod_{m=1}^{r} (\chi_m(\omega_m)\, \Lambda_m(\omega_m))$$

für $N(\lambda) \to \infty$, λ (totalpositiv und ganz) zu untersuchen. Dabei seien die χ_m $(m = 1, \ldots, r)$ beliebige, aber fest gewählte Restklassencharaktere[3]) mod$\mathfrak{s}$, und summiert werde über alle r-tupel $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ von Zahlen aus $\Omega(\mathfrak{t})$, die die Bedingungen (1) und (3) befriedigen. Da $A_r^*(\lambda)$ eine Linearkombination von Ausdrücken der Gestalt $A_r(\lambda)$ ist, folgt aus Satz 2 unmittelbar

Satz 3. *Für alle totalpositiven ganzen Zahlen λ aus K gilt bei $r \geqq 3$ mit beliebigem reellen $f > 0$ für $N(\lambda) \to \infty$ die asymptotische Formel*

$$A_r^*(\lambda) = \frac{\sqrt{|D|}}{(4\pi)^{n_1}} \left(\frac{w}{2^{n_1 - n_2} R H}\right)^r \mathfrak{S}_r^*(\lambda) \prod_{m=1}^{r} \Lambda_m(\lambda)\, G(\lambda, \mathfrak{t}, r, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_r) + \\ + O\left(\frac{N(\lambda)^{r-1}}{(\log N(\lambda))^{r+f}}\right).$$

Hierbei hängt die O-Konstante nur von K, r, f, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ und den nr Größen $v_{m\,l}$, $w_{m\,l}$ ab, und es ist

$$\mathfrak{S}_r^*(\lambda) = \mathfrak{T}_r(\lambda, \mathfrak{s}, \mathfrak{t})\, \mathfrak{R}(\lambda, \chi_1, \ldots, \chi_r)$$

mit

$$\mathfrak{R}(\lambda, \chi_1, \ldots, \chi_r) = \sum_{\substack{\varrho_1 \bmod \mathfrak{s} \\ \varrho_1 + \cdots + \varrho_r \equiv \lambda \bmod \mathfrak{s}}} \cdots \sum_{\varrho_r \bmod \mathfrak{s}} \chi_1(\varrho_1) \cdots \chi_r(\varrho_r),$$

falls (5), (6) *und* (7) *erfüllt sind*, $\mathfrak{S}_r^*(\lambda) = 0$ *sonst.*

Die Frage nach dem Nichtverschwinden von $\mathfrak{R}(\lambda, \chi_1, \ldots, \chi_r)$ läßt, wie mir scheint, nur für eigentliche Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_r$ eine übersichtliche Antwort zu. Sei $\mathfrak{d}$ die Differente von K und $\mathfrak{a}_\gamma = (1, \gamma\mathfrak{d})^{-1}$ für eine beliebige Körperzahl γ gesetzt. Ferner sei zu einem ganzen Ideal $\mathfrak{m} \neq (0)$ von K, einem Charakter χ mod $\mathfrak{m}$ und einer Körperzahl γ mit $\mathfrak{a}_\gamma \mid \mathfrak{m}$ die verallgemeinerte Gaußsche Summe

$$\mathfrak{G}(\gamma \mid \chi, \mathfrak{m}) = \sum_{\varrho \bmod \mathfrak{m}} \chi(\varrho) e^{2\pi i S(\varrho\gamma)}$$

definiert (wie üblich sei $S(\varrho)$ die Spur von ϱ für $\varrho \in K$). Folgende Aussage werden wir später beweisen:

Satz 4. *Seien $\chi_1, \ldots, \chi_r$ eigentliche Charaktere* mod$\mathfrak{s}$, $\mathfrak{f}$ *der Führer des Charakters $\chi_1 \cdots \chi_r$ und χ_e der von $\chi_1 \cdots \chi_r$ induzierte eigentliche Charakter* mod$\mathfrak{f}$. *Für alle Körperzahlen λ, γ, $\varkappa$ mit $1 \mid \lambda$, $\mathfrak{a}_\gamma = \mathfrak{s}$, $\varkappa \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$, $\mathfrak{s}_0 \mathfrak{f}^{-1} \mid \varkappa$, wobei $\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{s}(\mathfrak{s}, \lambda)^{-1}$ gesetzt ist, gilt*[4]):

$$\mathfrak{R}(\lambda, \chi_1, \ldots, \chi_r) = \frac{\mu(\mathfrak{s}_0\mathfrak{f}^{-1})}{N(\mathfrak{s})} \frac{\varphi(\mathfrak{s})}{\varphi(\mathfrak{s}_0)} \overline{\mathfrak{G}(\lambda\varkappa\gamma \mid \chi_e, \mathfrak{f})} \prod_{m=1}^{r} \mathfrak{G}(\gamma \mid \chi_m, \mathfrak{s}),$$

falls $\mathfrak{f} \mid \mathfrak{s}_0$, $(\mathfrak{s}_0\mathfrak{f}^{-1}, \mathfrak{f}) = 1$ *ist*, $\mathfrak{R}(\lambda, \chi_1, \ldots, \chi_r) = 0$ *sonst. Für* $\mathfrak{f} \mid \mathfrak{s}_0$, $(\mathfrak{s}_0\mathfrak{f}^{-1}, \mathfrak{f}) = 1$ *ist insbesondere*

$$|\mathfrak{R}(\lambda, \chi_1, \ldots, \chi_r)| = |\mu(\mathfrak{s}_0\mathfrak{f}^{-1})| \frac{\varphi(\mathfrak{s})}{\varphi(\mathfrak{s}_0)} \sqrt{N(\mathfrak{f})} \left(\sqrt{N(\mathfrak{s})}\right)^{r-2}.$$

Eine Zahl γ aus K heißt ungerade, wenn γ ganz und $(\gamma, \mathfrak{l}) = 1$ ist ($\mathfrak{l}$ definiert wie in Satz 1), und sie wird Primzahl genannt, wenn das von ihr erzeugte Hauptideal ein Primideal ist. Aus Satz 1 zogen wir in [2] die Folgerung:

---

[3]) Wie üblich sind diese Charaktere für alle ganzen Körperzahlen definiert und verschwinden für nicht zu $\mathfrak{s}$ teilerfremdes Argument.

[4]) Ein Querstrich über komplexen Zahlen bedeute den Übergang zum konjugiert Komplexen.

Es gibt eine nur von K abhängige Konstante $A_0 > 0$ derart, daß jede ungerade totalpositive Körperzahl λ mit $N(\lambda) > A_0$ sich als Summe dreier totalpositiver Primzahlen aus K darstellen läßt. Diese Aussage läßt sich für nicht-totalreelle Zahlkörper (d. h. $n_2 > 0$) verschärfen zu

Satz 5. *Ist $n_2 > 0$, so läßt sich jede ungerade totalpositive Zahl aus K auf unendlich viele Weisen als Summe dreier totalpositiver Primzahlen aus K darstellen.*

Offenbar folgt Satz 5 sofort aus dem allgemeineren Satz 6, wenn man $\mathfrak{t} = \mathfrak{s} = (1)$, $r = 3$ wählt.

Satz 6. *Sei $n_2 > 0$, seien $T_{n_1+1}, \ldots, T_{n_1+n_2}$ positiv reelle Zahlen, λ eine totalpositive ganze Zahl aus K und*

$$A_r(\lambda, T_{n_1+1}, \ldots, T_{n_1+n_2}) = \sum_{\omega_1, \ldots, \omega_r} 1\,,$$

wobei summiert werde über alle r-tupel $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ von Zahlen aus $\Omega(\mathfrak{t})$, die (1), (2) *und die Bedingungen*

$$|\omega_m^{(l)}| < |\lambda^{(l)}|\, T_l \quad (l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2;\ m = 1, \ldots, r)$$

erfüllen. Ist $r \geqq 3$ und genügen λ, r, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{s}$ und $\sigma_m (m = 1, \ldots, r)$ den Bedingungen (4) *bis* (7), *so gibt es positive (nur von K, r, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, aber nicht von λ abhängige) Konstanten c_3, c_4, c_5 derart, daß*

$$c_3 T^{r-1} (\log T)^{-r} < A_r(\lambda, T_{n_1+1}, \ldots, T_{n_1+n_2}) < c_4 T^{r-1} (\log T)^{-r}$$

ist für $T_l > c_5$ $(l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2)$, wobei $T = N(\lambda)\, T^2_{n_1+1} \cdots T^2_{n_1+n_2}$ gesetzt ist.

Der Beweis von Satz 6 gelingt, wie wir zeigen werden, wie der von Satz 1 in [2] mit Methoden von Vinogradov [6] und Siegel [5].

§ 1. Beweis von Satz 2

Zur Abkürzung setzen wir $A = N(\lambda)$, $a = \log A$. Für ein $C \geqq 0$ bedeute

$$B \ll C\,,$$

daß $B = O(C)$ ist. In diesem Paragraphen sollen sich die O-Symbole auf den Grenzübergang $A \to \infty$ beziehen und die O-Konstanten nur von K, r, f, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ und den $n r$ Größen v_{ml}, w_{ml} abhängen, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gefordert wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir f als natürliche Zahl voraussetzen.

Hilfssatz 1. *Für beliebige reelle Zahlen z, s, v mit $z \geqq 0$, $s \geqq 0$ und für alle ganzrationalen y gilt*

$$\int_0^s J_y(uz)\, u^{1+iv}\, du \ll \operatorname{Min}(s^2, \sqrt{s}\, z^{-3/2})\,,$$

wobei die O-Konstante nur von v und y abhängt.

Beweis: Aus [2, Hilfssatz 21] und [2, (95)] folgt die Behauptung von Hilfssatz 1.

Für spätere Anwendungen notieren wir uns die triviale Abschätzung

(8) $\qquad |J_y(x)| \leqq 1$ für alle reellen x und ganzrationalen y.

Hilfssatz 2. *Wird*

$$\Psi(y_1, \ldots, y_r) = N(\mathfrak{t})^{-\frac{i}{n}\sum\limits_{m=1}^{r}\sum\limits_{l=1}^{n_1+n_2}(v_{ml}+i e_l y_m)} \prod_{l=1}^{n_1} \frac{\prod\limits_{m=1}^{r} \Gamma(1 + i(v_{ml} + i y_m))}{\Gamma\left(r + i \sum\limits_{m=1}^{r}(v_{ml} + i y_m)\right)} \times$$

$$\times \prod_{l=n_1+1}^{n_1+n_2} \int_0^\infty \prod_{m=1}^{r} \left(\int_0^1 J_{w_{ml}}(uz)\, u^{1+i(v_{ml}+2iy_m)}\, du \right) J_{\sum\limits_{m=1}^{r} w_{ml}}(z) z\, dz$$

gesetzt, so ist $\Psi(y_1, \ldots, y_r)$ *als Funktion der* r *komplexen Veränderlichen* $y_1, \ldots, y_r$ *holomorph für* $|y_m| < 3/5$ $(m = 1, \ldots, r)$.

Beweis: Wegen $\mathrm{Re}(1 + i(v_{ml} + i y_m)) = 1 - \mathrm{Re}\, y_m > 2/5 > 0$ für $|y_m| < 3/5$ $(m = 1, \ldots, r;\ l = 1, \ldots, n_1)$ genügt es, die Holomorphie der Integrale

$$I_l(y_1, \ldots, y_r) = \int_0^\infty \prod_{m=1}^{r} I_{ml}(y_m)\, J_{\sum\limits_{m=1}^{r} w_{ml}}(z) z\, dz \quad (l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2)$$

nachzuweisen, wobei

$$I_{ml}(y_m) = \int_0^1 J_{w_{ml}}(uz) u^{1+i(v_{ml}+2iy_m)} du$$

gesetzt ist. Sei $\eta_m = \mathrm{Re}\, y_m$ $(m = 1, \ldots, r)$. Mit (8) erhalten wir

$$\text{(9)} \qquad I_{ml}(y_m) \ll \int_0^1 u^{1-2\eta_m} du \leqq \int_0^1 u^{-1/5} du \ll 1\,.$$

Mittels partieller Integration folgt für $z \geqq 1$ bei Anwendung von (8) und Hilfssatz 1:

$$I_{ml}(y_m) = \left[u^{-2y_m} \int_0^u J_{w_{ml}}(tz) t^{1+iv_{ml}} dt \right]_0^1 +$$

$$\text{(10)} \qquad + 2y_m \int_0^1 u^{-1-2y_m} \left(\int_0^u J_{w_{ml}}(tz) t^{1+iv_{ml}} dt \right) du \ll$$

$$\ll z^{-3/2} + \int_0^{z^{-1}} u^{1-2\eta_m} du + \int_{z^{-1}}^1 u^{-1/2-2\eta_m} z^{-3/2} du \ll z^{-4/5}\,.$$

Aus (8), (9) und (10) folgt

$$\prod_{m=1}^{r} I_{ml}(y_m)\, J_{\sum\limits_{m=1}^{r} w_{ml}}(z) z \ll \mathrm{Min}(1, z^{-4/5 r + 1})$$

für $l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$, wobei diese Abschätzung gleichmäßig in allen y_m mit $|y_m| < 3/5$ $(m = 1, \ldots, r)$ gilt. Folglich ist in diesem $(y_1, \ldots, y_r)$-Bereich das uneigentliche Integral $I_l(y_1, \ldots, y_r)$ gleichmäßig konvergent und damit holomorph, q. e. d.

Setzt man

$$d_{k_1\ldots k_r} = \left(\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_r}}{\partial y_1^{k_1}\ldots\partial y_r^{k_r}}\,\Psi(y_1,\ldots,y_r)\right)_{y_1=\cdots=y_r=0} \qquad (k_1\geq 0,\ldots,k_r\geq 0),$$

so gilt nach Hilfssatz 2 für $|y_m| < 3/5$ $(m = 1,\ldots,r)$:

$$\text{(11)}\qquad \Psi(y_1,\ldots,y_r) = \sum_{0\leq k_1,\ldots,k_r<\infty} \frac{d_{k_1\ldots k_r}}{k_1!\ldots k_r!}\, y_1^{k_1}\ldots y_r^{k_r}.$$

Aus der Definition der b_k folgt

$$\sum_{k=0}^{f-1} b_k a^{-k} + O(a^{-f}) = \sum_{k=0}^{rf} b_k a^{-k} = \Delta(\mathfrak{t}) \sum_{\substack{0\leq k_1,\ldots,k_r\\ rf\geq k_1+\cdots+k_r}} d_{k_1\ldots k_r} a^{-(k_1+\cdots+k_r)}$$

$$= \Delta(\mathfrak{t}) \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \sum_{\substack{0\leq k_1,\ldots,k_r\\ rf\geq k_1+\cdots+k_r}} \frac{d_{k_1\ldots k_r}}{k_1!\ldots k_r!}\left(\frac{y_1}{a}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{y_r}{a}\right)^{k_r} e^{-(y_1+\cdots+y_r)}\,dy_1\ldots dy_r$$

$$\text{(12)}\qquad = \Delta(\mathfrak{t}) \int_0^{a/2}\cdots\int_0^{a/2} \sum_{\substack{0\leq k_1,\ldots,k_r\\ rf\geq k_1+\cdots+k_r}} \frac{d_{k_1\ldots k_r}}{k_1!\ldots k_r!}\left(\frac{y_1}{a}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{y_r}{a}\right)^{k_r}\times$$

$$\times\, e^{-(y_1+\cdots+y_r)}\,dy_1\ldots dy_r + R_0,$$

wobei

$$R_0 \ll \sum_{\substack{0\leq k_1,\ldots,k_r\\ rf\geq k_1+\cdots+k_r}} \left|\frac{d_{k_1\ldots k_r}}{k_1!\ldots k_r!}\right| \sum_{j=1}^{r}\left[\int_{a/2}^{\infty}\left(\frac{y}{a}\right)^{k_j} e^{-y}\,dy \prod_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{r}\int_0^\infty\left(\frac{y}{a}\right)^{k_m} e^{-y}\,dy\right] \ll$$

$$\text{(13)}\qquad \ll \int_{a/2}^{\infty} y^{rf} e^{-y}\,dy \ll \int_{a/2}^{\infty} e^{-y/2}\,dy \ll A^{-1/4}.$$

Ferner ist

$$\Delta(\mathfrak{t}) \int_0^{a/2}\cdots\int_0^{a/2} \sum_{\substack{0\leq k_1,\ldots,k_r\\ rf< k_1+\cdots+k_r}} \frac{d_{k_1\ldots k_r}}{k_1!\ldots k_r!}\left(\frac{y_1}{a}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{y_r}{a}\right)^{k_r} e^{-(y_1+\cdots+y_r)}\,dy_1\ldots dy_r \ll$$

$$\text{(14)}\qquad \ll \sum_{0\leq k_1,\ldots,k_r<\infty} \left|\frac{d_{k_1\ldots k_r}}{k_1!\ldots k_r!}\right| \left(\frac{1}{2}\right)^{k_1+\cdots+k_r} a^{-f} \ll a^{-f}.$$

Hierbei wurde die Abschätzung

$$\int_0^{a/2}\left(\frac{y}{a}\right)^k e^{-y}\,dy \leq \left(\frac{\log(a^f)}{a}\right)^k \int_0^{\log(a^f)} e^{-y}\,dy + \left(\frac{1}{2}\right)^k \int_{\log(a^f)}^{a/2} e^{-y}\,dy \ll \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{für } k\geq 0,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^k a^{-f} & \text{für } k\geq f+1\end{cases}$$

und die absolute Konvergenz der in (11) rechtsstehenden Reihe für $y_1 = \cdots = y_r$

$=\frac{1}{2}$ benutzt. Aus (11), (12), (13) und (14) folgt

$$\sum_{k=0}^{f-1} b_k a^{-k} = \Delta(\mathfrak{t}) \int_0^{a/2} \cdots \int_0^{a/2} \Psi\left(\frac{y_1}{a}, \ldots, \frac{y_r}{a}\right) e^{-(y_1+\cdots+y_r)}\, dy_1 \ldots dy_r + O(a^{-f})\,.$$

Hieraus erhalten wir nach einer Variablentransformation im rechtsstehenden Integral

$$\left(\frac{N(\lambda)}{N(\mathfrak{t})}\right)^{r-1} \sum_{k=0}^{f-1} \frac{b_k}{(\log N(\lambda))^{r+k}} = \frac{\Delta(\mathfrak{t})}{N(\mathfrak{t})^{r-1}} \int_{1/2}^{1} \cdots \int_{1/2}^{1} \Psi(1-y_1, \ldots, 1-y_r) \times \tag{15}$$
$$\times N(\lambda)^{y_1+\cdots+y_r-1}\, dy_1 \cdots dy_r + O\left(\frac{N(\lambda)^{r-1}}{(\log N(\lambda))^{r+f}}\right).$$

Geht man auf die Definition von $\Psi(y_1, \ldots, y_r)$ zurück, so folgt aus (15) und Satz 1 nach einfacher Rechnung Satz 2.

§ 2. Beweis von Satz 4

Dem eigentlichen Beweis schicken wir eine Zusammenstellung einiger bekannter Tatsachen über Gaußsche Summen voraus.

Hilfssatz 3. *Ist* χ *ein eigentlicher Charakter* mod $\mathfrak{m}$, γ *eine Körperzahl mit* $\mathfrak{a}_\gamma = \mathfrak{m}$, *so gilt*

$$|\mathfrak{G}(\gamma\,|\,\chi, \mathfrak{m})| = \sqrt{N(\mathfrak{m})}\,, \tag{16}$$

und für jede ganze Körperzahl α *ist*

$$\mathfrak{G}(\alpha\gamma\,|\,\chi, \mathfrak{m}) = \overline{\chi(\alpha)}\, \mathfrak{G}(\gamma\,|\,\chi, \mathfrak{m})\,. \tag{17}$$

Beweis: Verläuft wie im rationalen Zahlkörper [1, § 20].

Hilfssatz 4. *Sei* χ *ein Charakter* mod $\mathfrak{m}$ *mit dem Führer* $\mathfrak{f}$ *und* γ *eine Körperzahl mit* $\mathfrak{a}_\gamma = \mathfrak{m}_0$, $\mathfrak{m}_0 | \mathfrak{m}$. *Dann ist*

$$\mathfrak{G}(\gamma\,|\,\chi, \mathfrak{m}) = \begin{cases} 0, & \textit{falls}\quad \mathfrak{f} \nmid \mathfrak{m}_0\,, \\ \dfrac{\varphi(\mathfrak{m})}{\varphi(\mathfrak{m}_0)}\, \mathfrak{G}(\gamma\,|\,\chi_0, \mathfrak{m}_0), & \textit{falls}\quad \mathfrak{f} | \mathfrak{m}_0\,, \end{cases}$$

wobei im letzten Fall χ_0 *der von* χ *induzierte Charakter* mod $\mathfrak{m}_0$ *sei.*

Beweis: Verläuft wie im rationalen Zahlkörper [1, § 20].

Hilfssatz 5. *Sei* χ *ein Charakter* mod $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{f}$ *sein Führer,* χ_e *der von* χ *induzierte eigentliche Charakter* mod $\mathfrak{f}$ *und* $\gamma, \varkappa$ *Körperzahlen mit* $\mathfrak{a}_\gamma = \mathfrak{m}$, $\varkappa \equiv 1$ mod $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{m}\mathfrak{f}^{-1} | \varkappa$. *Dann gilt*

$$\mathfrak{G}(\gamma\,|\,\chi, \mathfrak{m}) = \begin{cases} \mu(\mathfrak{m}\mathfrak{f}^{-1})\, \mathfrak{G}(\varkappa\gamma\,|\,\chi_e, \mathfrak{f}), & \textit{falls}\quad (\mathfrak{m}\mathfrak{f}^{-1}, \mathfrak{f}) = 1\,, \\ 0, & \textit{falls}\quad (\mathfrak{m}\mathfrak{f}^{-1}, \mathfrak{f}) \neq 1\,. \end{cases}$$

Beweis: Kann geführt werden wie im rationalen Zahlkörper [1, § 20], ist aber auch auf folgende Weise möglich:

$$\mathfrak{G}(\gamma\,|\,\chi, \mathfrak{m}) = \sum_{\substack{\delta \bmod \mathfrak{f} \\ (\delta, \mathfrak{f}) = 1}} \chi_e(\delta) \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{m} \\ \varrho \equiv \delta \bmod \mathfrak{f} \\ (\varrho, \mathfrak{m}) = 1}} e^{2\pi i S(\varrho\gamma)}\,. \tag{18}$$

Nach [2, Hilfssatz 18] gilt für $\varkappa \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$, $\mathfrak{m}\mathfrak{f}^{-1} | \varkappa$:

$$\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{m} \\ \varrho \equiv \delta \bmod \mathfrak{f} \\ (\varrho, \mathfrak{m}) = 1}} e^{2\pi i S(\varrho\gamma)} = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad (\mathfrak{m}\mathfrak{f}^{-1}, \mathfrak{f}) \neq 1, \\ \mu(\mathfrak{m}\mathfrak{f}^{-1}) e^{2\pi i S(\delta\varkappa\gamma)}, & \text{falls} \quad (\mathfrak{m}\mathfrak{f}^{-1}, \mathfrak{f}) = 1. \end{cases} \tag{19}$$

Aus (18) und (19) folgt die Behauptung des Hilfssatzes 5.

Hilfssatz 4 und Hilfssatz 5 ergeben zusammen

Hilfssatz 6. *Sei χ ein Charakter* mod $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{f}$ *sein Führer, χ_* der von χ induzierte eigentliche Charakter* mod $\mathfrak{f}$ *und $\gamma, \alpha, \varkappa$ Körperzahlen mit* $\mathfrak{a}_\gamma = \mathfrak{m}$, $1 | \alpha$, $\varkappa \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$, $\mathfrak{m}_0\mathfrak{f}^{-1} | \varkappa$, *wobei* $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}(\mathfrak{m}, \alpha)^{-1}$ *gesetzt ist. Dann gilt*

$$\mathfrak{S}(\alpha\gamma | \chi, \mathfrak{m}) = \mu\left(\frac{\mathfrak{m}_0}{\mathfrak{f}}\right) \frac{\varphi(\mathfrak{m})}{\varphi(\mathfrak{m}_0)} \mathfrak{S}(\alpha\varkappa\gamma | \chi_*, \mathfrak{f}),$$

falls $\mathfrak{f} | \mathfrak{m}_0$, $(\mathfrak{m}_0\mathfrak{f}^{-1}, \mathfrak{f}) = 1$ *ist*, $\mathfrak{S}(\alpha\gamma | \chi, \mathfrak{m}) = 0$ *sonst.*

Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Satz 4 erhalten wir auf Grund der Beziehung

$$\sum_{\nu \bmod \mathfrak{s}} e^{2\pi i S(\nu\alpha\gamma)} = \begin{cases} N(\mathfrak{s}) & \text{für} \quad \mathfrak{s} | \alpha, \\ 0 & \text{für} \quad \mathfrak{s} \nmid \alpha, \ 1 | \alpha \end{cases}$$

und der Relation (17) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\lambda, \chi_1, \ldots, \chi_r) &= N(\mathfrak{s})^{-1} \sum_{\nu \bmod \mathfrak{s}} e^{-2\pi i S(\nu\lambda\gamma)} \prod_{m=1}^{r} \Big(\sum_{\varrho \bmod \mathfrak{s}} \chi_m(\varrho) e^{2\pi i S(\varrho\nu\gamma)} \Big) \\ &= N(\mathfrak{s})^{-1} \sum_{\nu \bmod \mathfrak{s}} \overline{\chi_1(\nu)} \cdots \overline{\chi_r(\nu)} e^{-2\pi i S(\nu\lambda\gamma)} \prod_{m=1}^{r} \mathfrak{S}(\gamma | \chi_m, \mathfrak{s}) \\ &= N(\mathfrak{s})^{-1} \overline{\mathfrak{S}(\lambda\gamma | \chi_1 \cdots \chi_r, \mathfrak{s})} \prod_{m=1}^{r} \mathfrak{S}(\gamma | \chi_m, \mathfrak{s}), \end{aligned}$$

woraus mit Hilfssatz 6 und (16) die Behauptung von Satz 4 folgt[5]).

§ 3. Beweis von Satz 6

Da der Beweis von Satz 6 im wesentlichen wie der von [2, Satz 1] verläuft, geben wir hier nur die Abänderungen gegenüber [2] und die wichtigsten Zwischenstufen an. Die Größen λ, r, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{s}$ und σ_m mögen die Voraussetzungen von Satz 6 erfüllen. Die O-Symbole sollen sich in diesem Paragraphen auf den Grenzübergang $T_l \to \infty$ $(l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2)$ beziehen und die O-Konstanten nur von K, r, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ abhängen, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gefordert wird. Wie in [2] seien die Räume E, E^*, die Zuordnung von gesternten zu ungesternten Größen, die Funktionen $S(\xi)$, $N(\xi)$, das Volumenelement $d\xi^*$ und das Fundamentalgebiet F zu einer fest gewählten Basis von $\mathfrak{d}^{-1}$ erklärt. Zur Abkürzung setzen wir

$$B = \sqrt[n]{T}, \quad b = \log B, \quad h = Bb^{-\Theta_1}, \quad t = b^{\Theta_2} \quad \text{für} \quad B > 1,$$

$$\Theta = r + 3, \quad \Theta_1 = (8n+4)\Theta + 8n^2 + n, \quad \Theta_2 = (4n+2)\Theta + 4n^2 + n,$$

$$\Theta_3 = (4n^3 + 6n^2 + 2n + 1)\Theta + 4n^4 + 5n^3 + 1.$$

[5]) Alle Ergebnisse dieses Paragraphen können auch mit [2, Hilfssatz 18] abgeleitet werden.

Für eine Körperzahl γ sei B_γ die Menge aller Punkte ξ aus E mit

$$N(\mathrm{Max}(h|\xi-\gamma|, t^{-1})) \leqq N(\mathfrak{a}_\gamma)^{-1}.$$

Ferner sei Γ ein vollständiges Restsystem $\bmod\, \mathfrak{d}^{-1}$ von Körperzahlen γ mit $N(\mathfrak{a}_\gamma) \leqq t^n$ und G die Menge aller Punkte, die in F, aber in keinem Gebiet B_γ (γ beliebig aus K) liegen. Zu λ und den Zahlen T_l ($l = n_1+1, \ldots, n_1+n_2$) gibt es eine totalpositive Einheit ε in K, die kongruent 1 mod $\mathfrak{s}$ ist und die Ungleichungen

$$(20)\qquad \begin{aligned} c_6 B &\leqq \nu^{(l)} \leqq c_7 B \quad (l = 1, \ldots, n_1), \\ c_6 B &\leqq |\nu^{(l)}|\, T_l \leqq c_7 B \quad (l = n_1+1, \ldots, n_1+n_2) \end{aligned}$$

mit positiven, nur von K und $\mathfrak{s}$ abhängigen Konstanten c_6, c_7 erfüllt, wobei $\nu = \varepsilon\lambda$ gesetzt ist. Offensichtlich ist

$$(21)\qquad A_r(\lambda, T_{n_1+1}, \ldots, T_{n_1+n_2}) = A_r(\nu, T_{n_1+1}, \ldots, T_{n_1+n_2}).$$

Setzt man für beliebiges $\xi \in E$ und $m = 1, \ldots, r$:

$$U_m(\xi) = \sum_\omega e^{2\pi i S(\omega\xi)},$$

wobei summiert wird über alle ω aus $\Omega(\mathfrak{t})$ mit $\omega \equiv \sigma_m \bmod \mathfrak{s}$, $\omega^{(l)} < \nu^{(l)}$ ($l = 1, \ldots, n_1$), $|\omega^{(l)}| < |\nu^{(l)}|\, T_l$ ($l = n_1+1, \ldots, n_1+n_2$), so wird analog zu [2, (19)]:

$$(22)\qquad \begin{aligned} A_r(\nu, T_{n_1+1}, \ldots, T_{n_1+n_2}) &= 2^{n_2}\sqrt{|D|} \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{B_\gamma^*} e^{-2\pi i S(\nu\xi)} \prod_{m=1}^{r} U_m(\xi)\, d\xi^* + \\ &+ 2^{n_2}\sqrt{|D|} \int_{G^*} e^{-2\pi i S(\nu\xi)} \prod_{m=1}^{r} U_m(\xi)\, d\xi^*. \end{aligned}$$

Bei der weiteren Übertragung des Beweises von [2, Satz 1] hat man nur $f = 1$, $\Lambda_m = 1$ ($m = 1, \ldots, r$) zu setzen, λ die Zahl ν und A die Zahl B entsprechen zu lassen, wobei (20) für die Abschätzungen wesentlich ist. Wie [2, (113)] zeigt man, daß

$$(23)\qquad \int_{G^*} e^{-2\pi i S(\nu\xi)} \prod_{m=1}^{r} U_m(\xi)\, d\xi^* \ll B^{n(r-1)}\, b^{-r-1}$$

ist, und wie [2, (107)], daß

$$(24)\qquad \begin{aligned} &\sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{B_\gamma^*} e^{-2\pi i S(\nu\xi)} \prod_{m=1}^{r} U_m(\xi)\, d\xi^* \\ &= \left(\frac{w}{2^{n_1}\pi^{n_2}RH}\right)^r \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{e^{-2\pi i S(\nu\gamma)}}{N(\mathfrak{t})^r\, \varphi^r(\mathfrak{a}\mathfrak{s}(\mathfrak{s},\mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1})} \prod_{m=1}^{r} P_m(\gamma)\, \mathfrak{R}_\gamma(\nu) + O\left(\frac{B^{n(r-1)}}{b^\Theta}\right) \end{aligned}$$

ist, wobei $P_m(\gamma)$ wie in [2] definiert ist,

$$\mathfrak{R}_\gamma(\nu) = \int_{F_\gamma^*} e^{-2\pi i S(\nu\zeta)}\, \mathfrak{W}^r(\zeta)\, d\zeta^*,$$

F_γ die Menge aller ζ mit $\zeta + \gamma \in B_\gamma$,

$$\mathfrak{W}(\zeta) = \int\limits_{\mathfrak{R}^*} \frac{e^{2\pi i S(\tau\zeta)}}{\log\left(\frac{N(\tau)}{N(\mathfrak{t})}\right)} d\tau^*$$

und $\mathfrak{R}$ die Menge aller τ aus E ist mit

$$[b^{\Theta_0}]\,([b^{2\Theta_0}]+1)^{-1}\,\nu^{(l)} \leqq \tau^{(l)} < \nu^{(l)} \quad (l = 1, \ldots, n_1)\,,$$

$$[b^{\Theta_0}]\,([b^{2\Theta_0}]+1)^{-1}|\nu^{(l)}|\,T_l \leqq |\tau^{(l)}| < |\nu^{(l)}|\,T_l \quad (l = n_1+1, \ldots, n_1+n_2)\,.$$

Hilfssatz 7. *Es gilt*

$$\mathfrak{S}_r(\nu) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{e^{-2\pi i S(\nu\gamma)}}{N(\mathfrak{t})\,\varphi^r(\mathfrak{a}\mathfrak{s}(\mathfrak{s},\mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1})} \prod_{m=1}^{r} P_m(\gamma) + O(b^{-1}) \tag{25}$$

und

$$c_1 < \mathfrak{S}_r(\nu) < c_2\,.$$

Beweis: Aus der Definition von $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ in Satz 1 und den Ergebnissen von [2, § 6] folgt (25), nämlich

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_r(\nu) &= \sum_{\gamma \bmod \mathfrak{b}^{-1}} \frac{e^{-2\pi i S(\nu\gamma)}}{N(\mathfrak{t})\,\varphi^r(\mathfrak{a}\mathfrak{s}(\mathfrak{s},\mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1})} \prod_{m=1}^{r} P_m(\gamma) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{e^{-2\pi i S(\nu\gamma)}}{N(\mathfrak{t})\,\varphi^r(\mathfrak{a}\mathfrak{s}(\mathfrak{s},\mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1})} \prod_{m=1}^{r} P_m(\gamma) + O(b^{-1})\,,\end{aligned}$$

wobei das Restglied wie in [2, (111)] gewonnen werden kann. Da mit λ auch ν die Bedingungen (4), (6) und (7) erfüllt, folgt der zweite Teil von Hilfssatz 7 aus Satz 1.

Hilfssatz 8. *Für beliebige reelle Zahlen c, d, ψ_0 mit $c > d > 0$ werde*

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}(c, d, \psi_0) = 2^{3-r}\,\pi^{1-r} c^{2(1-r)} \int\limits_{\psi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{\infty} \left(\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{u=0}^{c} e^{4\pi i z u \cos(\varphi+\psi)} u\, du\, d\varphi \right)^r \times \\ \times\, e^{-4\pi i d z \cos(\psi+\psi_0)} z\, dz\, d\psi\end{aligned}$$

gesetzt. Dann gilt

$$\mathfrak{H}(c, d, \psi_0) = \int\limits_0^\infty J_1^r(z)\, J_0\!\left(\frac{zd}{c}\right) z^{1-r}\, dz\,.$$

Beweis: Verläuft analog zu [2, Hilfssatz 24].

Hilfssatz 9. *Für $l = n_1+1, \ldots, n_1+n_2$ gilt*

$$1 \ll \mathfrak{H}(|\nu^{(l)}|\,T_l, |\nu^{(l)}|, \arg \nu^{(l)}) \ll 1\,.$$

Beweis: Nach Hilfssatz 8 gilt

$$\begin{aligned}\lim_{T_l\to\infty} \mathfrak{H}(|\nu^{(l)}|\,T_l, |\nu^{(l)}|, \arg\nu^{(l)}) &= \int\limits_0^\infty J_1^r(z) \lim_{T_l\to\infty} J_0\!\left(\frac{z}{T_l}\right) z^{1-r}\, dz \\ &= \int\limits_0^\infty J_1^r(z) z^{1-r}\, dz\,,\end{aligned} \tag{26}$$

wobei die Vertauschung der Grenzübergänge gerechtfertigt ist auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz der Integrale bezüglich T_l; diese gleichmäßige Konvergenz resultiert z. B. aus (8) und der Abschätzung [7, 3.1 (8)]:

$$|J_1(z)| \ll |z| \quad \text{für} \quad |z| \leqq 1 .$$

Wenn

$$\int_0^\infty J_1^r(z) z^{1-r}\, dz > 0 \quad \text{für} \quad r \geqq 3 \tag{27}$$

nachgewiesen ist, folgt aus (26) die Behauptung von Hilfssatz 9. Nach [2, (105)] ist (27) richtig für $r \geqq 4$. Für $r = 3$ erhält man mit (8), den Daten [7, Tabelle]: $0 \leqq J_1(z)$ für $0 \leqq z \leqq 3{,}8$; $|J_1(z)| \leqq 0{,}35$ für $3{,}8 \leqq z \leqq 7{,}02$; $0 \leqq J_1(z)$ für $7{,}02 \leqq z \leqq 10$ und der Abschätzung [7, 3.1 (8)]:

$$J_1(z) \geqq \frac{z}{2} - \frac{z^3}{16} \quad \text{für} \quad 0 \leqq z \leqq 2\sqrt{2}$$

die Abschätzung

$$\int_0^\infty J_1^3(z) z^{-2}\, dz \geqq \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{16}\right)^3 z\, dz - \int_{3,8}^{7,02} (0{,}35)^3 z^{-2}\, dz - \int_{10}^\infty z^{-2}\, dz > 0 .$$

q. e. d.

Hilfssatz 10. *Für alle γ aus Γ gilt*

$$\mathfrak{R}_\gamma(\nu) = \frac{(2^{r-2}\pi^{r-1})^{n_2}}{[(r-1)!]^{n_1}} \prod_{l=n_1+1}^{n_1+n_2} \mathfrak{H}(|\nu^{(l)}|\, T_l, |\nu^{(l)}|, \arg \nu^{(l)}) \frac{B^{n(r-1)}}{(nb)^r} + O\left(\frac{B^{n(r-1)}}{b^{r+1}}\right).$$

Beweis: Wie [2, (108) und (109)] leitet man ab:

$$\mathfrak{R}_\gamma(\nu) = \int_{E^*} e^{-2\pi i S(\nu\zeta)}\, \mathfrak{V}^r(\zeta)\, d\zeta^* + O(B^{n(r-1)} b^{-r-1}), \tag{28}$$

wobei

$$\mathfrak{V}(\zeta) = (nb)^{-1} \int_{\mathfrak{T}^*} e^{2\pi i S(\tau\zeta)}\, d\tau^*$$

und $\mathfrak{T}$ die Menge aller τ aus E mit $0 < \tau^{(l)} < \nu^{(l)}$ $(l = 1, \ldots, n_1)$, $|\tau^{(l)}| < |\nu^{(l)}|\, T_l$ $(l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2)$ sei. Aus (28) erhalten wir mittels [2, Hilfssatz 23] und Hilfssatz 8 die Behauptung von Hilfssatz 10.

Aus (22), (23), (24) Hilfssatz 10, Hilfssatz 9, Hilfssatz 7 und der Abschätzung [2, (106)]: $P_m(\gamma) \ll 1$ (für alle Körperzahlen γ) folgt

$$A_r(\nu, T_{n_1+1}, \ldots, T_{n_1+n_2}) =$$

$$\frac{\sqrt{|D|}}{(4\pi)^{n_2}} \left(\frac{w}{2^{n_1-n_2} RH}\right)^r \frac{\mathfrak{S}_r(\nu)}{[(r-1)!]^{n_1}} \prod_{l=n_1+1}^{n_1+n_2} \mathfrak{H}(|\nu^{(l)}|\, T_l, |\nu^{(l)}|, \arg \nu^{(l)}) \frac{B^{n(r-1)}}{N(\mathfrak{t})^{r-1}(nb)^r}$$

$$+ O\left(\frac{B^{n(r-1)}}{b^{r+1}}\right)$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfssatz 7, Hilfssatz 9 und (21) die Behauptung von Satz 6.

Literatur

[1] HASSE, H.: Vorlesungen über Zahlentheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1950.

[2] KÖRNER, O.: Erweiterter Goldbach-Vinogradovscher Satz in beliebigen algebraischen Zahlkörpern. Math. Ann. 143, 344—378 (1961).

[3] MITSUI, T.: On the Goldbach problem in an algebraic number field. I. J. Math. Soc. Japan 12, 290—324 (1960).

[4] RADEMACHER, H.: Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper I: Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summe von totalpositiven Primzahlen im reell-quadratischen Zahlkörper. Abhandl. math. Seminar hamburg. Univ. 3, 109—163 (1924).

[5] SIEGEL, C. L.: Sums of m^{th} powers of algebraic integers. Ann. Math. 46, 313—339 (1945).

[6] VINOGRADOV, I.: Some theorems concerning the theory of primes. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 179—194 (1937).

[7] WATSON, G. N.: A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge, University Press (1922).

(Eingegangen am 7. Februar 1961)

KUHLMANN, N.
Math. Annalen 144, 110—125 (1961)

Die Normalisierung komplexer Räume

Von

NORBERT KUHLMANN in Münster (Westf.)

§ 0

Von O. ZARISKI wurden in [21] die in der Folgezeit sich als fruchtbar erweisenden Begriffe der normalen algebraischen Varietät und der einer algebraischen Varietät assoziierten normalen algebraischen Varietät (oder, wie man auch sagt, der Normalisierung einer algebraischen Varietät) eingeführt und untersucht.

Nun wurde in BEHNKE-STEIN [2], CARTAN [5] der dem Begriffe der normalen algebraischen Varietät analoge Begriff des normalen komplexen Raumes definiert[1]):

Ein komplexer Raum (im Sinne von SERRE [18]) X' heißt ein normaler komplexer Raum, wenn für jeden Punkt $P \in X'$ der Halm $\mathcal{O}_P$ der Strukturgarbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionskeime ein ganz-abgeschlossener Integritätsring ist.

K. OKA zeigte in [14] im wesentlichen den einer bekannten Aussage der algebraischen Geometrie analogen Sachverhalt (siehe auch H. CARTAN [6], Exposés X, XI):

X sei ein komplexer Raum (im Sinne von SERRE [18]) *mit der Singularitätenmenge S. Es existiert ein normaler komplexer Raum X'* (die Normalisierung von X genannt) *mit einer eigentlichen, holomorphen, nirgends entarteten, über $X - S$ biholomorphen Abbildung π': $X' \to X$ von X' auf X,*

bzw. den dazu äquivalenten Satz:

$\mathcal{O}'$ sei diejenige analytische Modulgarbe von meromorphen Funktionskeimen, deren Halme $\mathcal{O}'_P$, $P \varepsilon X$, aus den ganz-abgeschlossenenen Hüllen[2]) der Halme $\mathcal{O}_P$ von $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ = Garbe der holomorphen Funktionskeime über X) *in ihren (totalen) Quotientenringen bestehen. $\mathcal{O}'$ ist eine kohärente analytische Modulgarbe.*

Dieser Sachverhalt ist für viele funktionentheoretische Untersuchungen grundlegend. In dieser Arbeit wird ein weiterer Beweis angegeben.

---

[1]) H. BEHNKE, H. CARTAN und K. STEIN nannten die hier als normal bezeichneten komplexen Räume einfach komplexe Räume. Die wesentliche Übereinstimmung der Begriffsbildungen in [2] und [5] wurde von H. GRAUERT und R. REMMERT in [8] nachgewiesen. In der vorliegenden Arbeit werden die Begriffe „komplexer Raum" (espace analytique), „holomorpher Funktionskeim", „Garbe der holomorphen Funktionskeime" (= Strukturgarbe) im Sinne von SERRE [18] gebraucht. Zu den weiter in der vorliegenden Arbeit benötigten Begriffen siehe vor allem [3], [15], [16], ferner u. U. [10], § 3.

[2]) Integral closure. Zu den in der vorliegenden Arbeit benutzten Begriffen und Sätzen der Algebra siehe VAN DER WAERDEN [20], § 131 und ZARISKI-SAMUEL [23].

Die Beweisidee ist die folgende: Für $P \in X$ ist $\mathcal{O}'_P$ ein endlicher $\mathcal{O}_P$-Modul. $f_1, \ldots, f_S$ seien etwa in einer Umgebung U von P meromorphe Funktionen, die ganz-algebraisch über $\Gamma(U, \mathcal{O})$ sind und die über $\mathcal{O}_P$ den ganzen Halm $\mathcal{O}'_P$ erzeugen[3]): $\mathcal{O}'_P = \mathcal{O}_P \cdot (f_1, \ldots, f_S)$. $f_1, \ldots, f_S$ erzeugen auf natürliche Weise eine meromorphe Abbildung $\mu : U \to \mathbf{C}^S$ ($\mathbf{C}$ = Körper der komplexen Zahlen). Der Graph G_μ von μ wird durch die Projektion $\pi : G_\mu \to U$ eigentlich, holomorph auf U abgebildet; π entartet nirgends und ist über $U - S$ biholomorph (S = Singularitätenmenge von X).

Man zeigt nun (und hier liegt die eigentliche Last des Beweises): *Die Menge der normalen Punkte eines beliebigen komplexen Raumes ist offen* (§ 3, Satz 1).

Da nun $\overset{-1}{\pi}(P) \subset G_\mu$ nur aus (in bezug auf G_μ) normalen Punkten besteht, existiert eine ganze Umgebung V von $\overset{-1}{\pi}(P)$ mit nur normalen Punkten. Da nun $\pi(V)$ eine ganze Umgebung W von P enthält, erzeugen $f_1, \ldots, f_S$ auch für alle $Q \in W$ über $\mathcal{O}_Q$ den Halm $\mathcal{O}'_Q$: Es ist $\mathcal{O}'_Q = \mathcal{O}_Q \cdot (f_1, \ldots, f_S)$. — Hiermit ist gezeigt: $\mathcal{O}'$ ist über $\mathcal{O}$ vom Typ fini. Da nun W so gewählt werden kann, daß in W ein universeller Nenner d existiert (d. h. $d \in \Gamma(W, \mathcal{O})$, d Nichtnullteiler in $\Gamma(W, \mathcal{O})$, also auch Nichtnullteiler in $\mathcal{O}_Q$ für $Q \in W$, $d \cdot \mathcal{O}'_Q \subseteq \mathcal{O}_Q$). Da durch $\varphi(\mathcal{O}'(W)) = d \cdot \mathcal{O}'(W) \subseteq \mathcal{O}(W)$ die Garbe $\mathcal{O}'(W)$ isomorph in $\mathcal{O}(W)$ abgebildet wird, ist mit $\mathcal{O}'(W)$ auch $\varphi(\mathcal{O}'(W))$ vom Typ fini. Da $\varphi(\mathcal{O}'(W))$ aber zudem Untergarbe der kohärenten Garbe $\mathcal{O}(W)$ ist, ist $\varphi(\mathcal{O}'(W))$ — und damit auch $\mathcal{O}'(W)$ — kohärent. Also: $\mathcal{O}'$ ist eine kohärente analytische Modulgarbe.

Die Normalisierung X' von X läßt sich nun folgendermaßen konstruieren: Jedem Punkte $P \in X$ ordnet man eine Umgebung W_P zu mit endlich vielen in bezug auf $\Gamma(W_P, \mathcal{O})$ ganz-algebraischen Funktionen $f_1^{(P)}, \ldots, f_{s_P}^{(P)} \in \Gamma(W_P, \mathcal{O})$, die über $\mathcal{O}(W_P)$ die Garbe $\mathcal{O}'(W_P)$ erzeugen. $f_1^{(P)}, \ldots, f_{s_P}^{(P)}$ definieren in natürlicher Weise eine meromorphe Abbildung $\mu_P : W_P \to \mathbf{C}^{s_P}$ mit dem Graphen G_{μ_P} und der Projektion $\pi_P : G_{\mu_P} \to W_P$, die eigentlich, holomorph, nirgendsentartet und über $W_P - S$ biholomorph ist; G_{μ_P} besitzt nur normale Punkte. — Die G_{μ_P}, $P \in X$, lassen sich nun zu einem normalen komplexen Raum X' zusammenheften, der eine natürliche Abbildung $\pi' : X' \to X$ von X' auf X besitzt, die eigentlich, holomorph, nirgendsentartet und über $X - S$ biholomorph ist.

Das hier beschriebene Verfahren, zu einem komplexen Raum eine Normalisierung anzugeben, wird durch den dazu analogen Prozeß der algebraischen Geometrie (siehe etwa S. Lang [12], Chap. V) nahegelegt. Die eigentliche Schwierigkeit liegt in dem Nachweis, daß die Menge der normalen Punkte eines komplexen Raumes offen ist.

Ein andersartiger Beweis dieses Satzes (und damit des Satzes von Oka) wurde mir in den rohen Grundzügen mündlich von Herrn Prof. Dr. Thimm mitgeteilt, ehe ich den im folgenden dargestellten Beweis fertiggestellt hatte (siehe W. Thimm [19]).

Jeder irreduziblen algebraischen Varietät Y über dem Grundkörper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen[4]) läßt sich in kanonischer Weise ein komplexer Raum Y^*

[3]) Wir werden im folgenden häufig meromorphe Funktionen mit den Funktionskeimen identifizieren, die sie erzeugen.

[4]) Variété algébrique. Wir legen hier die Sprechweise von Serre [17] zugrunde.

zuordnen. Es zeigt sich: Der der Normalisierung (im Sinne der algebraischen Geometrie) Y' von Y zugeordnete komplexe Raum Y'^* ist die Normalisierung (im komplex-analytischen Sinne) von Y^*. — Hieraus folgt unmittelbar: Die Normalisierung eines projektiv einbettbaren komplexen Raumes ist projektiv-einbettbar[5]).

Herrn Dr. MEIS danke ich für wertvolle Hinweise (siehe Lemma 1 und 2).

§ 1

X sei ein komplexer Raum mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionskeime. Für jede in X offene Menge U sei M_U der (totale) Quotientenring von $\Gamma(U, \mathcal{O})$. Da für jede in U offene Menge V ein Nichtnullteiler von $\Gamma(U, \mathcal{O})$ bei der Beschränkung auf V einen Nichtnullteiler in $\Gamma(V, \mathcal{O})$ ergibt (eine Funktion $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ ist genau dann Nichtnullteiler, wenn ihre Nullstellenmenge F auf U dünn liegt; dann ist aber auch $V \cap F$ dünn auf V), existiert ein natürlicher Beschränkungshomomorphismus $\varrho_V^U : M_U \to M_V$. Die zu dem Garbendatum $\{M_U, \varrho_V^U\}$ gehörige analytische Garbe $\mathfrak{M}$ nennt man die Garbe der meromorphen Funktionskeime, und Schnitte in $\mathfrak{M}$ heißen meromorphe Funktionen[6]).

Es zeigt sich: Für $P \in X$ ist der Halm $\mathfrak{M}_P$ von $\mathfrak{M}$ in P in kanonischer Weise zum Quotientenring des Halmes $\mathcal{O}_P$ von $\mathcal{O}$ in P isomorph.

Im folgenden wird daher $\mathfrak{M}_P$ mit dem Quotientenring von $\mathcal{O}_P$ identifiziert werden.

Es sei $\mathfrak{K}$ eine kohärente analytische Modulgarbe von meromorphen Funktionskeimen. Für jede in X offene Menge U sei $K_U^{-1} := \{m \mid m \in \Gamma(U, \mathfrak{M})$ und $\varrho_V^U(m) \cdot \Gamma(V, \mathfrak{K}) \subseteq \Gamma(V, \mathcal{O})$ für jede offene Menge $V \subseteq U\}$. $\mathfrak{K}^{-1}$ sei die zu dem Garbendatum $\{K_U^{-1}, \varrho_V^U\}$ gehörende analytische Garbe von meromorphen Funktionskeimen. Aus der Kohärenz von $\mathfrak{K}$ folgert: Für $P \in X$ ist der Halm $(\mathfrak{K}^{-1})_P$ in natürlicher Weise dem $\mathcal{O}_P$-Modul $\{m \mid m \in \mathfrak{M}_P$ und $m \cdot \mathfrak{K}_P \subseteq \mathcal{O}_P\} =: (\mathfrak{K}_P)^{-1}$ isomorph. Daher werden wir im folgenden $(\mathfrak{K}^{-1})_P$ mit $(\mathfrak{K}_P)^{-1}$ identifizieren und $\mathfrak{K}_P^{-1}$ schreiben.

Unter einfachen Voraussetzungen ist auch $\mathfrak{K}^{-1}$ kohärent:

Lemma 1. *$\mathfrak{K}$ sei eine kohärente, analytische Modulgarbe von meromorphen Funktionskeimen über X. Jeder Punkt $Q \in X$ besitze eine offene Umgebung U_Q mit einer Funktion $f_{U_Q} \in \Gamma(U_Q, \mathfrak{K}) \cap \Gamma(U_Q, \mathcal{O})$, die in $\Gamma(U_Q, \mathcal{O})$ Nichtnullteiler ist. Dann ist $\mathfrak{K}^{-1}$ kohärent.*

Unter den angegebenen Voraussetzungen gilt nämlich: *$\mathfrak{K}^{-1}$ ist in kanonischer Weise zu* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{K}, \mathcal{O})$ *isomorph.* Hieraus folgt dann nach [17], Seite 210, die Kohärenz von $\mathfrak{K}^{-1}$.

Die obigen Aussagen stellen eine leichte Verallgemeinerung von Satz 13 und Korollar 1, Seite 19 in MEIS [13], dar; das dortige Beweisverfahren läßt sich

---

[5]) Ein komplexer Raum heißt projektiv einbettbar, wenn er zu einer analytischen Menge eines (einfach- oder mehrfach-) projektiven Raumes biholomorph äquivalent ist.

[6]) Die hiermit gewählte Definition der meromorphen Funktion ist zu der in [11] gegebenen äquivalent; Schritt d) in [11], Seite 225, ist daher überflüssig.

unmittelbar übertragen; der Vollständigkeit halber sei diese Verallgemeinerung durchgeführt:

$\{\Gamma(U, \mathfrak{K}^{-1}), \varrho_V^U\}$, $\{\Gamma(U, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{K}, \mathcal{O})), \bar{\varrho}_V^U\}$ seien die kanonischen Garbendaten von $\mathfrak{K}^{-1}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{K}, \mathcal{O})$. Wir zeigen, daß für jede in X offene Menge U ein kanonischer $\Gamma(U, \mathcal{O})$-Isomorphismus $\varphi_U : \Gamma(U, \mathfrak{K}^{-1}) \to \Gamma(U, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{K}, \mathcal{O}))$ existiert:

Für $h \in \Gamma(U, \mathfrak{K}^{-1})$ sei $\varphi_U(h)$ derjenige $\mathcal{O}(U)$-Homomorphismus von $\mathfrak{K}(U)$ in $\mathcal{O}(U)$, der $k \in \Gamma(V, \mathfrak{K})$, $V \subseteq U$, das Element $\varrho_V^U(h) \cdot k \in \Gamma(V, \mathcal{O})$ zuordnet. φ_U ist injektiv; denn ist $\varphi_U(h)$ der Nullhomomorphismus, so muß für jeden Punkt $Q \in U$ auch $\bar{\varrho}^U_{U \cap U_Q}(\varphi_U(h))(\varrho^{U_Q}_{U \cap U_Q}(f_{U_Q})) = (\varrho^U_{U \cap U_Q}(h)) \cdot (\varrho^{U_Q}_{U \cap U_Q}(f_{U_Q})) \equiv 0$ gelten, falls $U \cap U_Q \neq \Phi$. Wegen der Nichtnullteilereigenschaft der f_{U_Q} folgt hieraus $h \equiv 0$.

Wir weisen nun die Surjektivität von φ_U nach.

$\psi : \mathfrak{K}(U) \to \mathcal{O}(U)$ sei ein $\mathcal{O}(U)$-Homomorphismus. Man überlege sich zunächst: Für $U_{Q_1} \cap U_{Q_2} \neq \Phi$, $Q_1, Q_2 \in U$, ist

$$\left((\bar{\varrho}^U_{U_{Q_1} \cap U_{Q_2} \cap U}(\psi))(\varrho^{U_{Q_1}}_{U_{Q_1} \cap U_{Q_2} \cap U}(f_{U_{Q_1}}))\right) / \varrho^{U_{Q_1}}_{U_{Q_1} \cap U_{Q_2} \cap U}(f_{U_{Q_1}})$$
$$= \left((\bar{\varrho}^U_{U_{Q_1} \cap U_{Q_2} \cap U}(\psi))(\varrho^{U_{Q_2}}_{U_{Q_1} \cap U_{Q_2} \cap U}(f_{U_{Q_2}}))\right) / \varrho^{U_{Q_2}}_{U_{Q_1} \cap U_{Q_2} \cap U}(f_{U_{Q_2}}) \,.$$

Der kürzeren Schreibweise wegen werden wir im folgenden durchweg die Beschränkungshomomorphismen $\bar{\varrho}_V^U$, ϱ_V^U fortlassen.

Also existiert auf U eine meromorphe Funktion h, die auf $U \cap U_Q$, $Q \in X$, mit $\psi(f_{U_Q})/f_{U_Q}$ übereinstimmt.

Nun zeigt man: Für jedes $k \in \Gamma(V, \mathfrak{K})$, $V \subseteq U$ offen, ist $\psi(k) = hk$. Sei nämlich für $Q \in V$ die Menge $V' \subseteq V \cap U_Q$ eine derartige offene Umgebung von Q, so daß k in V' die Darstellung

$$k = k_1/k_2 \,,$$

$k_1, k_2 \in \Gamma(V', \mathcal{O})$, k_2 Nichtnullteiler in $\Gamma(V', \mathcal{O})$, gestattet. Dann ist $f_{U_Q} \cdot k_2 \cdot \psi(k_1/k_2) = \psi(k_1 \cdot f_{U_Q}) = k_1 \psi(f_{U_Q})$, d. h. aber $\psi(k_1/k_2) = k_1/k_2 \cdot \psi(f_{U_Q})/f_{U_Q} = k \cdot h$. Man sieht sofort, daß $h \in \Gamma(U, \mathfrak{K}^{-1})$. Damit ist die Surjektivität von φ_U nachgewiesen.

Die Beziehung $\varphi_V \circ \varrho_V^U = \bar{\varrho}_V^U \circ \varphi_U (U \supseteq V$ seien offene Mengen auf $X)$ ist trivial und damit ist Lemma 1 bewiesen.

Lemma 2. *Es sei X ein komplexer Raum, N eine rein 1-codimensionale analytische Menge auf X mit der zugehörigen Idealgarbe $\mathfrak{N}$. Die Singularitätenmenge S von X sei mindestens 2-codimensional. Es sei $\mathfrak{N}^{[n]}$ die Garbe derjenigen holomorphen Funktionskeime, die auf N mit mindestens n-ter Ordnung verschwinden.*

Dann ist $\mathfrak{N}^{[n]}$ in kanonischer Weise zu $((\mathfrak{N}^{-1})^n)^{-1}$ isomorph.

Auf diesen Zusammenhang zwischen $\mathfrak{N}^{[n]}$ und $((\mathfrak{N}^{-1})^n)^{-1}$ wurde ich von Herrn Dr. Meis, Münster, aufmerksam gemacht.

Bemerkungen: a) Die Singularitätenmenge S eines komplexen Raumes ist bekanntlich analytisch (siehe Cartan [6], Exposé IX; Abhyankar [1]; oder

[10], Seite 33). Da $\dim S \leq \dim X - 2$ und $\dim_P N = \dim_P X - 1$, für alle $P \in N$, liegt $N - S$ (offen und) dicht auf N. Dasselbe gilt auch für $N - S - S_N$, wobei S_N die Menge der in bezug auf N singulären Punkte bedeutet. Zu jedem Punkte $P \varepsilon N - S - S_N$ gibt es trivialerweise eine Umgebung U_P in X mit einer in U_P holomorphen Funktion ψ_P, die auf U_P die Idealgarbe $\mathfrak{N}(U_P)$ erzeugt. Eine in einer offenen Umgebung V von P holomorphe Funktion f verschwindet in P auf N mit mindestens n-ter Ordnung genau dann, wenn es eine offene Umgebung $V' \subseteq U_P \cap V$ mit einer in V' holomorphen Funktion h gibt, so daß $f = \psi_P^n \cdot h$.

Trivialerweise gilt: Ist $V \cap (N - S - S_N)$ zusammenhängend und verschwindet f in einem $P \varepsilon V \cap (N - S - S_N)$ mit mindestens n-ter Ordnung auf N, so verschwindet f in jedem Punkte von $V \cap (N - S - S_N)$ mit mindestens n-ter Ordnung auf N.

Es sei nun $P \varepsilon (N \cap S) \cup S_N$ und f eine in einer Umgebung V von P holomorphe Funktion. Wir sagen, f verschwinde in P mit mindestens n-ter Ordnung auf N, wenn es eine offene Umgebung $V' \subseteq V$ von P gibt, so daß f in jedem Punkte von $V' \cap (N - S - S_N)$ mit mindestens n-ter Ordnung auf N verschwindet.

Die Garbe $\mathfrak{N}^{[n]}$ ist nach diesen Bemerkungen leicht durch ein Garbendatum zu definieren.

b) Zu jedem Punkte $P \varepsilon X$ existiert — wie unschwer einzusehen ist — eine Umgebung U_P mit einer in U_P holomorphen Funktion $f \in \Gamma(U_P, \mathfrak{N})$, die in $\Gamma(U_P, \mathcal{O})$ Nichtnullteiler ist. Nach Lemma 1 ist $\mathfrak{N}^{-1}$ kohärent, also auch $\bigotimes_1^n \mathfrak{N}^{-1}$. Es existiert ein natürlicher analytischer Homomorphismus von $\bigotimes_1^n \mathfrak{N}^{-1}$ in die Garbe $\mathfrak{M}$ der meromorphen Funktionskeime. Da das Bild $(\mathfrak{N}^{-1})^n$ in der kohärenten analytischen Garbe $(\mathfrak{N}^n)^{-1}$ liegt, ist es kohärent und es existiert $((\mathfrak{N}^{-1})^n)^{-1}$. Da nun die konstante Funktion $1 \in \Gamma(X, (\mathfrak{N}^{-1})^n)$, ergibt Lemma 1 die Kohärenz von $((\mathfrak{N}^{-1})^n)^{-1}$. Trivialerweise ist $((\mathfrak{N}^{-1})^n)^{-1}$ eine analytische Untergarbe von $\mathcal{O}$.

c) Aus Lemma 2 erhalten wir also als Korollar: $\mathfrak{N}^{[n]}$ ist kohärent.

Der Beweis von Lemma 2 erfolgt durch vollständige Induktion nach n.

$n = 1$. Trivialerweise ist $\mathfrak{N}^{[1]} = \mathfrak{N}$. Wir zeigen nun $(\mathfrak{N}^{-1})^{-1} = \mathfrak{N}$. Unmittelbar einsichtig ist $(\mathfrak{N}^{-1})^{-1}(X - S - S_N) = \mathfrak{N}(X - S - S_N)$. Denn zu jedem gewöhnlichen Punkte $P \varepsilon X - S - S_N$ gibt es nach Bemerkung a) eine Umgebung U_P mit einer in U_P holomorphen Funktion ψ_P, die über $\mathcal{O}(U_P)$ die Garbe $\mathfrak{N}(U_P)$ erzeugt. Dann ist $1/\psi_P$ in U_P eine wohldefinierte meromorphe Funktion, die hier $\mathfrak{N}^{-1}(U_P)$ erzeugt. Dann erzeugt aber ψ_P wiederum $(\mathfrak{N}^{-1})^{-1}(U_P)$, d. h. es ist $(\mathfrak{N}^{-1})^{-1}(U_P) = \mathfrak{N}(U_P)$.

Es sei nun U eine offene Menge auf X und f eine Funktion aus $\Gamma(U, (\mathfrak{N}^{-1})^{-1})$. f ist auf U holomorph. Nach dem vorausgehenden verschwindet f auf $(U - S - S_N) \cap N$. Da $(U - S - S_N) \cap N$ auf $U \cap N$ dicht liegt, verschwindet

f auf ganz $U \cap N$, d. h. $f \varepsilon \Gamma(U, \mathfrak{N})$. Da nun trivialerweise $\Gamma(U, \mathfrak{N}) \subseteq \subseteq \Gamma(U, (\mathfrak{N}^{-1})^{-1}) \subseteq \Gamma(U, \mathcal{O})$, ist $\Gamma(U, \mathfrak{N}) = \Gamma(U, (\mathfrak{N}^{-1})^{-1})$. — Hieraus folgert leicht $(\mathfrak{N}^{-1})^{-1} = \mathfrak{N}$.

Wir machen nun die Induktionsannahme, daß $\mathfrak{N}^{[n-1]} = ((\mathfrak{N}^{-1})^{n-1})^{-1}$. Zu zeigen ist, daß dann auch $\mathfrak{N}^{[n]} = ((\mathfrak{N}^{-1})^{n})^{-1}$.

Analog wie für $n = 1$ zeigt man $((\mathfrak{N}^{-1})^{n})^{-1} \subseteq \mathfrak{N}^{[n]}$. Wir zeigen nun $\mathfrak{N}^{[n]} \subseteq \subseteq ((\mathfrak{N}^{-1})^{n})^{-1}$.

Es sei V offen in X und $f \in \Gamma(V, \mathfrak{N}^{[n]})$. Nach Induktionsannahme ist dann $f \varepsilon \Gamma\big(V, ((\mathfrak{N}^{-1})^{n-1})^{-1}\big)$. Es sei nun $V' \subseteq V$ eine offene Menge mit meromorphen Funktionen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \varepsilon \Gamma(V', \mathfrak{N}^{-1})$, d. h. $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n \varepsilon \Gamma(V', (\mathfrak{N}^{-1})^{n})$. Wegen $f \varepsilon \Gamma\big(V, ((\mathfrak{N}^{-1})^{n-1})^{-1}\big)$ ist nun $f \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} = g$ holomorph in V'. Man sieht aber sofort, daß g auf $V' \cap N$ verschwindet; man hat diese Aussage nur für $(V' - S - S_N) \cap N$ nachzuweisen. Wegen $g \varepsilon \Gamma(V', \mathfrak{N}) = \Gamma(V', (\mathfrak{N}^{-1})^{-1})$ ist aber $g \cdot \alpha_n$ holomorph in V'. Mithin liegt f in $\Gamma\big(V, ((\mathfrak{N}^{-1})^{n})^{-1}\big)$, also ist $\Gamma\big(V, ((\mathfrak{N}^{-1})^{n})^{-1}\big) = \Gamma(V, \mathfrak{N}^{[n]})$.

Damit ist Lemma 2 bewiesen.

§ 2

Lemma 3. *X sei ein komplexer Raum mit der Singularitätenmenge S. S ist analytisch und für jeden normalen Punkt $P \varepsilon X$ ist* $\dim_P S \leq \dim_P X - 2$.

Dieser Satz ist wohlbekannt (siehe H. Cartan [6], Exposés X und XI; Abhyankar [1]). Es sei hier ein weiterer Beweis angegeben.

Aus der Kohärenz der zu analytischen Mengen gehörigen Idealgarben wurde bereits in [10], Seite 33, die Analytizität von S gefolgert. Es gibt also nach R. Remmert [15] eine Umgebung U von P, so daß $S \cap U$ in endlich viele irreduzible Komponenten $S_1, \ldots, S_r$ zerfällt, die überdies in P irreduzibel sind. Für $1 \leq i \leq r$ ist $\dim_P S_i \leq \dim_P X - 2$ zu zeigen.

Angenommen, es sei etwa $\dim_P S_1 = \dim_P X - 1$. $\mathfrak{S}$ sei die zu S_1 gehörige Idealgarbe der auf S_1 verschwindenden holomorphen Funktionskeime. Da $\mathcal{O}_P$ ($\mathcal{O}$ sei die Garbe der holomorphen Funktionskeime über X) ein ganz-abgeschlossener Integritätsring ist, bildet

$$\mathcal{O}_{P\mathfrak{S}_P} := \{f/g \mid f \varepsilon \mathcal{O}_P,\ g \varepsilon \mathcal{O}_P - \mathfrak{S}_P\}$$

einen Stellenring, dessen maximales Ideal $\mathcal{O}_{P\mathfrak{S}_P} \cdot \mathfrak{S}_P := \{\Sigma f_i g_i, f_i \varepsilon \mathcal{O}_{P\mathfrak{S}_P}, g_i \varepsilon \mathfrak{S}_P\}$ nach einem Satze der Algebra (siehe [23], Seite 278, Theorem 16) ein Hauptideal ist (hier wird wesentlich ausgenutzt, daß $\mathfrak{S}_P$ in $\mathcal{O}_P$ ein minimales Primideal und $\mathcal{O}_{P\mathfrak{S}_P}$ ein Dedekindscher Ring mit dem einzigen echten Primideal $\mathcal{O}_{P\mathfrak{S}_P} \cdot \mathfrak{S}_P$ ist): also $\mathcal{O}_{P\mathfrak{S}_P} \cdot \mathfrak{S}_P = \sigma_P \cdot \mathcal{O}_{P\mathfrak{S}_P}$ für ein $\sigma_P \in \mathfrak{S}_P$. $\mathfrak{S}$ ist kohärent. Also gibt es eine Umgebung $U' \subseteq U$ von P, so daß $\mathfrak{S}(U')$ über $\mathcal{O}(U')$ durch endlich viele Schnitte $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ erzeugt wird. Ferner gibt es eine Umgebung $U'' \subseteq U'$ von P mit einer in U'' holomorphen Funktion σ, die in P den Keim σ_P erzeugt. Es gibt eine Umgebung $U''' \subseteq U''$ von P mit in U''' holomorphen Funktionen a_i, b_i, c_i, $i = 1, \ldots, m$, die die Relationen

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} a_i \sigma_i, \quad b_i \sigma_i = c_i \sigma, \quad (b_i)_P \notin \mathfrak{S}_P\,,$$

($(b_i)_P =$ der von b in P erzeugte Keim) erfüllen.

B sei die Vereinigung der Nullstellen von $b_1, \ldots, b_m$. Wegen $(b_i)_P \notin \mathfrak{S}_P$ dringt S_1 in $U''' - B$ ein. S' sei die Menge aller in bezug auf S_1 nichtgewöhnlichen Punkte. Nach [10], Seite 33, ist in S_1 die Menge S' dünn, analytisch. Wir zeigen: Jeder Punkt Q der (nichtleeren!) Menge $S_1 \cap (U''' - B - S')$ ist gewöhnlich in bezug auf X. Das ist ein Widerspruch zu $Q \varepsilon S_1$.

Da diese Behauptung lokaler Natur ist, können wir annehmen, daß U''' eine analytische Menge eines Gebietes G im $\mathbf{C}^n$ ist. Da die zu U''' gehörige Idealgarbe $\mathfrak{U}$ über G kohärent ist, gibt es eine in G offene Umgebung V von Q mit endlich vielen in V holomorphen Funktionen $u_1, \ldots, u_t$, die über V die Garbe $\mathfrak{U}(V)$ erzeugen. Ferner existiert eine in G offene Umgebung $V' \subseteq V$ von Q mit einer in V' holomorphen Funktion u_{t+1}, die auf $V' \cap U'''$ die Funktion σ induziert; $u_1, u_2, \ldots, u_t, u_{t+1}$ erzeugen also in einer Umgebung von Q die zu $V' \cap S_1$ gehörige Idealgarbe über V', da σ in $U''' - B$ die zu $S_1 - B$ gehörige Idealgarbe über $U''' - B$ erzeugt. Da nun Q gewöhnlich in bezug auf S_1 ist, ist der Rang der Matrix

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\Big/ Q \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, t, t+1 \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

(der $\mathbf{C}^n$ sei mit einem $(x_1, \ldots, x_n)$-Koordinatensystem versehen) gleich n-$\dim_Q S_1$, also $= n - \dim_Q X + 1$. Hieraus folgt, daß der Rang der Matrix

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\Big/ Q \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, t \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

$\geqq n - \dim_Q X$. Da dieser Rang aber trivialerweise $\leqq n - \dim_Q X$ sein muß, ist er gleich $n - \dim_Q X$. Also ist Q gewöhnlich in bezug auf X, im Widerspruch zu $Q \in S_1$.

§ 3

Es sei nun wiederum X ein komplexer Raum mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}$, der Garbe $\mathfrak{M}$ der meromorphen Funktionskeime und der Singularitätenmenge S. P sei ein normaler Punkt auf X, d. h. $\mathcal{O}_P$ sei ein ganz-abgeschlossener Integritätsring. Also gibt es eine offene, irreduzible Umgebung U von P, die überdies in P irreduzibel ist (nach R. REMMERT [15]). Nach Lemma 3 gibt es eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ (U' kann wegen der Irreduzibilität von U in P auch als irreduzibel gewählt werden), so daß $\dim(S \cap U') \leqq \dim U' - 2$. Nach einem bekannten Satze (siehe z. B. [4], Chap. X, § 3) existiert eine offene Umgebung $U'' \subseteq U'$ von P mit einer in U'' holomorphen Funktion d (ein sog. universeller Nenner in U''), die die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. d ist Nichtnullteiler in $\Gamma(U'', \mathcal{O})$.

2. Ist $U''' \subseteq U''$ eine offene Menge, $\alpha \varepsilon \Gamma(U''', \mathfrak{M})$ eine in bezug auf $\Gamma(U''', \mathcal{O})$ ganz-algebraische meromorphe Funktion, d. h. genügt α einer Gleichung

$$\alpha^m + a_1 \cdot \alpha^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

mit $a_1, \ldots, a_m \varepsilon \Gamma(U''', \mathcal{O})$, so ist $d \cdot \alpha \varepsilon \Gamma(U''', \mathcal{O})$.

U'' sei irreduzibel; da U in P irreduzibel, ist auch U'' in P irreduzibel. Ferner sei U'' bereits so klein gewählt, daß die Nullstellenmenge von d in U'' in endlich viele irreduzible Komponenten $N_1, \ldots, N_r$ zerfällt, die ihrerseits auch in P irreduzibel sind; nach [15] kann U'' so gewählt werden. $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_r$ seien die $N_1, \ldots, N_r$ zugeordneten Idealgarben der auf N_1 bzw. $N_2, \ldots,$ bzw. N_r verschwindenden holomorphen Funktionskeime.

Da $\mathcal{O}_P$ ganz-abgeschlossen ist, ist das von d in $\mathcal{O}_P$ erzeugte Hauptideal $\mathcal{O}_P \cdot d$ nach einem Satze der Algebra (vgl. etwa [23], Seite 277, Theorem 14, oder [20], § 131) Durchschnitt von endlich vielen symbolischen Primidealpotenzen $\mathfrak{n}_j^{(n_j)}$ minimaler Primideale $\mathfrak{n}_j$ in $\mathcal{O}_P$. Die $\mathfrak{n}_j$ können wir mit den Halmen $\mathfrak{N}_{j,P}$ der Garben $\mathfrak{N}_j$ identifizieren. Wegen der Ganz-abgeschlossenheit von $\mathcal{O}_P$ gilt nun (siehe etwa [20], § 131, Seite 139)

$$\mathfrak{N}_{j,P}^{(n_j)} = ((\mathfrak{N}_{j,P}^{n_j})^{-1})^{-1} = ((\mathfrak{N}_{j,P}^{-1})^{n_j})^{-1},$$

und da sich nach Lemma 2 $((\mathfrak{N}_{j,P}^{-1})^{n_j})^{-1}$ mit $\mathfrak{N}_{j,P}^{[n_j]}$ identifizieren läßt, erhalten wir

$$\mathcal{O}_P \cdot d = \bigcap_{j=1}^{r} \left(((\mathfrak{N}_j^{-1})^{n_j})^{-1}\right)_P = \bigcap_{j=1}^{r} \mathfrak{N}_{j,P}^{[n_j]}.$$

(Nach einer zu Beginn gemachten Bemerkung ist

$$\left(((\mathfrak{N}_j^{-1})^{n_j})^{-1}\right)_P = ((\mathfrak{N}_{j,P}^{-1})^{n_j})^{-1}.)$$

Da die $\mathfrak{N}_j^{[n_j]}$ kohärent sind, ist auch $\bigcap_{j=1}^{r} \mathfrak{N}_j^{[n_j]}$ kohärent. Hieraus folgert:

Es gibt eine offene Umgebung $U'''' \subsetneq U'''$ von P, so daß d in U'''' über $\mathcal{O}(U'''')$ die Garbe $\bigcap_{j=1}^{r} \mathfrak{N}_j^{[n_j]}(U'''')$ erzeugt.

Wir behaupten nun, daß jeder Punkt $Q \in U''''$ normal ist. Zum Beweis genügt es zu zeigen: Ist $V \subsetneq U''''$ eine offene Umgebung von Q, $\alpha \in \Gamma(V, \mathfrak{M})$ eine meromorphe Funktion, die einer Gleichung

$$\alpha^m + a_1 \cdot \alpha^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

mit $a_1, \ldots, a_r \in \Gamma(V, \mathcal{O})$ genügt, so liegt α in $\Gamma(V, \mathcal{O})$. Nun ist aber $g = d \cdot \alpha \in \Gamma(V, \mathcal{O})$. g verschwindet auf $V \cap N_j$ mit mindestens derselben Ordnung wie d; man hat diese Behauptung nur in $(V - S) \cap N$ nachzuweisen, was aber trivial ist. Also verschwindet g auf N mit mindestens der Ordnung n_j, d. h. $g \in \Gamma\left(V, \bigcap_{j=1}^{r} \mathfrak{N}_j^{[n_j]}\right) = \Gamma(V, \mathcal{O}(U''') \cdot d)$. Jeder Punkt $R \in V$ besitzt also eine offene Umgebung $V' \subsetneq V$ mit einer in V' holomorphen Funktion h, so daß in V' $g = d \cdot h$ gilt, also $\alpha = h \in \Gamma(V', \mathcal{O})$. Da die V' die Menge V überdecken, ist α in V holomorph. — Also sind die Halme $\mathcal{O}_Q$, $Q \in U''''$, ganz-abgeschlossen in ihren Quotientenringen. Nach [8], Satz 21, ist $\mathcal{O}_Q$ ein Integritätsring[6a]). Damit ist bewiesen

Satz 1. *Die Menge der normalen Punkte eines komplexen Raumes X ist offen.*

[6a]) Es gilt allgemeiner: A sei ein Stellenring ohne nilpotente Elemente. Ist A ganz abgeschlossen in seinem Quotientenring, so ist A ein Integritätsring (siehe z. B. P. Samuel, Algèbre locale, Mémorial des Sci. Math. Fasc. CXXIII, Paris 1953, S. 58).

§ 4

1. X sei ein komplexer Raum mit der Singularitätenmenge S, der Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionskeime und der Garbe $\mathfrak{M}$ der meromorphen Funktionskeime. Für jede offene Menge U von X sei H'_U die ganz-abgeschlossene Hülle von $\Gamma(U, \mathcal{O})$ in $\Gamma(U, \mathfrak{M})$; H'_U besteht also aus der Menge aller $f \varepsilon \Gamma(U, \mathfrak{M})$, die einer Relation

$$f^{n_f} + a_1^{(f)} f^{n_f - 1} + \cdots + a_{n_f}^{(f)} = 0$$

mit Koeffizienten $a_1^{(f)}, \ldots, a_{n_f}^{(f)} \varepsilon \Gamma(U, \mathcal{O})$ genügen. Die H'_U ergeben in natürlicher Weise ein Garbendatum $\{H'_U, \varrho_V^U\}$. Die zugehörige analytische Modulgarbe von meromorphen Funktionskeimen bezeichnen wir mit $\mathcal{O}'$. Für ein festes $P \varepsilon X$ läßt sich der Halm $\mathcal{O}'_P$ mit der ganz-abgeschlossenen Hülle von $\mathcal{O}_P$ in $\mathfrak{M}_P$ identifizieren.

Es gilt der einfache Satz: $\mathcal{O}'_P$ ist ein endlicher $\mathcal{O}_P$-Modul (siehe CARTAN [6], Exposé X, Theorem 1). Es existiert also eine Umgebung U von P mit endlich vielen in U meromorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_s \varepsilon \Gamma(U, \mathcal{O}')$, so daß $\mathcal{O}'_P = \mathcal{O}_P \cdot \cdot (f_1, \ldots, f_s)$.

$f_1, \ldots, f_s$ induzieren eine meromorphe Abbildung $\mu : U \to \mathbf{C}^s$:

Ist etwa S die Singularitätenmenge von X, so liegt $U - S$ offen, dicht in U und $f_1, \ldots, f_s$ sind hier holomorph. Also ist für jedes $Q \varepsilon U - S$ $\mu(Q) = (f_1(Q), \ldots, f_s(Q))$ ein wohldefinierter Punkt des $\mathbf{C}^s$. Für jedes $Q \varepsilon U \cap S$ sei $\mu(Q)$ die Menge aller $P \varepsilon \mathbf{C}^s$, für die gilt: Es existiert eine gegen Q konvergierende Punktfolge $Q_\nu \varepsilon U - S$, $\nu = 1, 2, \ldots$, so daß $\mu(Q_\nu)$ gegen P konvergiert. Es sei $G_\mu := \{(Q, P) \mid Q \varepsilon U, P \varepsilon \mu(Q)\}$ der Graph von μ. G_μ ist die in $U \times \mathbf{C}^s$ abgeschlossene Hülle von $\{(Q, \mu(Q)) \mid Q \varepsilon U - S\} \subseteq (U - S) \times \mathbf{C}^s$.

2. Wir zeigen nun: G_μ ist in $U \times \mathbf{C}^s$ analytisch und die natürliche Projektion $\pi : G_\mu \to U$ ist eine eigentliche, nirgendsentartete, holomorphe Abbildung, die über $U - S$ biholomorph abbildet.

a) Jedem Punkte $Q \varepsilon U$ läßt sich eine Umgebung $V \subseteq U$ mit in V holomorphen Funktionen $f_i^{(1)}, f_i^{(2)} \varepsilon \Gamma(V, \mathcal{O})$, $i = 1, \ldots, s$, $f_i^{(2)}$ Nichtnullteiler in $\Gamma(V, \mathcal{O})$ und $f_i = f_i^{(1)}/f_i^{(2)}$ in V zuordnen. Sei der $\mathbf{C}^s$ mit einem $(x_1, \ldots, x_s)$-Koordinatensystem versehen und betrachten wir in $V \times \mathbf{C}^s$ die durch

$$x_i f_i^{(2)} - f_i^{(1)} = 0\,, \quad i = 1, \ldots, s$$

beschriebene analytische Menge G. Ist F die Vereinigungsmenge der Nullstellen der $f_i^{(2)}$, so liegt F wegen der Nichtnullteilereigenschaft der $f_i^{(2)}$ in V dünn und es gilt trivialerweise $[(V - F) \times \mathbf{C}^s] \cap G_\mu = [(V - F) \times \mathbf{C}^s] \cap G$. — Beachten wir nun den Satz

$\tilde{F}$ und $\tilde{G}$ seien analytische Mengen eines komplexen Raumes Y. Dann ist die abgeschlossene Hülle von $(Y - \tilde{F}) \cap \tilde{G}$ auf Y ebenfalls analytisch (siehe den Beweis von Satz 33 in R. REMMERT [16]; oder [11], Seite 224).

Da nun $G_\mu \cap [V \times \mathbf{C}^s]$ in $V \times \mathbf{C}^s$ die abgeschlossene Hülle von $[(V - F) \times \mathbf{C}^s] \cap G$ darstellt, ist $G_\mu \cap [V \times \mathbf{C}^s]$ in $V \times \mathbf{C}^s$ analytisch.

Also ist G_μ in $U \times \mathbf{C}^s$ analytisch.

b) Für $Q \varepsilon U$ besteht $\overset{-1}{\pi}(Q)$ aus endlich vielen Punkten: Zu Q gibt es nämlich eine Umgebung V mit in V holomorphen Funktionen a_{ij}, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, n_i$, so daß auf V die Relationen

$$f_i^{n_i} + a_{i1} f_i^{n_i - 1} + \cdots + a_{in_i} = 0$$

erfüllt sind. Sei nun $R = (r_1, \ldots, r_s) \varepsilon \mu(Q) \subset \mathbf{C}^s$. Für $1 \leqq i \leqq s$ muß dann

$$r_i^{n_i} + a_{i1}(Q) r_i^{n_i - 1} + \cdots + a_{in_i}(Q) = 0$$

gelten. Da bei festem Q aber die Gleichung

$$y^{n_i} + a_{i1}(Q)\, y_i^{n_i - 1} + \cdots + a_{in_i}(Q) = 0$$

nur endlich viele Lösungen aufweist, kann $\mu(Q)$ höchstens aus nur endlich vielen Punkten bestehen.

c) π ist eigentlich. Andernfalls gäbe es eine kompakte Menge $K \subsetneqq U$, so daß $\overset{-1}{\pi}(K)$ nicht kompakt ist. Da $\overset{-1}{\pi}(K)$ in $K \times \mathbf{C}^s$ abgeschlossen und $\pi_1 : K \times \mathbf{C}^s \to \mathbf{C}^s$ eigentlich ist, ist $\mu(K) = \pi_1(\overset{-1}{\pi}(K)) = K'$ abgeschlossen, aber nicht kompakt, also nicht beschränkt. Nun kann in b. V so gewählt werden, daß für $S \varepsilon V$ die Lösungen von

$$y^{n_i} + a_{i1}(S) y^{n_i - 1} + \cdots + a_{in_i}(S) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, s$$

in einem beschränkten Gebiet G_i des $\mathbf{C}^1$ liegen, also $\mu(V) \subset G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s \subset \mathbf{C}^s$. Wegen der Kompaktheit von K kann diese Menge mit endlich vielen dieser V überdeckt werden. Also ist $\mu(K)$ beschränkt. Widerspruch.

d) Die Aussage, daß *π die Menge $\overset{-1}{\pi}(U - S)$ biholomorph auf $U - S$ abbildet,* ist trivial.

3. *Die endlich vielen Punkte von $\overset{-1}{\pi}(P)$ sind auf G_μ normale Punkte.* Es sei $R \varepsilon \overset{-1}{\pi}(P)$:

a) Zunächst: *Ist $\tilde{d} \in \tilde{\mathcal{O}}_R$* ($\tilde{\mathcal{O}}$ = Garbe der holomorphen Funktionskeime auf G_μ) *eine Funktion, die durch Liftung einer in P meromorphen Funktion $d_1 \in \mathfrak{M}_P$ erhalten wird* (d. h. $\tilde{d} = d_1 \circ \pi$) *und ist $\tilde{d}$ Nichtnullteiler in $\tilde{\mathcal{O}}_R$, so existiert ein Nichtnullteiler d in $\mathfrak{M}_P$ mit $d \circ \pi = \tilde{d}$.*

Beweis. d_1 sei in einer Umgebung $U' \subsetneqq U$ von P holomorph. Nach R. Remmert [15] gibt es eine Umgebung $U'' \subsetneqq U'$ mit der Eigenschaft: U'' zerfällt in endlich viele irreduzible, in P irreduzible Komponenten $U_1, \ldots, U_r$. d verschwinde etwa identisch auf $U_1, U_2, \ldots, U_l$, $1 \leqq l < r$, und verschwinde nicht identisch auf $U_{l+1}, \ldots, U_r$[6b]).

[6b]) Die meromorphe Funktion d verschwindet identisch auf U_i, wenn sie in allen Punkten von U_i, in denen sie holomorph ist, verschwindet — mit anderen Worten: wenn die Beschränkung von d auf U_i identisch verschwindet. — Über die Beschränkung von meromorphen Funktionen siehe [10], Seite 37, 38.

Dann existiert (siehe z. B. S. HITOTUMATU [9], Seite 612) für jedes U_i ein $h_i \in \mathfrak{M}_P$, so daß h_i, beschränkt auf U_i, die Funktion identisch 1, beschränkt auf U_j, $i \neq j$, die Funktion identisch 0 ergibt. — Für $d = h_1 + h_2 + \cdots + h_l + d_1$ gilt $d \circ \pi = \tilde{d} \in \tilde{\mathcal{O}}_R$.

b) O. B. d. A. sei U eine lokal-analytische Menge eines $\mathbf{C}^m$, der mit einem $z_1, \ldots, z_m$ Koordinatensystem versehen sei: Für $1 \leq i \leq m$ sei $\bar{\bar{z}}_i$ die Beschränkung von z_i auf U, $\bar{z}_i$ die Beschränkung von z_i auf $G_\mu \subset \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^s$, für $1 \leq j \leq s$ sei $\bar{x}_j$ die Beschränkung von x_j auf G_μ; es ist $\bar{z}_i = \bar{\bar{z}} \circ \pi$.

Die in R meromorphe Funktion f genüge nun einer Gleichung

$$f^n + a_1 f^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

mit Koeffizienten $a_k \varepsilon \tilde{\mathcal{O}}_R$, $k = 1, \ldots, n$. Die a_k sind holomorphe Funktionen in $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s$. Da aber die $\bar{x}_j$ ganz-algebraisch in bezug auf nur in $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m$ holomorphe Funktionen [7]) aus $\tilde{\mathcal{O}}_R$ sind, genügt f bereits einer Gleichung

$$f^{n^*} + b_1 f^{n^*-1} + \cdots + b_{n^*} = 0\,,$$

wobei $b_1, \ldots, b_{n^*}$ nur in $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m$ holomorphe Funktionen sind, sich also durch Liftung von in P holomorphen Funktionen $\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_{n^*}$ gewinnen lassen.

Es ist nur noch zu zeigen, daß f sich durch Liftung einer in P meromorphen Funktion $\tilde{f}$ erhalten läßt.

Bemerken wir zunächst: Jede Funktion $g \varepsilon \tilde{\mathcal{O}}_R$ läßt sich in der Form $g = c_1 \bar{x}_1 + \cdots + c_s \bar{x}_s$ mit in R holomorphen Koeffizienten $c_1, \ldots, c_s$ schreiben, wobei $c_1, \ldots, c_s$ nur in $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m$ holomorphe Funktionen sind, also Funktionen $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_s \in \mathcal{O}_P$ mit $\tilde{c}_1 \circ \pi = c_1, \ldots, \tilde{c}_s \circ \pi = c_s$ existieren. Dann ist

$$g = (\tilde{c}_1 \cdot f_1 + \cdots + \tilde{c}_s \cdot f_s) \circ \pi\,.$$

f ist von der Form g_1/g_2 mit $g_1, g_2 \varepsilon \tilde{\mathcal{O}}_R$, g_2 Nichtnullteiler in $\tilde{\mathcal{O}}_R$. Die vorausgehende Bemerkung und a. ergeben die Existenz einer in P meromorphen Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f} \circ \pi = f$. Da wegen

$$\tilde{f}^{n*} + \tilde{b}_1 \tilde{f}^{n*-1} + \cdots + \tilde{b}_{n*} = 0$$

$\tilde{f}$ in $\mathcal{O}_P \cdot (f_1, \ldots, f_s) = \mathcal{O}'_P$ liegt, $\tilde{f} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i f_i$, $\alpha_i \varepsilon \mathcal{O}_P$, ist $f = \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i \circ \pi)\, \bar{x}_i$, also in R holomorph. — Also ist $\tilde{\mathcal{O}}_R$ in seinem Quotientenring ganz abgeschlossen. Dann ist nach [8], Satz 21[7a]), $\tilde{\mathcal{O}}_R$ ein Integritätsring.

4. Auf Grund von Satz 1 (§ 3) ist also *eine ganze Umgebung W' von $\overset{-1}{\pi}(P)$ normal.*

5. *Jede Umgebung von $\overset{-1}{\pi}(P)$ wird auf eine Umgebung von P abgebildet.*

Angenommen, es gäbe eine Umgebung V' von $\overset{-1}{\pi}(P)$, so daß $\pi(V')$ keine Umgebung von P enthält, d. h. daß jede Umgebung W von P einen zu $\pi(V')$ fremden Punkt Q besitzt. Es existiert also eine gegen P konvergierende Punktfolge $P_\nu \notin \pi(V')$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Dann muß wegen der Eigentlichkeit von π die

[7]) Wir nennen eine Funktion holomorph in $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m$, wenn sie durch Beschränkung einer holomorphen Funktion in den komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_m$ gewonnen wird.

[7a]) Vgl. Fußnote 6a).

Menge $\overset{-1}{\pi}(P_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ aber mindestens einen Punkt von $\overset{-1}{\pi}(P)$ als Häufungspunkt besitzen. Wegen $\overset{-1}{\pi}(P_\nu) \nsubseteq V'$ für alle ν kann dies aber nicht sein. Widerspruch.

Man überlegt sich überdies unschwer: Die Anzahl der Punkte von $\overset{-1}{\pi}(P)$ ist gleich der Anzahl der irreduziblen Komponenten von U in P.

6. Wegen 4. und 5. *gibt es also eine ganze Umgebung W von P, so daß für $Q \varepsilon W$ die Funktionen $f_1, \ldots, f_s$ über $\mathcal{O}_Q$ die ganz-abgeschlossene Hülle $\mathcal{O}'_Q$ von $\mathcal{O}_Q$ in $\mathfrak{M}_Q$ erzeugen.*

7. Nach 6. ist $\mathcal{O}'$ vom Typ fini. In jedem $P \varepsilon X$ gibt es eine Umgebung W mit einem universellen Nenner $d \varepsilon \Gamma(W, \mathcal{O})$ (d. h. d ist Nichtnullteiler in $\Gamma(W, \mathcal{O})$, damit auch für $Q \varepsilon W$ in $\mathcal{O}_Q$; überdies gilt $d \cdot \mathcal{O}'_Q \subseteq \mathcal{O}_Q$). Die Abbildung $f \to df$, $f \varepsilon \mathcal{O}'_Q$, $Q \varepsilon W$, ergibt einen Garbenisomorphismus von $\mathcal{O}'(W)$ auf die Untergarbe $d \cdot \mathcal{O}'(W)$ von $\mathcal{O}(W)$. Mit $\mathcal{O}'(W)$ ist auch $d \cdot \mathcal{O}'(W)$ vom Typ fini, wegen der Kohärenz von $\mathcal{O}(W)$ also auch kohärent. Also ist auch $\mathcal{O}'(W)$, also $\mathcal{O}'$ *kohärent*.

Satz 2. *Die Garbe $\mathcal{O}'$ über X ist kohärent.*

Hieraus folgert wie in Cartan [6], Exposé X, daß *die Menge der nichtnormalen Punkte auf X analytisch ist*; denn diese Menge ist genau die Trägermenge der kohärenten analytischen Quotientengarbe $\mathcal{O}'/\mathcal{O}$. Die Trägermenge einer kohärenten analytischen Garbe ist aber analytisch.

8. Aus 6. ziehen wir noch eine weitere Folgerung: Jedem Punkt $P \varepsilon X$ ordnen wir eine Umgebung W_P mit in W_P meromorphen Funktionen $f_1^{(P)}, \ldots, f_{s_P}^{(P)} \varepsilon \Gamma(W, \mathcal{O}')$ zu, die über $\mathcal{O}(W_P)$ die Garbe $\mathcal{O}'(W_P)$ erzeugen. Gemäß dem vorhin beschriebenen Verfahren induzieren $f_1^{(P)}, \ldots, f_{s_P}^{(P)}$ eine meromorphe Abbildung $\mu_P\colon W_P \to \mathbf{C}^{s_P}$ mit dem Graphen G_{μ_P} und der Projektion $\pi_P\colon G_{\mu_P} \to W_P$. G_{μ_P} ist ein normaler komplexer Raum.

Die G_{μ_P} lassen sich zu einem über X liegenden komplexen Raum X' zusammenheften. Für $P_1, P_2 \varepsilon X$, $W_{12} = W_{P_1} \cap W_{P_2}$ ist nämlich $\overset{-1}{\pi}_{P_1}(W_{12})$ zu $\overset{-1}{\pi}_{P_2}(W_{12})$ in natürlicher Weise biholomorph äquivalent:

Da $f_1^{(P_1)}, \ldots, f_{s_{P_1}}^{(P_1)}$ wie auch $f_1^{(P_2)}, \ldots, f_{s_{P_2}}^{(P_2)}$ über $\mathcal{O}(W_{12})$ Garbe $\mathcal{O}'(W_{12})$ erzeugen, gibt es zu jedem $Q \varepsilon W_{12}$ eine Umgebung V_Q mit in V_Q holomorphen Funktionen $\alpha_{i\nu}$, $\beta_{\nu i}$, $i = 1, \ldots, s_{P_1}$, $\nu = 1, \ldots, s_{P_2}$, so daß in V_Q

$$f_i^{(P_1)} = \sum_{\nu=1}^{s_{P_2}} \alpha_{i\nu} \cdot f_\nu^{(P_2)}.$$

$$f_\nu^{(P_2)} = \sum_{i=1}^{s_{P_1}} \beta_{\nu i} \cdot f_i^{(P_1)}.$$

Ordnen wir jedem Punkte $T' = T \times (t'_1, \ldots, t'_{s_{P_1}}) \varepsilon \overset{-1}{\pi}_{P_1}(V_Q)$ den Punkt $\sigma_Q(T') = T'' = T \times (t''_1, \ldots, t''_{s_{P_2}}) \varepsilon W_{P_2} \times \mathbf{C}^{s_{P_2}}$ mit $t''_\nu = \sum_{i=1}^{s_{P_1}} \beta_{\nu i}(T) \cdot t'_i$, $\nu = 1, \ldots, s_{P_2}$, zu, so wird durch σ_Q die Menge $\overset{-1}{\pi}_{P_1}(V_Q)$ in $\overset{-1}{\pi}_{P_2}(V_Q)$ abgebildet: Es ist ja $\sigma_Q\big(\overset{-1}{\pi}_{P_1}(V_Q - S)\big) = \overset{-1}{\pi}_{P_2}(V_Q - S)$.

Die Abbildung $\tau_Q\colon \overset{-1}{\pi}_{P_2}(V_Q) \to \overset{-1}{\pi}_{P_1}(V_Q)$, die jedem Punkte $T \times (t''_1, \ldots, t''_{s_{P_2}})$ den Punkt $T \times (t'_1, \ldots, t'_{s_{P_1}}) \varepsilon \overset{-1}{\pi}_{P_1}(V_Q)$ mit $t'_i = \sum_{\nu=1}^{s_{P_2}} \alpha_{i\nu}(T) \cdot t''_\nu$, $i = 1, \ldots, s_{P_1}$, zuordnet, erweist sich leicht als die Umkehrabbildung $\overset{-1}{\sigma}_Q$ von σ_Q. σ_Q ist also biholomorph.

Jedem $Q \varepsilon W_{12}$ läßt sich nun ein $V_Q \subseteq W_{12}$ mit einer biholomorphen Abbildung $\sigma_Q\colon \overset{-1}{\pi}_{P_1}(V_Q) \to \overset{-1}{\pi}_{P_2}(V_Q)$ zuordnen und für $Q_1, Q_2 \varepsilon W_{12}$, $V_{12} = V_{Q_1} \cap V_{Q_2}$, stimmen σ_{Q_1} und σ_{Q_2} auf $\overset{-1}{\pi}_{P_1}(V_{12})$ überein. Also induzieren die σ_Q eine biholomorphe Abbildung $f_{P_1P_2}\colon \overset{-1}{\pi}_{P_1}(W_{12}) \to \overset{-1}{\pi}_{P_2}(W_{12})$.

Für $P_1, P_2 \varepsilon X$ lassen sich also vermöge $f_{P_1P_2}$ die Graphen $G_{\mu P_1}$ und $G_{\mu P_2}$ über $W_{P_1} \cap W_{P_2}$ verheften. Wir erhalten so einen normalen komplexen Raum X' mit einer eigentlichen, holomorphen, nirgendsentarteten, über $X - S$ biholomorphen Abbildung $\pi\colon X' \to X$. Zum Beweis dieser Aussage ist nur noch zu überlegen, daß X' hausdorffsch ist; das ist aber trivial.

Ist nun X'' ein weiterer normaler, komplexer Raum mit einer eigentlichen, nirgendsentarteten, über $X - S$ biholomorphen Abbildung $\pi''\colon X'' \to X$, so existiert z. B. nach [10], § 3, eine natürliche bimeromorphe Abbildung von X'' auf X. Da diese aber in beiden Richtungen keine Entartungspunkte besitzt, muß sie nach R. REMMERT [16] biholomorph sein.

Satz 3. *Zu einem komplexen Raum X mit der Singularitätenmenge S existiert ein normaler komplexer Raum X' mit einer eigentlichen, holomorphen, über $X - S$ biholomorphen Abbildung $\pi'\colon X' \to X$. X' ist durch diese Eigenschaften bis auf Biholomorphie eindeutig bestimmt.*

X' heißt die Normalisierung von X.

§ 5

a) [6]). Es interessiert, ob außer Analogien noch ein weiterer Zusammenhang zwischen dem hier definierten komplex-analytischen Normalisierungsverfahren und den entsprechenden Prozessen der algebraischen Geometrie besteht. — Es wird gezeigt

Satz 4. *Es sei Y eine irreduzible algebraische Varietät über dem Grundkörper* **C** *der komplexen Zahlen, Y^* der zugeordnete komplexe Raum, Y' die Normalisierung von Y (im Sinne der algebraischen Geometrie). Dann ist der Y' zugeordnete komplexe Raum die Normalisierung von Y^* (im analytischen Sinne).*

Da mit Y auch Y' projektiv-algebraisch ist (siehe etwa [12], Chap. V; diese Aussage wurde zuerst von O. ZARISKI in [21] bewiesen) folgt aus Satz 4:

Die Normalisierung eines projektiv-einbettbaren komplexen Raumes ist wiederum projektiv-einbettbar.

Hierbei heißt ein komplexer Raum projektiv-einbettbar, wenn er zu einer analytischen Menge eines (ein- oder mehrfach-) projektiven Raumes biholomorph äquivalent ist.

---

[6]) Zu den in § 5 benutzten Begriffen und Sätzen der algebraischen Geometrie siehe [12], [17]; vor allem werden die Ergebnisse in SERRE [18] stark herangezogen.

In Satz 4 ist enthalten

Satz 4'. *Der einer irreduziblen, normalen algebraischen Varietät zugeordnete komplexe Raum ist normal (im komplex-analytischen Sinne).*

Es genügt, Satz 4 für den Fall einer irreduziblen, algebraischen, affinen Varietät Y in einem $\mathbf{C}^n$ nachzuweisen; dieser sei mit einem $(y_1, \ldots, y_n)$-Koordinatensystem versehen; $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ seien die Beschränkungen von $y_1, \ldots, y_n$ auf Y. Dann existieren nach einem bekannten algebraischen Satz endlich viele, in $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ rationale Funktionen $f_1, \ldots, f_s$ (man beachte, daß wegen der Irreduzibilität von Y der Ring $\mathbf{C}\,[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n]$ nullteilerfrei ist), so daß der Integritätsring $A' := \mathbf{C}\,[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, f_1, \ldots, f_s]$ ganz-abgeschlossen ist; $f_1, \ldots, f_s$ induzieren eine rationale Abbildung $\mu : Y \to \mathbf{C}^s$ und eine meromorphe Abbildung $\mu^* : Y \to \mathbf{C}^s$ mit den Graphen G_μ und G_{μ^*}. Mit Hilfe von Serre [18] zeigt man, daß — als Punktmengen betrachtet — G_μ und G_{μ^*} identisch sind. G_μ ist eine birationale Transformation von Y mit folgenden Eigenschaften

α) G_μ ist eine normale algebraische Varietät.

β) Über jedem Punkte von Y liegen nur endlich viele Punkte von G_μ.

γ) G_μ ist vollständig über jedem Punkte von Y.

G_{μ^*} ist der G_μ zugeordnete komplexe Raum. Gelingt es, Satz 4' zu beweisen, so ist mit G_μ auch G_{μ^*} normal. Da aber die natürliche (mengentheoretische) Projektionsabbildung $\pi : G_{\mu^*} \to Y^*$ eigentlich, holomorph, über $Y - S$ (S = Singularitätenmenge von Y = Singularitätenmenge von Y^* nach Serre [18]) biholomorph ist, ist G_{μ^*} dann die Normalisierung von Y. — Es genügt also, Satz 4' zu beweisen.

Es sei also Y bereits normal, d. h. $A = \mathbf{C}\,[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n]$ sei ein ganz-abgeschlossener Integritätsring.

b) O. Zariski hat in [22] (siehe [23], Vol. II, Chap. VIII, § 13) bewiesen:

Es sei $P \varepsilon Y$, $\mathfrak{p}$ das Primideal der in P verschwindenden Polynome aus $A = \mathbf{C}\,[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n]$, $A_P = A_\mathfrak{p}$ der zugehörige Stellenring der in P regulären rationalen Funktionen in $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$. Mit A_P ist auch die Komplettierung $\hat{A}_P$ ein ganz-abgeschlossener Integritätsring.

Zum Beweise dieser Aussage wird im wesentlichen ausgenutzt, daß $(A_P, \hat{A}_P)$ ein »couple plat« (siehe Serre [18]) ist. Nun ist aber nach dieser Arbeit [18] auch $(A_P, \mathcal{O}_P)$ ein »couple plat« ($\mathcal{O}$ sei die Garbe der holomorphen Funktionskeime über Y^*; jede Funktion aus A_P fassen wir als holomorphe Funktion in P auf). Das Verfahren von O. Zariski läßt sich im wesentlichen rein formal übertragen, um aus der Ganz-abgeschlossenheit von A_P die von $\mathcal{O}_P$ zu folgern. Der Vollständigkeit halber sei der Beweis angedeutet.

α) Es sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal in A_P; dann besitzt $\mathcal{O}_P/\mathcal{O}_P \cdot \mathfrak{q}$ keine nilpotenten Elemente.

Sei N_P nämlich der zu $\mathfrak{q}$ gehörige Nullstellenmengenkeim. Nach Serre [18] erzeugt aber $\mathfrak{q}$ bereits über $\mathcal{O}_P$ das Ideal $\mathfrak{N}_P$ der auf N_P verschwindenden holomorphen Funktionskeime.

β) Ein $x'' \varepsilon A_P$, das kein Nullteiler in $A_P \bmod \mathfrak{q}$ ist, ist auch kein Nullteiler in $\mathcal{O}_P/\mathcal{O}_P \cdot \mathfrak{q}$. — Trivial, da $\mathfrak{q}$ über $\mathcal{O}_P$ das Ideal $\mathfrak{N}_P$ erzeugt.

γ) Es existiert auf Y^* ein universeller Nenner $d \varepsilon A_P$*).

Notieren wir noch die bereits erwähnte Aussage:

δ) $(A_P, \mathcal{O}_P)$ ist ein «couple plat». — Hieraus folgt: Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale in A_P, so ist $\mathcal{O}_P \cdot (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ (= das von $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ in $\mathcal{O}_P$ erzeugte Ideal) $= (\mathcal{O}_P \cdot \mathfrak{a}) \cap (\mathcal{O}_P \cdot \mathfrak{b})$.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich der Beweis in [23], Vol. II, Seite 315, 316, rein formal übertragen; man ersetze dort $\hat{A}$ stets durch $\mathcal{O}_P$ und A durch A_P:

Da A_P ganz-abgeschlossen ist, ist $A_P \cdot d = \bigcap_i \mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ Durchschnitt von endlich vielen symbolischen Primidealpotenzen $\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$; die $\mathfrak{p}_i$ sind minimal. Aus $\mathcal{O}_P \cdot d = \bigcap_i (\mathcal{O}_P \cdot \mathfrak{p}_{ij}^{(n_i)})$ läßt sich dann durch einfache Überlegungen schließen, daß $\mathcal{O}_P \cdot d$ Durchschnitt von endlich vielen symbolischen Primidealpotenzen minimaler Primideale $\mathfrak{p}_{ij}$ in $\mathcal{O}_P$ ist; es ist nämlich $\mathcal{O}_P \cdot \mathfrak{p}_i^{(n_i)} = \bigcap_j \mathfrak{p}_{ij}^{(n_i)}$. Hieraus folgt unmittelbar (siehe [23], Vol. II, Seite 314 und 315) die Ganz-abgeschlossenheit von $\mathcal{O}_P$.

c) Es sei $\mathfrak{R}$ die Stellenringgarbe über einer beliebigen irreduziblen algebraischen Varietät Y, $\mathfrak{R}'$ diejenige algebraische Modulgarbe von rationalen Funktionskeimen, deren Halme $\mathfrak{R}'_P$, $P \varepsilon Y$, aus den ganz-abgeschlossenen Hüllen der $\mathfrak{R}_P$ bestehen. $Y^* = X$ sei der Y zugeordnete komplexe Raum mit der Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionskeime und der in § 4.1 erklärten Garbe $\mathcal{O}'$. — Nun erzeugt $\mathfrak{R}'$ in naheliegender Weise (siehe [18], Seite 16) eine assoziierte analytische Garbe $\mathfrak{R}'^*$.

Es ist evident, daß mit dem vorausgehenden bewiesen ist

Satz 5. *Die assoziierte analytische Garbe $\mathfrak{R}'^*$ ist zu $\mathcal{O}'$ in kanonischer Weise isomorph.*

Mit anderen Worten: $\mathcal{O}'$ entsteht aus $\mathfrak{R}'$, indem die Operatorengarbe $\mathfrak{R}$ zur Operatorengarbe $\mathcal{O}$ erweitert wird.

Literatur

[1] ABHYANKAR, SH.: Concepts of order and rank on a complex space, and a condition for normality. Math. Ann. **141**, 171—192 (1960).

[2] BEHNKE, H., u. K. STEIN: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. **124**, 1—16 (1951).

[3] BEHNKE, H., u. H. GRAUERT: Analysis in non-compact complex spaces, Seite 11—44 in: Analytic Functions. Princeton: University Press Princeton 1960.

[4] BOCHNER, S., u. W. T. MARTIN: Several complex variables. Princeton: University Press Princeton 1948.

[5] CARTAN, H.: Séminaire E. N. S. 1951/52 (hektographiert).

[6] CARTAN, H.: Séminaire E. N. S. 1953/54 (hektographiert).

[7] CARTAN, H.: Variétés analytiques complexes et cohomologie, Coll. sur les Fonct. de Plus. Variables, 41—55. Bruxelles 1953.

[8] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245—318 (1958).

[9] HITOTUMATU, S.: Note on the holomorphy on an analytic subset. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, VII, 605—613 (1958).

[10] KUHLMANN, N.: Zur Theorie der Modifikationen algebraischer Varietäten. Schriftenreihe Math. Inst. Universität Münster, H. 14 (1959).

*) Man beachte: $d \varepsilon A_P$ ist ein universeller Nenner auf Y^* und nicht nur für Y, d. h. d ist ein universeller Nenner auch für den komplex-analytischen Fall.

[11] Kuhlmann, N.: Projektive Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. 139, 217—238 (1960).
[12] Lang, S.: Introduction to algebraic geometry. New York: Interscience Publishers 1958.
[13] Meis, Th.: Die minimale Blätterzahl der Konkretisierungen einer kompakten Riemannschen Fläche. Schriftenreihe Math. Inst. Universität Münster, H. 16.
[14] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VIII. Lemme fondamental. J. Math. Soc. Japan 3, 204—214 und 259—278 (1951).
[15] Remmert, R.: Projektionen analytischer Mengen. Math. Ann. 130, 410—441 (1956).
[16] Remmert, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. 133, 328—370 (1957).
[17] Serre, J. P.: Faisceaux algébriques cohérent. Ann. Math. 61, 197—278 (1955).
[18] Serre, J. P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 6, 1—42 (1955/56).
[19] Thimm, W.: Über kohärente Holomorphiestrukturen. Erscheint voraussichtlich in den Math. Ann.
[20] van der Waerden, B. L.: Algebra, Teil II. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1959.
[21] Zariski, O.: Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties. Am. J. Math. Vol. LXI, 249—294 (1939).
[22] Zariski, O.: Sur la normalité analytique des variétés normales. Ann. Inst. Fourier Grenoble 2, 161—164 (1951).
[23] Zariski, O., and P. Samuel: Commutative Algebra, Vol. I und II. The University Series in Higher Math., Princeton, N. J. (1958 u. 1960).

(Eingegangen am 12. Januar 1961)

KERNER, H.
Math. Annalen 144, 126—134 (1961)

Überlagerungen und Holomorphiehüllen

Von

HANS KERNER in München

Bekanntlich kann man jedem unverzweigten Riemannschen Gebiet G über dem Raum C^n von n komplexen Veränderlichen eine Holomorphiehülle $H(G)$ zuordnen. $H(G)$ ist das größte G umfassende Riemannsche Gebiet derart, daß sich jede in G holomorphe Funktion nach $H(G)$ holomorph fortsetzen läßt. Betrachtet man nun nicht nur eindeutige, sondern auch mehrdeutige holomorphe „Funktionen", so kann man die Frage stellen, ob auch jede auf G mehrdeutige holomorphe „Funktion" zu einer auf $H(G)$ mehrdeutigen „Funktion" fortsetzbar ist. Genauer: Es sei $\hat{G}$ eine (unverzweigte und unbegrenzte) Überlagerung des unverzweigten Riemannschen Gebietes G und $\hat{G}$ sei mit der durch die Überlagerung induzierten komplexen Struktur versehen. Ist dann die Holomorphiehülle $H(\hat{G})$ eine Überlagerung von $H(G)$?

Wir zeigen zuerst, daß die Holomorphiehülle $H(\hat{G})$ einer regulären Überlagerung $\hat{G}$ von G eine reguläre Überlagerung von $H(G)$ ist (Satz 1a). Insbesondere ist die Holomorphiehülle der universellen Überlagerung eines Gebietes G gleich der universellen Überlagerung von $H(G)$ (Satz 1b). Daraus folgt dann, daß die Holomorphiehülle $H(\hat{G})$ einer beliebigen Überlagerung $\hat{G}$ von G wieder eine Überlagerung von $H(G)$ ist (Satz 1).

Für den Fall regulärer Überlagerungen untersuchen wir, welche Beziehungen zwischen den zugehörigen Fundamentalgruppen bestehen. Unter der Bedingung, daß $\hat{G}$ holomorph-separabel ist, sind $\pi_1(G)/\pi_1(\hat{G})$ und $\pi_1(H(G))/\pi_1(H(\hat{G}))$ zueinander in natürlicher Weise isomorph. Besteht umgekehrt diese Isomorphie zwischen $\pi_1(G)/\pi_1(\hat{G})$ und $\pi_1(H(G))/\pi_1(H(\hat{G}))$ und ist G holomorph-separabel, so ist auch $\hat{G}$ holomorph-separabel (Satz 2). Daraus ergibt sich folgendes Kriterium: Die universelle Überlagerung eines holomorph-separablen Gebietes G ist genau dann holomorph-separabel, wenn die Fundamentalgruppen $\pi_1(G)$ und $\pi_1(H(G))$ in natürlicher Weise isomorph sind (Satz 2a).

Alle diese Aussagen gelten auch, wenn G ein unverzweigtes Gebiet über einer Steinschen Mannigfaltigkeit ist. Wir führen daher die Beweise für den allgemeineren Fall unverzweigter Gebiete über Steinschen Mannigfaltigkeiten.

1. Ist G eine Mannigfaltigkeit, so definiert man ([12], [13]): $(\hat{G}, \varphi, G)$ heißt eine *Überlagerung* von G, wenn $\hat{G}$ ein zusammenhängender Hausdorffscher Raum und $\varphi: \hat{G} \to G$ eine lokal-topologische surjektive Abbildung ist und es zu jedem Punkt $x \in G$ eine Umgebung $U(x)$ gibt, so daß jede zusammenhängende Komponente von $\overset{-1}{\varphi}(U(x))$ durch φ topologisch auf $U(x)$ abgebildet wird.

Eine topologische Abbildung $\sigma: \hat{G} \to \hat{G}$ mit $\varphi \circ \sigma = \varphi$ heißt *Decktransformation* von $(\hat{G}, \varphi, G)$.

Eine Überlagerung $(\hat{G}, \varphi, G)$ heißt *regulär*, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in \hat{G}$ mit $\varphi(x) = \varphi(y)$ eine Decktransformation σ gibt, so daß $\sigma(x) = y$ gilt.

Im folgenden bezeichne S immer eine Steinsche Mannigfaltigkeit[1]). Ein (unverzweigtes) *Gebiet* über einer Steinschen Mannigfaltigkeit S ist ein Tripel $\langle G, \Phi, S\rangle$, wobei G ein zusammenhängender Hausdorffscher Raum und $\Phi : G \to S$ eine lokal-topologische Abbildung ist; G werde mit der durch $\Phi : G \to S$ induzierten komplexen Struktur versehen. Wir schreiben zur Abkürzung an Stelle von $\langle G, \Phi, S\rangle$ oft nur G. Ist $S = C^n$, so heißt $\langle G, \Phi, C^n\rangle$ ein unverzweigtes Riemannsches Gebiet.

Jedem Gebiet $\langle G, \Phi, S\rangle$ kann man eine Holomorphiehülle zuordnen, die wir mit $H(G)$ bezeichnen (vgl. [1], [3], [4], [15]). $H(G)$ ist ein unverzweigtes Gebiet über S und es gibt eine holomorphe lokaltopologische Abbildung $\alpha : G \to H(G)$. $H(G)$ ist holomorph-vollständig[2]).

Sind G_i, $i = 1, 2$, Gebiete über S, $\alpha_i : G_i \to H(G_i)$, so existiert zu jeder holomorphen Abbildung $\varphi : G_1 \to G_2$ genau eine holomorphe Abbildung $\tilde{\varphi} : H(G_1) \to$ $\to H(G_2)$ mit $\alpha_2 \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ \alpha_1$ (vgl. [9], Satz 2 und Satz 4). Ist φ lokal-topologisch, so auch $\tilde{\varphi}$; wenn φ biholomorph ist, ist auch $\tilde{\varphi}$ biholomorph (vgl. dazu H. Cartan und P. Thullen [4], Satz 3, sowie H. Cartan [3], VII, théorème 2).

Es sei nun $(\hat{G}, \varphi, G)$ eine Überlagerung des Gebietes $\langle G, \Phi, S\rangle$ und $H(\hat{G})$ die Holomorphiehülle von $\langle \hat{G}, \Phi \circ \varphi, S\rangle$, $\hat{\alpha} : \hat{G} \to H(\hat{G})$. Dann gibt es genau eine holomorphe lokal-topologische Abbildung $\tilde{\varphi} : H(\hat{G}) \to H(G)$ mit $\alpha \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ \hat{\alpha}$. Wir beweisen:

Satz 1. *Es sei G ein unverzweigtes Gebiet über einer Steinschen Mannigfaltigkeit. Ist dann* $(\hat{G}, \varphi, G)$ *eine Überlagerung von G, so ist* $(H(\hat{G}), \tilde{\varphi}, H(G))$ *eine Überlagerung der Holomorphiehülle* $H(G)$.

Satz 1a. *Ist* $(\hat{G}, \varphi, G)$ *eine reguläre Überlagerung, so ist auch* $(H(\hat{G}), \tilde{\varphi}, H(G))$ *eine reguläre Überlagerung.*

Satz 1b. *Ist* $(\hat{G}, \varphi, G)$ *die universelle Überlagerung von G, so ist* $(H(\hat{G}), \tilde{\varphi}, H(G))$ *die universelle Überlagerung von* $H(G)$.

2. Wir beweisen zuerst Satz 1a und Satz 1b, daraus ergibt sich dann Satz 1.

Es sei in diesem Abschnitt $(\hat{G}, \varphi, G)$ eine reguläre Überlagerung und Δ die Gruppe der Decktransformationen von $(\hat{G}, \varphi, G)$. Zu $\sigma \in \Delta$ existiert genau eine biholomorphe Abbildung $\tilde{\sigma} : H(\hat{G}) \to H(\hat{G})$ mit $\hat{\alpha} \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ \hat{\alpha}$ und $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\varphi}$. Die Gruppe aller $\tilde{\sigma}$, $\sigma \in \Delta$, sei mit $\tilde{\Delta}$ bezeichnet. Durch $\tilde{\Delta}$ wird eine Äquivalenzrelation in $H(\hat{G})$ erzeugt: Zwei Punkte $x, y \in H(\hat{G})$ heißen äquivalent bezüglich

---

[1]) Eine komplexe Mannigfaltigkeit X heißt holomorph-konvex, wenn es zu jeder Punktfolge $x_\nu \in X$, die in X keinen Häufungspunkt besitzt, eine in X holomorphe Funktion f gibt, so daß $|f(x_\nu)|$ nicht beschränkt ist. X heißt K-vollständig, wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine in X holomorphe Abbildung $\Phi : X \to C^n$ gibt, so daß $\overset{-1}{\Phi}(\Phi(x_0)) \cap U = \{x_0\}$ ist. X heißt eine Steinsche Mannigfaltigkeit oder holomorph-vollständig, wenn X K-vollständig und holomorph-konvex ist. Vgl. dazu [3], [6], [13].

[2]) Die Aussage, daß $H(G)$ holomorph-vollständig ist, wurde für (unverzweigte) Gebiete über dem C^n von K. Oka [10] bewiesen und von F. Docquier und H. Grauert [5] auf Gebiete über Steinschen Mannigfaltigkeiten verallgemeinert.

$\mathfrak{Z}$ (in Zeichen: $x \sim y$), wenn es ein $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{Z}$ gibt mit $\tilde{\sigma}(x) = y$. Es sei $Z := H(\hat{G})/\mathfrak{Z}$ der Zerlegungsraum, versehen mit der Quotiententopologie, und $\eta : H(\hat{G}) \to Z$ die natürliche Abbildung von $H(\hat{G})$ auf $H(\hat{G})/\mathfrak{Z}$; es existiert eine Abbildung $\varrho : Z \to H(G)$ mit $\varrho \circ \eta = \tilde{\varphi}$.

Es gilt:

(1) $\eta : H(\hat{G}) \to Z$ *ist eine offene Abbildung.*

Ist nämlich $\hat{U}$ eine offene Teilmenge von $H(\hat{G})$, so ist $\bigcup_{\tilde{\sigma} \in \mathfrak{Z}} \tilde{\sigma}(\hat{U})$ offen und dies bedeutet genau, daß η eine offene Abbildung ist.

Wir benötigen nun folgende Aussage:

(2) *Es seien R und R' Hausdorffsche Räume und $\psi : R \to R'$ eine lokal-topologische Abbildung. Ist dann U eine offene zusammenhängende Teilmenge von R, die durch ψ topologisch auf $\psi(U)$ abgebildet wird, so ist U eine Zusammenhangskomponente von $\overset{-1}{\psi}(\psi(U))$.*

Beweis: Da U offen in $\overset{-1}{\psi}(\psi(U))$ ist, genügt es zu zeigen, daß U in $\overset{-1}{\psi}(\psi(U))$ abgeschlossen ist. Es sei $x_1 \in \overset{-1}{\psi}(\psi(U)) - U$ und $x_2 := \overset{-1}{\psi}(\psi(x_1)) \cap U$. Dann gibt es Umgebungen V_1 von x_1 und V_2 von x_2 mit $V_1 \subset \overset{-1}{\psi}(\psi(U))$, $V_2 \subset U$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, so daß $\psi(V_1) = \psi(V_2)$ ist und die Abbildungen $\psi | V_1 \to \psi(V_1)$ sowie $\psi | V_2 \to \psi(V_2)$ topologisch sind. Ist y_1 ein beliebiger Punkt von V_1 und $y_2 := \overset{-1}{\psi}(\psi(y_1)) \cap V_2$, so gilt $\psi(y_1) = \psi(y_2)$, $y_1 \neq y_2$, $y_2 \in U$. Da $\psi | U$ nach Voraussetzung eineindeutig ist, folgt daraus $V_1 \cap U = \varnothing$. Damit ist gezeigt, daß U in $\overset{-1}{\psi}(\psi(U))$ abgeschlossen ist.

Als nächstes zeigen wir:

(3) *Die Menge $C := \{(x, y) \in H(\hat{G}) \times H(\hat{G}) : x \sim y\}$ ist abgeschlossen in $H(\hat{G}) \times H(\hat{G})$.*

Beweis: Es sei $(x_0, y_0) \in \bar{C}$, wobei $\bar{C}$ die abgeschlossene Hülle von C in $H(\hat{G}) \times H(\hat{G})$ bezeichnet. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{\varphi}$ gilt $\tilde{\varphi}(x_0) = \tilde{\varphi}(y_0)$. Weil $\tilde{\varphi}$ lokal-topologisch ist, gibt es zusammenhängende offene Umgebungen $\hat{U}$ von x_0, $\hat{V}$ von y_0 mit $\tilde{\varphi}(\hat{U}) = \tilde{\varphi}(\hat{V}) =: W$ derart, daß die Abbildungen $\tilde{\varphi}|\hat{U} \to W$ und $\tilde{\varphi}|\hat{V} \to W$ topologisch sind. $\hat{U} \times \hat{V}$ ist eine Umgebung von (x_0, y_0), daher ist $(\hat{U} \times \hat{V}) \cap C$ nicht leer. Wir wählen einen Punkt $(x_1, y_1) \in (\hat{U} \times \hat{V}) \cap C$, dann existiert ein $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{Z}$ mit $\tilde{\sigma}(x_1) = y_1$. Nach (2) sind $\hat{U}$ und $\hat{V}$ zusammenhängende Komponenten von $\overset{-1}{\tilde{\varphi}}(W)$; daher ist auch $\tilde{\sigma}(\hat{U})$ eine Zusammenhangskomponente von $\overset{-1}{\tilde{\varphi}}(W)$. Wegen $\tilde{\sigma}(x_1) = y_1 \in \tilde{\sigma}(\hat{U}) \cap \hat{V}$ ist $\tilde{\sigma}(\hat{U}) \cap \hat{V} \neq \varnothing$, also $\tilde{\sigma}(\hat{U}) = \hat{V}$. Somit ist $\tilde{\sigma}(x_0) \in \hat{V}$ und $\tilde{\varphi}(\tilde{\sigma}(x_0)) = \tilde{\varphi}(y_0)$. Da $\tilde{\varphi}|\hat{V} \to W$ eine topologische Abbildung ist, folgt $\tilde{\sigma}(x_0) = y_0$. Das bedeutet, daß $x_0 \sim y_0$ ist, also $(x_0, y_0) \in C$. Damit ist gezeigt, daß $C = \bar{C}$ ist, d. h. C ist abgeschlossen.

Aus (1) und (3) folgt nach Bourbaki ([2], § 7,18):

(4) *Z ist ein Hausdorffscher Raum.*

Weiter zeigen wir:

(5) *Die Abbildungen $\eta : H(\hat{G}) \to Z$ und $\varrho : Z \to H(G)$ sind lokal-topologisch.*

Beweis: Die Stetigkeit von ϱ folgt aus der Stetigkeit von $\varrho \circ \eta = \tilde{\varphi}$ (vgl. Bourbaki [2], § 7,19). Ist $W \subset Z$ offen, so ist $\varrho(W) = \tilde{\varphi}(\overset{-1}{\eta}(W))$, weil η surjektiv ist. $\overset{-1}{\eta}(W)$ ist offen und $\tilde{\varphi}$ ist eine offene Abbildung, also ist $\varrho(W)$ offen. Damit

ist gezeigt, daß ϱ eine offene Abbildung ist. Nach (1) ist η offen. Da $\tilde{\varphi}$ lokal-topologisch ist, folgt aus $\varrho \circ \eta = \tilde{\varphi}$, daß die Abbildungen ϱ und η lokal-eineindeutig und somit lokal-topologisch sind.

Wir versehen nun Z mit der durch $\varrho : Z \to H(G)$ induzierten komplexen Struktur; η und ϱ sind dann holomorphe Abbildungen. $\mathfrak{R}(Z)$ bzw. $\mathfrak{R}(H(G))$ bezeichne den Ring der in Z bzw. $H(G)$ holomorphen Funktionen. Setzt man $^*\varrho(f) := f \circ \varrho$, $f \in \mathfrak{R}(H(G))$, so ist $^*\varrho : \mathfrak{R}(H(G)) \to \mathfrak{R}(Z)$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{R}(H(G))$ in $\mathfrak{R}(Z)$. Es gilt:

(6) $^*\varrho : \mathfrak{R}(H(G)) \to \mathfrak{R}(Z)$ *ist bijektiv.*

Beweis: Der Homomorphismus $^*\varrho$ ist injektiv, weil $\varrho(Z)$ eine nichtleere offene Teilmenge von $H(G)$ ist. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß $^*\varrho$ surjektiv ist. Sei $h \in \mathfrak{R}(Z)$ eine in Z holomorphe Funktion, dann ist $h \circ \eta \circ \hat{\alpha}$ in $\hat{G}$ holomorph. Für $\sigma \in \Delta$ gilt wegen $\eta \circ \tilde{\sigma} = \eta$: $h \circ \eta \circ \hat{\alpha} \circ \sigma = h \circ \eta \circ \tilde{\sigma} \circ \hat{\alpha} = h \circ \eta \circ \hat{\alpha}$. Weil die Überlagerung $(\hat{G}, \varphi, G)$ nach Voraussetzung regulär ist, existiert eine in G holomorphe Funktion h_1 mit $h \circ \eta \circ \hat{\alpha} = h_1 \circ \varphi$. h_1 ist in die Holomorphiehülle $H(G)$ fortsetzbar, d. h. es gibt eine in $H(G)$ holomorphe Funktion $\bar{h}$ mit $h_1 = \bar{h} \circ \alpha$. Es gilt $\bar{h} \circ \varrho \circ \eta \circ \hat{\alpha} = \bar{h} \circ \alpha \circ \varphi = h_1 \circ \varphi = h \circ \eta \circ \hat{\alpha}$. Daraus folgt $\bar{h} \circ \varrho = h$ oder $^*\varrho(\bar{h}) = h$; d. h. $^*\varrho$ ist surjektiv.

Nun zeigen wir:

(7) $(H(\hat{G}), \eta, Z)$ *ist eine reguläre Überlagerung.*

Beweis: Ist $z_0 \in Z$ vorgegeben, so existiert ein $y_0 \in \overset{-1}{\eta}(z_0)$. Wegen (5) gibt es Umgebungen $\hat{U}$ von y_0 und V von z_0, so daß $\hat{U}$ durch η topologisch auf V abgebildet wird. Es sei $\hat{U}_1$ eine Zusammenhangskomponente von $\overset{-1}{\eta}(V)$. Ist y_1 ein Punkt von $\hat{U}_1$ und $y := \overset{-1}{\eta}(\eta(y_1)) \cap \hat{U}$, so existiert wegen $\eta(y_1) = \eta(y)$ ein $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Delta}$ mit $\tilde{\sigma}(y) = y_1$. Nach (2) ist $\hat{U}$ eine zusammenhängende Komponente von $\overset{-1}{\eta}(V)$. Daher ist auch $\tilde{\sigma}(\hat{U})$ eine Zusammenhangskomponente von $\overset{-1}{\eta}(V)$. Aus $\tilde{\sigma}(\hat{U}) \cap \hat{U}_1 \neq \emptyset$ folgt dann $\tilde{\sigma}(\hat{U}) = \hat{U}_1$. Somit ist $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\sigma}^{-1} | \hat{U}_1 \to V$ eine topologische Abbildung; d. h. $(H(\hat{G}), \eta, Z)$ ist eine reguläre Überlagerung.

Wir beweisen nun den

Hilfssatz 1. *Es sei X ein unverzweigtes Gebiet über einer Steinschen Mannigfaltigkeit S und $(\hat{X}, \psi, X)$ eine Überlagerung von X. Ist dann $\hat{X}$ holomorph-vollständig, so ist auch X holomorph-vollständig.*

Wir führen den Beweis in zwei Schritten. Zuerst wird der Hilfssatz für den Fall $S = C^n$ bewiesen.

1. Es sei $S = C^n$ und X das Gebiet $\langle X, \Phi, C^n \rangle$. Ist $x \in X$ und r eine positive reelle Zahl, so sei $H_r(\Phi(x)) \subset C^n$ die Hyperkugel mit dem Mittelpunkt $\Phi(x)$ und Radius r. Mit $H_r(x)$ bezeichnen wir die zusammenhängende Komponente von $\overset{-1}{\Phi}(H_r(\Phi(x)))$, in der x liegt. Das Supremum aller r mit der Eigenschaft, daß $\Phi | H_r(x) \to H_r(\Phi(x))$ eine topologische Abbildung ist, heißt die Distanzfunktion $\delta(x)$ des Gebietes $\langle X, \Phi, C^n \rangle$.

Bezeichnen wir mit $\hat{\delta}$ die Distanzfunktion von $\langle \hat{X}, \Phi \circ \psi, C^n \rangle$, so gilt $\hat{\delta}(\hat{x}) \leq \delta(\psi(\hat{x}))$ für jedes $\hat{x} \in \hat{X}$. Ist nämlich $\hat{H}_r(\hat{x})$ eine Umgebung von $\hat{x}$, die durch $\Phi \circ \psi$ topologisch auf die Hyperkugel $H_r(\Phi \circ \psi(\hat{x}))$ abgebildet wird, so ist auch die Abbildung $\Phi | \psi(\hat{H}_r(\hat{x})) \to H_r(\Phi \circ \psi(\hat{x}))$ topologisch. — Ist

andererseits $r < \delta(\psi(\hat{x}))$ und $\hat{H}_r(\hat{x})$ die $\hat{x}$ enthaltende Zusammenhangskomponente von $\overset{-1}{\psi}(H_r(\psi(\hat{x})))$, so ist $(\hat{H}_r(\hat{x}), \Phi \circ \psi, H_r(\Phi \circ \psi(\hat{x})))$ eine Überlagerung. Da $H_r(\Phi \circ \psi(\hat{x}))$ eine Hyperkugel ist, ist $(\hat{H}_r(\hat{x}), \Phi \circ \psi, H_r(\Phi \circ \psi(\hat{x})))$ die triviale Überlagerung. Also ist $\Phi \circ \psi | \hat{H}_r(\hat{x}) \to H_r(\Phi \circ \psi(\hat{x}))$ eine topologische Abbildung und somit $\hat{\delta}(\hat{x}) \geqq \delta(\psi(\hat{x}))$.

Damit ist gezeigt, daß $\hat{\delta} = \delta \circ \psi$ ist.

Es gilt folgender Satz von K. Oka [10]: Ein unverzweigtes Riemannsches Gebiet $\langle X, \Phi, C^n \rangle$ mit der Distanzfunktion δ ist genau dann holomorph-vollständig, wenn $-\log\delta$ eine plurisubharmonische Funktion ist[3]).

Aus diesem Satz folgt, daß $-\log\hat{\delta}$ plurisubharmonisch in $\hat{X}$ ist. Ist nun $x \in X$ und $\hat{x} \in \overset{-1}{\psi}(x)$, so existieren Umgebungen U von x und $\hat{U}$ von $\hat{x}$ derart, daß $\psi_U := \psi | \hat{U} \to U$ eine biholomorphe Abbildung ist. Es gilt $-\log\delta | U = -\log\hat{\delta} \circ \psi_U^{-1}$, und daraus folgt, daß $-\log\delta | U$ plurisubharmonisch ist[4]). Da eine Funktion genau dann plurisubharmonisch ist, wenn sie in einer Umgebung jedes Punktes plurisubharmonisch ist[5]), ergibt sich, daß $-\log\delta$ eine in X plurisubharmonische Funktion ist. Nach dem Satz von K. Oka ist dann X holomorph-vollständig.

2. Nun sei S eine beliebige Steinsche Mannigfaltigkeit. Nach einem Satz von R. Remmert [11] und F. Docquier-H. Grauert [5], Satz 3, gibt es zu jeder Steinschen Mannigfaltigkeit S ein unverzweigtes holomorph-vollständiges Riemannsches Gebiet $\langle S_0, \mu, C^n \rangle$ und eine in S_0 singularitätenfrei eingebettete analytische Menge S' mit folgenden Eigenschaften: Es existiert eine biholomorphe Abbildung von S auf S' und eine holomorphe Abbildung $\varrho: S_0 \to S'$ derart, daß die Beschränkung $\varrho | S' \to S'$ die identische Abbildung ist. Wir dürfen annehmen, daß $S = S'$ ist. Ist nun $\langle X, \Phi, S \rangle$ ein Gebiet über S, so definieren wir $X_0 := \{(x, y) : x \in X,\ y \in S_0,\ \Phi(x) = \varrho(y)\}$ und $\varrho_0(x, y) := x$, $\Phi_0(x, y) := y$ (vgl. Docquier-Grauert [5], p. 113). Versieht man X_0 mit der durch $X_0 \subset X \times S_0$ induzierten Topologie, so werden $\varrho_0: X_0 \to X$ und $\Phi_0: X_0 \to S_0$ stetige Abbildungen; Φ_0 ist lokal-topologisch. $\langle X_0, \Phi_0, S_0 \rangle$ ist dann ein Gebiet über S_0 und ϱ_0 eine holomorphe Abbildung.

Entsprechend definiert man zu $\langle \hat{X}, \hat{\Phi}, S \rangle$, $\hat{\Phi} := \Phi \circ \psi$, das Gebiet $\langle \hat{X}_0, \hat{\Phi}_0, S_0 \rangle$ mit der holomorphen Abbildung $\hat{\varrho}_0: \hat{X}_0 \to \hat{X}$. Es gilt:

(a) *$\hat{X}_0$ ist eine Überlagerung von X_0.*

Um diese Aussage zu beweisen, setzen wir $\psi_0(\hat{x}, y) := (\psi(\hat{x}), y)$ für $(\hat{x}, y) \in \hat{X}_0$; wegen $\hat{\Phi}(\hat{x}) = \Phi \circ \psi(\hat{x}) = \varrho(y)$ ist $(\psi(\hat{x}), y) \in X_0$. Es gilt $\Phi_0 \circ \psi_0 = \hat{\Phi}_0$, daher ist $\psi_0: \hat{X}_0 \to X_0$ lokal-topologisch. Die Abbildung ψ_0 ist surjektiv, weil ψ surjektiv ist. Ist $p \in X_0$, so gibt es zum Punkt $\varrho_0(p) \in X$ eine offene zusammenhängende Umgebung U, so daß jede Zusammenhangskomponente von $\overset{-1}{\psi}(U)$

[3]) Zur Theorie der plurisubharmonischen Funktionen s. H. Grauert und R. Remmert [7]. Zum Satz von K. Oka vgl. auch [8], Satz A, E, G.

[4]) Es gilt der Satz (H. Grauert und R. Remmert [7], § 1, 5. g)): Sind X, Y komplexe Mannigfaltigkeiten, p eine in Y plurisubharmonische Funktion und $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung, so ist $p \circ \tau$ in X plurisubharmonisch.

[5]) Vgl. H. Grauert und R. Remmert [7], § 1, 5. e).

durch ψ topologisch auf U abgebildet wird. Dann ist

$$U_0 := \{(x, y) : x \in U, y \in S_0, \Phi(x) = \varrho(y)\}$$

eine Umgebung von p und $\overset{-1}{\psi_0}(U_0)$ ist die Vereinigung von offenen disjunkten Mengen $\hat{U}_0 := \{(\hat{x}, y) : \hat{x} \in \hat{U}, y \in S_0, \hat{\Phi}(\hat{x}) = \varrho(y)\}$, wobei $\hat{U}$ die Zusammenhangskomponenten von $\overset{-1}{\psi}(U)$ durchläuft. Jedes $\hat{U}_0$ wird durch ψ_0 topologisch auf U_0 abgebildet. Daraus folgt, daß $(\hat{X}_0, \psi_0, X_0)$ eine Überlagerung ist.

(b) $\hat{X}_0$ *ist holomorph-vollständig.*

Ein Beweis von (b) ergibt sich aus allgemeineren Aussagen von F. Docquier und H. Grauert [5], p. 114, (2), (5). Der Vollständigkeit halber sei für den hier benötigten Spezialfall der Beweis angegeben:

Da $\hat{X}_0$ offensichtlich K-vollständig ist, haben wir nur noch zu zeigen, daß $\hat{X}_0$ holomorph-konvex ist. Es sei $p_\nu \in \hat{X}_0$ eine Punktfolge, die in $\hat{X}_0$ keinen Häufungspunkt besitzt. Wir nehmen an, es existiere eine Teilfolge p_{ν_i} von p_ν, so daß sowohl $\hat{\varrho}_0(p_{\nu_i})$ als auch $\hat{\Phi}_0(p_{\nu_i})$ konvergiert; es sei $\lim \hat{\varrho}_0(p_{\nu_i}) =: \hat{x} \in \hat{X}$ und $\lim \hat{\Phi}_0(p_{\nu_i}) =: y \in S_0$. Dann gilt $\hat{\Phi}_0(\hat{x}) = \lim \hat{\Phi}_0 \circ \hat{\varrho}_0(p_{\nu_i}) = \lim \varrho \circ \hat{\Phi}_0(p_{\nu_i}) = \varrho(y)$, also ist $(\hat{x}, y) \in \hat{X}_0$. Offensichtlich ist $(\hat{x}, y)$ ein Häufungspunkt von p_ν. — Damit ist gezeigt: Besitzt p_ν in $\hat{X}_0$ keinen Häufungspunkt, so existiert eine Teilfolge p_{ν_j} von p_ν derart, daß $\hat{\varrho}_0(p_{\nu_j})$ keinen Häufungspunkt in $\hat{X}$ oder $\hat{\Phi}_0(p_{\nu_j})$ keinen Häufungspunkt in S_0 besitzt. Im ersten Fall existiert, weil $\hat{X}$ holomorph-konvex ist, eine in $\hat{X}$ holomorphe Funktion g, so daß $|g \circ \hat{\varrho}_0(p_\nu)|$ unbeschränkt ist; im zweiten Fall gibt es eine in S_0 holomorphe Funktion h, so daß $|h \circ \hat{\Phi}_0(p_\nu)|$ nicht beschränkt ist. Damit ist Aussage (b) bewiesen.

Nun sind $\langle \hat{X}_0, \mu \circ \hat{\Phi}_0, C^n \rangle$ und $\langle X_0, \mu \circ \Phi_0, C^n \rangle$ unverzweigte Gebiete über dem C^n. Aus (a), (b) und dem bereits bewiesenen Spezialfall von Hilfssatz 1 folgt dann, daß X_0 holomorph-vollständig ist. X ist biholomorph äquivalent zur analytischen Menge $\{(x, \Phi(x)) : x \in X\}$ in X_0. Daraus folgt, daß auch X holomorph-vollständig ist, und damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Aus (7) und Hilfssatz 1 folgt unmittelbar:

(8) Z *ist holomorph-vollständig.*

Damit können wir zeigen:

(9) *Die Abbildung* $\varrho : Z \to H(G)$ *ist biholomorph.*

Beweis: Sind x, y zwei verschiedene Punkte aus Z, so gibt es wegen (8) ein $f \in \Re(Z)$ mit $f(x) \neq f(y)$[6]. Nach (6) existiert ${}^*\varrho^{-1}(f) =: \tilde{f} \in \Re(H(G))$ und es gilt $\tilde{f}(\varrho(x)) \neq \tilde{f}(\varrho(y))$, also ist $\varrho(x) \neq \varrho(y)$. Damit ist gezeigt, daß ϱ eineindeutig ist.

Wir zeigen nun, daß $\varrho(Z)$ abgeschlossen in $H(G)$ ist. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es eine Punktfolge $x_\nu \in Z$, die in Z keinen Häufungspunkt besitzt, so daß $\varrho(x_\nu)$ gegen einen Punkt $y \in H(G)$ konvergiert. Es gibt wegen (8) ein $h \in R(Z)$, so daß $|h(x_\nu)|$ unbeschränkt ist. Dann ist aber auch $|\tilde{h}(\varrho(x_\nu))|$, $\tilde{h} := {}^*\varrho^{-1}(h)$, nicht beschränkt; es gilt aber $\lim \tilde{h}(\varrho(x_\nu)) = \tilde{h}(y)$. Damit ist ein Widerspruch hergestellt und gezeigt, daß $\varrho(Z)$ abgeschlossen ist.

Da $\varrho(Z)$ auch offen in $H(G)$ ist, folgt $\varrho(Z) = H(G)$. Daraus ergibt sich, daß ϱ eine topologische Abbildung ist. Nach Definition der komplexen Struktur in Z ist ϱ lokal-biholomorph. Daraus folgt, daß ϱ biholomorph ist.

[6]) Jede Steinsche Mannigfaltigkeit ist nach H. Grauert [6] holomorph-separabel.

Aus (7) und (9) folgt, daß $(H(\hat{G}), \tilde{\varphi}, H(G))$ eine reguläre Überlagerung ist und damit ist Satz 1a bewiesen.

3. Wir betrachten nun die Fundamentalgruppe $\pi_1(G)$, die in bezug auf einen beliebigen Punkt $x_0 \in G$ gebildet sei. Die Abbildung $\alpha : G \to H(G)$ induziert einen natürlichen Homomorphismus $\mathring{\alpha} : \pi_1(G) \to \pi_1(H(G))$, wobei $\pi_1(H(G))$ mit dem Bezugspunkt $\alpha(x_0)$ gebildet sei.

Es gilt der

Hilfssatz 2. *Ist G ein unverzeigtes Gebiet über einer Steinschen Mannigfaltigkeit, so ist der durch die Abbildung $\alpha : G \to H(G)$ induzierte Homomorphismus $\mathring{\alpha} : \pi_1(G) \to \pi_1(H(G))$ ein Epimorphismus.*

Der Beweis wird analog zu dem Beweis von K. STEIN [14], Satz 2.1, geführt und sei der Vollständigkeit halber hier angegeben. Es sei $(\hat{Y}, \beta, H(G))$ die zur Untergruppe $\mathring{\alpha}(\pi_1(G))$ von $\pi_1(H(G))$ gehörende Überlagerung von $H(G)$. Die Abbildung $\alpha : G \to H(G)$ kann in bekannter Weise zu einer Abbildung $\alpha_1 : G \to \hat{Y}$, $\alpha = \beta \circ \alpha_1$, geliftet werden. Nach einem Satz von K. STEIN [13], Satz 2.1, ist $\hat{Y}$ holomorph-vollständig. ${}^*\beta : \mathfrak{R}(\hat{Y}) \to \mathfrak{R}(H(G))$ ist ein Isomorphismus, weil ${}^*\alpha_1 \circ {}^*\beta = {}^*\alpha$ ein Isomorphismus ist. Wie in (8) ergibt sich, daß β biholomorph ist. Daraus folgt $\mathring{\alpha}(\pi_1(G)) = \pi_1(H(G))$.

Als Folgerung von Hilfssatz 2 ergibt sich, daß die Holomorphiehülle eines einfach-zusammenhängenden Gebietes wieder einfach-zusammenhängend ist.

Aus dieser Aussage und Satz 1a folgt Satz 1b.

4. In diesem Abschnitt beweisen wir Satz 1.

Es sei $(\hat{G}, \varphi, G)$ eine (nicht notwendig reguläre) Überlagerung des unverzweigten Gebietes $\langle G, \Phi, S\rangle$. $(\hat{G}_1, \varphi_1, \hat{G})$ sei die universelle Überlagerung von $\hat{G}$. Es gibt dann holomorphe Abbildungen $\hat{\alpha}_1 : \hat{G}_1 \to H(\hat{G}_1)$ und $\tilde{\varphi}_1 : H(\hat{G}_1) \to H(\hat{G})$ mit $\tilde{\varphi}_1 \circ \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha} \circ \tilde{\varphi}$; wir setzen $\varphi \circ \varphi_1 =: \varphi_2$, $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}_1 =: \tilde{\varphi}_2$. Nach Satz 1b ist dann $(H(\hat{G}_1), \tilde{\varphi}_1, H(\hat{G}))$ bzw. $(H(\hat{G}_1), \tilde{\varphi}_2, H(G))$ die universelle Überlagerung von $H(\hat{G})$ bzw. $H(G)$. Daher sind die Abbildungen $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$ und $\tilde{\varphi}$ surjektiv.

Es sei $x_0 \in H(G)$ und U eine offene zusammenhängende Umgebung von x_0, so daß $\tilde{\varphi}_2$ jede zusammenhängende Komponente von $\overset{-1}{\tilde{\varphi}}_2(U)$ topologisch auf U abbildet. $\hat{U}$ sei eine Zusammenhangskomponente von $\overset{-1}{\tilde{\varphi}}(U)$. Es ist $\overset{-1}{\tilde{\varphi}}_1(\hat{U}) \subset \overset{-1}{\tilde{\varphi}}_2(U)$ und $\overset{-1}{\tilde{\varphi}}_1(\hat{U})$ ist nicht leer, weil $\tilde{\varphi}_1$ surjektiv ist. Es sei $\hat{U}_1$ eine zusammenhängende Komponente von $\overset{-1}{\tilde{\varphi}}_2(U)$ mit $\hat{U}_1 \cap \overset{-1}{\tilde{\varphi}}_1(\hat{U}) \neq \varnothing$. Die Abbildung $\tilde{\varphi}_2 | \hat{U}_1 \to U$ ist topologisch, daher ist auch $\tilde{\varphi} | \tilde{\varphi}_1(\hat{U}_1) \to U$ eine topologische Abbildung. Nach (2) ist $\tilde{\varphi}_1(\hat{U}_1)$ eine zusammenhängende Komponente von $\overset{-1}{\tilde{\varphi}}(U)$. Aus $\tilde{\varphi}_1(\hat{U}_1) \cap \hat{U} \neq \varnothing$ folgt $\tilde{\varphi}_1(\hat{U}_1) = \hat{U}$. Damit ist gezeigt, daß jede Zusammenhangskomponente $\hat{U}$ von $\overset{-1}{\tilde{\varphi}}(U)$ durch $\tilde{\varphi}$ topologisch auf U abgebildet wird. Damit ist Satz 1 bewiesen.

5. Im folgenden sei $(\hat{G}, \varphi, G)$ eine *reguläre* Überlagerung des unverzweigten Gebietes G über der Steinschen Mannigfaltigkeit S. Wir bezeichnen die Gruppe der Decktransformationen von $(\hat{G}, \varphi, G)$ bzw. $(H(\hat{G}), \tilde{\varphi}, H(G))$ mit $\Delta(\hat{G})$ bzw. $\Delta(H(\hat{G}))$. Setzt man $\overset{*}{\alpha}(\sigma) := \tilde{\sigma}$, $\sigma \in \Delta(\hat{G})$, (vgl. Abschnitt 2), so erhält man einen Homomorphismus $\overset{*}{\alpha} : \Delta(\hat{G}) \to \Delta(H(\hat{G}))$, den wir in diesem Abschnitt näher untersuchen. Es gibt Isomorphismen $\Delta(\hat{G}) \cong \pi_1(G)/\pi_1(\hat{G})$, $\Delta(H(\hat{G})) \cong$

$\cong \pi_1(H(G))/\pi_1(H(\hat{G}))$ (vgl. [12], p. 197) und daher erzeugt α einen Homomorphismus $\alpha^*: \pi_1(G)/\pi_1(\hat{G}) \to \pi_1(H(G))/\pi_1(H(\hat{G}))$. Aus Hilfssatz 2 folgt, daß α^* und $\overset{*}{\alpha}$ Epimorphismen sind. Wir beweisen:

(10) *Ist $\hat{G}$ holomorph-separabel, so ist $\overset{*}{\alpha}: \Delta(\hat{G}) \to \Delta(H(\hat{G}))$ ein Isomorphismus.*

Beweis: Es genügt, zu zeigen: Ist $\overset{*}{\alpha}$ nicht injektiv, so ist $\hat{\alpha}$ nicht eineindeutig. Wenn $\overset{*}{\alpha}$ nicht injektiv ist, dann existiert ein $\sigma_0 \in \Delta(\hat{G})$, $\sigma_0 \neq$ Identität, so daß $\overset{*}{\alpha}(\sigma_0) =: \tilde{\sigma}_0 \in \Delta(H(\hat{G}))$ die identische Abbildung von $H(\hat{G})$ ist. Es gibt also einen Punkt $x_0 \in \hat{G}$ mit $\sigma_0(x_0) \neq x_0$. Wegen $\hat{\alpha} \circ \sigma_0 = \tilde{\sigma}_0 \circ \hat{\alpha} = \hat{\alpha}$ ist $\hat{\alpha}(\sigma_0(x_0)) = \hat{\alpha}(x_0)$, d. h. $\hat{\alpha}$ ist nicht eineindeutig.

Unter einer zusätzlichen Voraussetzung gilt auch die Umkehrung der Aussage (10):

(11) *Ist G holomorph-separabel und ist $\overset{*}{\alpha}: \Delta(\hat{G}) \to \Delta(H(\hat{G}))$ ein Isomorphismus, so ist $\hat{G}$ holomorph-separabel.*

Beweis: Wenn $\hat{G}$ nicht holomorph-separabel ist, dann gibt es zwei verschiedene Punkte $x, y \in \hat{G}$ mit $\hat{\alpha}(x) = \hat{\alpha}(y)$. Aus $\alpha \circ \varphi(x) = \tilde{\varphi} \circ \hat{\alpha}(x) = \tilde{\varphi} \circ \hat{\alpha}(y) = \alpha \circ \varphi(y)$ folgt, weil α nach Voraussetzung eineindeutig ist, $\varphi(x) = \varphi(y)$. Daher gibt es ein $\sigma_0 \in \Delta(\hat{G})$ mit $\sigma_0(x) = y$. Wegen $\hat{\alpha} \circ \sigma_0 = \tilde{\sigma}_0 \circ \hat{\alpha}$ ist $\tilde{\sigma}_0(\hat{\alpha}(x)) = \hat{\alpha}(\sigma_0(x)) = \hat{\alpha}(y) = \hat{\alpha}(x)$, also besitzt $\tilde{\sigma}_0$ den Fixpunkt $\hat{\alpha}(x)$. Eine Decktransformation mit Fixpunkt ist aber die Identität und damit ist gezeigt, daß $\overset{*}{\alpha}$ nicht injektiv ist.

Wir fassen die Aussagen (10) und (11) zusammen in

Satz 2. *Es sei G ein unverzweigtes Gebiet über einer Steinschen Mannigfaltigkeit und $(\hat{G}, \varphi, G)$ eine reguläre Überlagerung. Dann gilt: Ist $\hat{G}$ holomorph-separabel, so ist $\alpha^*: \pi_1(G)/\pi_1(\hat{G}) \to \pi_1(H(G))/\pi_1(H(\hat{G}))$ ein Isomorphismus. Ist G holomorph-separabel und ist $\alpha^*: \pi_1(G)/\pi_1(\hat{G}) \to \pi_1(H(G))/\pi_1(H(\hat{G}))$ ein Isomorphismus, so ist $\hat{G}$ holomorph-separabel.*

Als Spezialfall erhält man

Satz 2a. *Die universelle Überlagerung eines holomorph-separablen Gebietes G ist genau dann holomorph-separabel, wenn der Homomorphismus $\overset{\circ}{\alpha}: \pi_1(G) \to \pi_1(H(G))$ ein Isomorphismus ist.*

Literatur

[1] Behnke, H., u. P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Ergeb. Math. **3**, 3 (1934).

[2] Bourbaki, N.: Topologie générale. Fascicule de résultats. Paris: Hermann & Cie. 1951.

[3] Cartan, H.: Séminaire. Paris (1951/52).

[4] Cartan, H., u. P. Thullen: Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Regularitäts- und Konvergenzbereiche. Math. Ann. **106**, 617—647 (1932).

[5] Docquier, F., u. H. Grauert: Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **140**, 94—123 (1960).

[6] Grauert, H.: Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. **129**, 233—259 (1955).

[7] Grauert, H., u. R. Remmert: Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen. Math. Z. **65**, 175—194 (1956).

[8] Grauert, H., u. R. Remmert: Konvexität in der komplexen Analysis. Nicht holomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie. Comment. Math. Helv. **31**, 152—183 (1956).
[9] Kerner, H.: Über die Fortsetzung holomorpher Abbildungen. Arch. Math. XI, 44—49 (1960).
[10] Oka, K.: Sur la théorie de fonctions des plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intérieur. Japan. J. Math. **23**, 87—155 (1953).
[11] Remmert, R.: Habilitationsschrift, Münster 1957.
[12] Seifert, H., u. W. Threlfall: Lehrbuch der Topologie. Leipzig: B. G. Teubner 1934.
[13] Stein, K.: Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume. Arch. Math. VII, 354—361 (1956).
[14] Stein, K.: Maximale meromorphe und holomorphe Abbildungen. (In Vorbereitung.)
[15] Thullen, P.: Zur Theorie der Funktionen zweier komplexer Veränderlichen. Die Regularitätshüllen. Math. Ann. **106**, 64—72 (1932).

(Eingegangen am 16. Januar 1961)

KANOLD, H.-J.
Math. Annalen 144, 135—141 (1961)

Über periodische multiplikative zahlentheoretische Funktionen

Von
HANS-JOACHIM KANOLD in Braunschweig

Wir wollen in dieser Note mit $f(n)$ eine eindeutige zahlentheoretische Funktion bezeichnen, die für alle natürlichen Zahlen erklärt ist, deren Wertevorrat dem Körper der komplexen Zahlen angehören und nicht nur aus der Null bestehen soll. Ferner soll $f(n)$ multiplikativ sein, d. h. es soll für je zwei teilerfremde natürliche Zahlen a und b

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \tag{1}$$

erfüllt sein. Aus den bisherigen Annahmen folgt

$$f(1) = 1 . \tag{2}$$

Wir sagen weiterhin, $f(n)$ sei periodisch, wenn es zwei natürliche, nicht notwendig voneinander verschiedene Zahlen n_0 und m gibt, so daß

$$f(n + m) = f(n) \tag{3}$$

für alle $n \geqq n_0$ gilt. Unser Ziel ist, für solche Funktionen kennzeichnende Eigenschaften zu finden. Wegen (1) sind unsere Funktionen vollständig bestimmt, wenn wir sie an allen Primzahlpotenzen p^α ($\alpha \geqq 1$, ganz) kennen. Wir denken uns sämtliche Primzahlpotenzen in einer unendlichen Matrix $(\mathfrak{P})$ angeordnet, bezeichnen dabei die r-te Primzahl in der nach der Größe angeordneten Folge aller Primzahlen mit p_r und setzen

$$(\mathfrak{P}) = \begin{pmatrix} 2 & 2^2 & 2^3 & \ldots \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \ldots \\ 5 & 5^2 & 5^3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (p_r^s) . \tag{4}$$

Das Element p_r^s steht in der r-ten Zeile und in der s-ten Spalte von $(\mathfrak{P})$. Zu jedem $f(n)$ erklären wir die Matrix

$$(\mathfrak{F}) = (f(p_r^s)) . \tag{5}$$

Den Rang von $(\mathfrak{F})$ bezeichnen wir mit $R(\mathfrak{F})$.

Satz 1. *$f(n)$ sei eine periodische multiplikative zahlentheoretische Funktion, genüge also* (1), (2) *und* (3). *Dann ist entweder $f(n)$ „rein periodisch"*, d. h. *$f(n + m) = f(n)$ ist für alle $n \geqq 1$ erfüllt, oder es ist $f(n) = 0$ für $n \geqq n_0$. In diesem Fall ist $R(\mathfrak{F}) < \sqrt{2 \log n_0}$.*

Beweis. Es sei a eine zur Periode m teilerfremde natürliche Zahl. Dann durchlaufen die Zahlen $a, 2a, \ldots, ma$ ein vollständiges Restsystem $(\bmod m)$. Ist nun $n \equiv r \pmod{m}$, $1 \leqq r \leqq m$, so können wir nach unseren Voraussetzungen

$$(6) \qquad f(n_0 + i) = f(n_0 + i + \nu m)\,; \quad 0 \leqq i \leqq m - 1\,; \quad n_0 + i \equiv r \pmod{m}\,;$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

als richtig feststellen. Durch Vorgabe von r bestimmt sich i eindeutig und umgekehrt. Nach den obigen Überlegungen existiert eine natürliche Zahl $\mu \leqq m$ so, daß

$$(7) \qquad \mu a \equiv r \pmod{m}$$

gilt. Es ist nach (6) und (7)

$$(8) \qquad f(n_0 + i) = f(\mu a + k a m) = f(n + l n^2 m)\,,$$

wenn wir die nichtnegativen ganzen Zahlen k, l so wählen, daß $a(\mu + km)$ und $n(1 + lnm)$ beide nicht kleiner als $n_0 + i$ sind. Wegen $(a, m) = 1$ können wir k noch so wählen, daß

$$(9) \qquad (\mu + km, a) = 1$$

erfüllt ist. Dann liefert (8) wegen der Multiplikativität von $f(n)$

$$(10) \qquad f(n_0 + i) = f(a)\, f(\mu + km) = f(n)\, f(1 + lmn)\,.$$

Aus (10) läßt sich sofort ablesen: Wenn für irgendeine zur Periode m teilerfremde natürliche Zahl a der Funktionswert $f(a)$ gleich Null ist, dann ist $f(n) = 0$ für alle $n \geqq n_0$. Wenn es daher Argumente $n \geqq n_0$ geben soll, an denen der Funktionswert nicht verschwindet, so muß

$$(11) \qquad f(a) \neq 0 \quad \text{für} \quad (a, m) = 1$$

gelten. Wählen wir speziell $a = 1 + lmn$, dann ist nach (7) und (10)

$$(12) \qquad \mu \equiv r \pmod{m}\,; \quad f(n_0 + i) = f(a)\, f(r + km) = f(n)\, f(a)\,.$$

Wenn (11) erfüllt ist, so ist

$$(13) \qquad f(n) = f(r + km)$$

für *jedes* n der Restklasse $r \pmod{m}$; somit ist auch

$$(14) \qquad f(n) = f(r) \quad \text{für} \quad n \equiv r \pmod{m}$$

richtig. Für $n = 1$ folgt im besonderen

$$(15) \qquad f(\nu m + 1) = f(1) = 1 \; (\nu = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Wir setzen für den Augenblick zur Abkürzung $R(\mathfrak{F}) = R$. Aus $(\mathfrak{F})$ muß sich eine von Null verschiedene Unterdeterminante der Ordnung R bilden lassen:

$$(16) \qquad D = \begin{vmatrix} f(p_{r_1}^{s_1}) & f(p_{r_1}^{s_2}) & \cdots & f(p_{r_1}^{s_R}) \\ \vdots & & & \\ f(p_{r_R}^{s_1}) & \cdots & \cdots & f(p_{r_R}^{s_R}) \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Nach der Summendefinition der Determinante folgt, daß mindestens ein von Null verschiedenes Produkt der Gestalt

$$f(p_{\alpha_1}^{\beta_1})\, f(p_{\alpha_2}^{\beta_2}) \cdots f(p_{\alpha_R}^{\beta_R}) = f(p_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots p_{\alpha_R}^{\beta_R}) \tag{17}$$

existieren muß, worin $\alpha_1, \ldots, \alpha_R$ eine Permutation von $r_1, \ldots, r_R$ und $\beta_1, \ldots, \beta_R$ eine Permutation von $s_1, \ldots, s_R$ darstellen. Wenn $f(n) = 0$ für alle $n \geqq n_0$ erfüllt ist, dann ergibt dies

$$p_1^R p_2^{R-1} \cdots p_{R-1}^2 p_R \leqq p_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots p_{\alpha_R}^{\beta_R} < n_0 \,. \tag{18}$$

Aus (18) erhalten wir

$$R \log 2 + \sum_{\varrho=2}^{R} (R + 1 - \varrho) \leqq \sum_{\varrho=1}^{R} (R + 1 - \varrho) \log p_\varrho \leqq \log(n_0 - 1)\,;$$

$$\frac{R}{2} + \frac{R(R-1)}{2} < \log(n_0 - 1)\,; \quad R < \sqrt{2 \log n_0} \,. \tag{19}$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Satz 2. *$f(n)$ sei eine rein periodische multiplikative Funktion mit der Periode $m = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$. Wenn für einen Teiler d von m die Ungleichung $f(d) \neq 0$ erfüllt ist, dann ist für alle zu m teilerfremden a die Gleichung $(f(a))^{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)} = 1$ richtig. Ferner ist $(f(p_\varkappa^{\beta_\varkappa}))^{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)} = (f(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}))^{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)}$ für $\beta_\varkappa \geqq \alpha_\varkappa$ und $\varkappa = 1, \ldots, k$; bezeichnen wir mit $\pi(m)$ die Anzahl der verschiedenen Primzahlen, die m nicht übertreffen, so gilt schließlich noch die Ungleichung $R(\mathfrak{F}) \leqq \pi(m)$.*

Beweis. Es sei $(a, m) = 1$, $\varphi(m) = \varphi$. Dann ist $a^\varphi \equiv 1 \pmod{m}$. Aus der Restklasse $a \pmod{m}$ wählen wir die paarweise teilerfremden verschiedenen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_\xi$. Wir erhalten

$$f(a) = f(a_1) = \cdots = f(a_\xi)\,; \quad (f(a))^\xi = f(a^\xi)\,. \tag{20}$$

Wählen wir $\xi = \varphi$, so folgt mit Hilfe von (15)

$$(f(a))^\varphi = 1 \quad (f(a) = \varphi\text{-te Einheitswurzel})\,. \tag{21}$$

Nun betrachten wir für eine beliebige Zahl $\varkappa$ ($\leqq k$) die Restklasse $p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} \pmod{m}$. Für jedes n dieser Restklasse gilt

$$n = p_\varkappa^{\beta_\varkappa} n' \quad \text{mit} \quad \beta_\varkappa \geqq \alpha_\varkappa \quad \text{und} \quad (n', m) = 1\,. \tag{22}$$

Dabei können wir durch passende Wahl von n erreichen, daß $\beta_\varkappa$ jeden Wert $\geqq \alpha_\varkappa$ annimmt. Also folgt für zwei geeignet gewählte $n_1 = p_\varkappa^{\beta_\varkappa} n_1'$ und $n_2 = p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} n_2'$

$$f(n) = f(p_\varkappa^{\beta_\varkappa})\, f(n_1') = f(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa})\, f(n_2')\,; \quad (n_1' n_2', m) = 1\,; \quad \beta_\varkappa \geqq \alpha_\varkappa\,. \tag{23}$$

Nach (21) ist

$$|f(n_1')| = |f(n_2')| = 1\,. \tag{24}$$

Somit liefert (23)

$$|f(p_\varkappa^{\beta_\varkappa})| = |f(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa})| \quad \text{für} \quad \beta_\varkappa \geqq \alpha_\varkappa \quad \text{und} \quad \varkappa = 1, \ldots, k\,. \tag{25}$$

Ist im besonderen

$$f(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}) = 0\,, \tag{26}$$

so ist

(27) $$f(p_\varkappa^{\beta_\varkappa}) = f(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}) = 0 \quad \text{für} \quad \beta_\varkappa \geqq \alpha_\varkappa .$$

Es sei jetzt

(28) $$m = dm' ; \quad f(d) \neq 0 .$$

Wenigstens für $d = 1$ ist (28) erfüllt. Wir haben zunächst

(29) $$f(d) = f(d + \nu m) = f(d(1 + \nu m')) \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Es läßt sich ν immer so wählen, daß $(1 + \nu m', d) = 1$ erfüllt ist. Dann folgt nach (28) und (29)

(30) $$f(1 + \nu m') = 1 \quad (\text{für alle } \nu \text{ mit } (1 + \nu m', d) = 1) .$$

Sei wieder $(a, m) = 1$. Dann folgt

(31) $$f(ad) = f(a)\, f(d) = f(ad + \nu m) = f(d(a + \nu m')) .$$

Es läßt sich auch hier ν so wählen, daß $(a + \nu m', d) = 1$ erfüllt ist. Dann erhalten wir wegen (28)

(32) $$f(a) = f(a + \nu m') .$$

Wir haben nun

(33) $$(a + \nu m', dm') = (a + \nu m', m) = 1 ; \quad (a + \nu m')^{\varphi(m')} = 1 + \nu' m' ;$$
$$(1 + \nu' m', d) = 1 .$$

Aus (30) und (32) folgt damit

(34) $$(f(a))^{\varphi(m')} = (f(a))^{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)} = f((a + \nu m')^{\varphi(m')}) = f(1 + \nu' m') = 1 .$$

Nach (23) ergibt sich

(35) $$(f(p_\varkappa^{\beta_\varkappa}))^{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)} = (f(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}))^{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)} .$$

Sind p, p' zwei verschiedene Primzahlen, so zieht

(36) $$p \equiv p' \pmod{m}$$

sogleich

(37) $$(pp', m) = 1 ; \quad f(p^\alpha) = f(p'^\alpha) \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 1$$

nach sich. Die Anzahl der verschiedenen $p < m$ mit $p \nmid m$ ist $\pi(m) - k$. Also gewinnen wir die Abschätzung $R(\mathfrak{F}) \leqq \pi(m)$. Damit ist Satz 2 bewiesen. Wir wollen uns jetzt mit der Umkehrung der bisherigen Untersuchungen befassen. Zunächst nehmen wir nur an, daß $f(n)$ genau die endlich vielen verschiedenen Funktionswerte $a_1, a_2, \ldots, a_N$ annimmt. Es seien n_j $(j = 1, \ldots, N)$ die kleinsten natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft

(38) $$f(n_j) = a_j .$$

Außerdem seien die a_j und n_j so geordnet, daß

(39) $$0 \leqq |a_1| \leqq |a_2| \leqq \cdots \leqq |a_N|$$

gilt und aus $j < j'$ und $|a_j| = |a_{j'}|$ auch $n_j < n_{j'}$ folgt. Wir wollen einige Folgerungen aus der Multiplikativität von $f(n)$ herleiten. Für jede Primzahl p mit $(p, n_N) = 1$ und $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ gilt

$$|f(p^\alpha n_N)| = |a_N|\, |f(p^\alpha)| \leqq |a_N| \,. \tag{40}$$

Da wir nach den eingangs gemachten Voraussetzungen $f(1) = 1$ annehmen können, muß $|a_N| \neq 0$ sein. Also folgt aus (40)

$$|f(p^\alpha)| \leqq 1 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 1 \quad \text{und} \quad (p, n_N) = 1 \,. \tag{41}$$

Wenn $a_1 \neq 0$ erfüllt ist, dann gilt für jede Primzahl p mit $(p, n_1) = 1$ und $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$

$$|f(p^\alpha n_1)| = |a_1|\, |f(p^\alpha)| \geqq |a_1| \,; \quad |f(p^\alpha)| \geqq 1 \,. \tag{42}$$

Aus (39) folgt immer $a_2 \neq 0$. Für jedes p mit $(p, n_2) = 1$ und $\alpha \geqq 1$ gilt

$$|f(p^\alpha n_2)| = |a_2|\, |f(p^\alpha)| \geqq |a_2| \ \text{oder} = 0 \,; \quad |f(p^\alpha)| \geqq 1 \ \text{oder} = 0 \,. \tag{43}$$

Wir erhalten damit als erstes *Zwischenergebnis:*

$$\begin{aligned} &\textit{Aus}\ a_1 \neq 0,\ (p, n_1 n_N) = 1 \ \textit{folgt}\ |f(p^\alpha)| = 1 \ \textit{für}\ \alpha \geqq 1 \,; \\ &\textit{aus}\ a_1 = 0,\ (p, n_2 n_N) = 1 \ \textit{folgt}\ |f(p^\alpha)| = 1 \ \textit{oder}\ f(p^\alpha) = 0 \\ &\textit{für}\ \alpha \geqq 1 \,. \end{aligned} \tag{44}$$

Wir wollen (39) noch etwas genauer formulieren. Es gelte

$$\begin{aligned} &\text{I. } 0 < |a_1| = |a_2| = \cdots = |a_{j_1}| < |a_{j_1+1}| = \cdots = |a_{j_1+j_2}| < \cdots \\ &\quad < |a_{j_1+\cdots+j_{l-1}+1}| = \cdots = |a_{j_1+\cdots+j_l}| \,; \quad j_1 + j_2 + \cdots + j_l = N \,. \\ &\text{II. } a_1 = 0 \,; \quad |a_2| = \cdots = |a_{j_1}| < |a_{j_1+1}| = \cdots = |a_{j_1+j_2}| < \cdots \\ &\quad < |a_{j_1+\cdots+j_{l-1}+1}| = \cdots = |a_{j_1+\cdots+j_l}| \,; \quad j_1 + \cdots + j_l = N \,. \end{aligned} \tag{45}$$

Wir betrachten jetzt eine Primzahl p, für welche die Bedingung $(p, n_1 n_2 \ldots n_N) = 1$ erfüllt ist; weiterhin sei für ein $\alpha \geqq 1$ auch noch $f(p^\alpha) \neq 0, 1$. Dann ist nach (44)

$$f(p^\alpha) = e^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad 0 < \varphi < 2\pi \,. \tag{46}$$

Wir gewinnen aus (45), I, indem wir uns $n_1, \ldots, n_{j_1}, \ldots, n_N$ mit p^α multipliziert denken und die dazugehörigen Funktionswerte betrachten

$$a_1 a_2 \cdots a_{j_1} e^{i j_1 \varphi} = a_1 a_2 \cdots a_{j_1} \,; \quad e^{i j_1 \varphi} = 1 \,; \quad \varphi = \frac{2\pi\nu_1}{j_1} \,, \tag{47}$$

entsprechend

$$\varphi = \frac{2\pi\nu_1}{j_1} = \frac{2\pi\nu_2}{j_2} = \cdots = \frac{2\pi\nu_l}{j_l} \,, \tag{48}$$

wobei $\nu_1, \ldots, \nu_l$ natürliche Zahlen sind. Aus (46) folgt sofort

$$0 < \frac{2\pi\nu_\lambda}{j_\lambda} < 2\pi \,; \quad 0 < \nu_\lambda < j_\lambda \quad (\lambda = 1, \ldots, l) \,. \tag{49}$$

Aus (46) und (47) ersehen wir

$$(f(p^\alpha))^{j_\lambda} = 1 \quad \text{für} \quad \lambda = 1, \ldots, l \,. \tag{50}$$

Für den größten gemeinsamen Teiler j von $j_1, \ldots, j_l$ gilt als zweites *Zwischenergebnis:*

$$(f(p^\alpha))^j = 1\,; \quad j \,|\, N\,. \tag{51}$$

Im Fall (45), II ergibt sich ähnlich für den größten gemeinsamen Teiler j^* von $j_1 - 1, j_2, \ldots, j_l$ und $(p, n_2 n_3 \ldots n_N) = 1$, $f(p^\alpha) \neq 0, 1$ das dritte *Zwischenergebnis:*

$$(f(p^\alpha))^{j^*} = 1\,; \quad j^* \,|\, N - 1\,. \tag{52}$$

Mit weiteren Voraussetzungen über $f(n)$ erhalten wir zum Abschluß den

Satz 3. *Es sei $f(n)$ eine multiplikative zahlentheoretische Funktion, die nur endlich viele verschiedene Werte $a_1, a_2, \ldots, a_N$ annimmt. Es sei für jede Primzahl p der $\lim\limits_{\alpha = 1, 2, 3, \ldots} f(p^\alpha)$ vorhanden. Wenn $0 < |a_1| = \cdots = |a_{j_1}| < |a_{j_1+1}| = \cdots \cdots = |a_{j_1+j_2}| < \cdots \leqq |a_{j_1 + \cdots + j_l}|$, $(j_1 + j_2 + \cdots + j_l = N)$ und g. g. T. $(j_1, j_2, \ldots, j_l) = 1$ erfüllt sind, dann ist $f(n)$ rein periodisch, d. h. es existiert eine natürliche Zahl m so, daß für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung $f(n + m) = f(n)$ gilt.*

Beweis. Nach (51) haben wir

$$f(p^\alpha) = 1 \tag{53}$$

für alle Primzahlen p mit $(p, n_1 \ldots n_N) = 1$ und $\alpha \geqq 1$. Für alle zu $n_1 n_2 \ldots n_N$ teilerfremden n ist also $f(n) = 1$. Es besitze $n_1 n_2 \ldots n_N$ genau die verschiedenen Primteiler $p_1, \ldots, p_k$. Wegen der Existenz von $\lim\limits_{\alpha \to \infty} f(p_\varkappa^\alpha)$ für $\varkappa = 1, \ldots, k$ existiert zu jedem $\varkappa$ ein Exponent $\alpha_\varkappa$ so, daß

$$f(p_\varkappa^{\beta_\varkappa}) = f(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}) \quad \text{für} \quad \beta_\varkappa \geqq \alpha_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k) \tag{54}$$

gilt. Wir setzen jetzt

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = m\,. \tag{55}$$

Nun sei n eine beliebige natürliche Zahl. Dann können wir n schreiben in der Gestalt

$$n = n' \prod_{\varkappa = 1}^{k} p_\varkappa^{\beta_\varkappa}; \quad \beta_\varkappa \geqq 0\,; \quad (n', m) = 1\,. \tag{56}$$

Daraus ergibt sich

$$f(n + m) = f\left(\prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\gamma_\varkappa}\left(n' \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\beta_\varkappa - \gamma_\varkappa} + \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa - \gamma_\varkappa}\right)\right), \tag{57}$$

mit $\gamma_\varkappa = \min(\alpha_\varkappa; \beta_\varkappa)$. Wir setzen zur Abkürzung

$$n' \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\beta_\varkappa - \gamma_\varkappa} + \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa - \gamma_\varkappa} = n''\,. \tag{58}$$

Ist, für ein $\varkappa$,

$$\beta_\varkappa < \alpha_\varkappa, \quad \text{also auch} \quad \beta_\varkappa = \gamma_\varkappa\,, \tag{59}$$

so erhalten wir

$$(p_\varkappa, n'') = 1\,. \tag{60}$$

Aus (53) und (56) ergibt sich

$$(61) \qquad f(n) = \prod_{\varkappa=1}^{k} f(p_\varkappa^{\beta_\varkappa}) .$$

Aus (53), (54) und (57) bis (60) folgt

$$(62) \qquad f(n+m) = \prod_{\varkappa=1}^{k} f(p_\varkappa^{\beta_\varkappa}) .$$

Hiermit ist Satz 3 bewiesen.

(Eingegangen am 15. Februar 1961)

Anmerkung bei der Korrektur: Die Möbius-Funktion $\mu(n)$ nimmt die Werte $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$ an. Es ist $\lim_{\alpha\to\infty} \mu(p^\alpha) = 0$; $\mu(n)$ ist aber nicht periodisch, da wir für eine Primzahl p der Restklasse 1 (mod m), wobei m eine angenommene Periode bedeuten soll, den Widerspruch $-1 = \mu(p) = \mu(1 + \nu m) = \mu(1) = 1$ erhalten. Die durch $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(p^\alpha) = 1$ für alle Primzahlen p und alle ganzzahligen $\alpha > 1$, $f(p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ für ungerade p definierte Funktion erfüllt alle Bedingungen von Satz 3 bis auf $(j_1, \ldots, j_l) = 1$; $f(n)$ ist nicht periodisch. Sei m eine Periode, die genau durch 2^β $(\beta \geqq 0)$ teilbar sein soll. Dann ist $f(2^\beta + \nu m) = f(2^\beta) = f(2^\beta)\, f\left(1 + \nu \frac{m}{2^\beta}\right)$, $f\left(1 + \nu \frac{m}{2^\beta}\right) = 1$. Ist aber p eine Primzahl der Restklasse $1 + 2\frac{m}{2^\beta}$ (mod $4m$), so folgt $f(p) = -1$. Die angeführten Beispiele zeigen, daß Satz 3 in gewissem Sinn „scharf" ist.

KUNLE, H.
Math. Annalen 144, 142—161 (1961)

Zur projektiven Kinematik der Kurven des n-dimensionalen projektiven Raumes. I

Von

HEINZ KUNLE in Freiburg i. Br.

Ältere Behandlungsweisen der projektiven Differentialgeometrie einparametriger Gebilde (Kurven, Regelflächen usw.) gingen oft davon aus, durch Festlegung eines invarianten Parameters zu einer Vereinfachung des zugrunde gelegten Formelapparates und zu Invarianten zu gelangen.

In neuerer Zeit hat nun G. BOL[1]) durch die Einführung halbinvarianter Methoden auf die Möglichkeit hingewiesen, ohne Komplizierung des Kalküls das einparametrige Gebilde zusammen mit der Gesamtheit seiner Parameterverteilungen zu betrachten. Auch auf diesem Wege gelangt man zu Invarianten des Gebildes und über die bisher bekannten Ergebnisse hinaus zu neuen Aussagen einer *Geometrie der Parameterverteilungen* des einparametrigen Gebildes, zu der auch die vorliegende Arbeit für den Fall der Kurven des projektiven n-dimensionalen Raumes P_n einen Beitrag liefern will.

Unter Heranziehung gewisser von G. BOL [9] in der Kurventheorie des P_3 eingeführter Kurvenscharen *(Harmonikal-Scharen)*, deren Definition in Abschnitt 1 ohne spezielle Festlegung des zugehörigen einparametrigen Gebildes angegeben ist, werden wir den Kurven des P_n[2]) projektive Bewegungen *(Harmonikal-Bewegungen)* zuordnen (Abschnitt 2). Sie stellen eine projektive Beziehung zwischen den Schmiegräumen S_r $(r = 0, \ldots, n)$ längs der Kurve her und führen einerseits auf kinematische Fragestellungen, andererseits im Rahmen der Kurventheorie auf Kennzeichnungen verschiedener Typen von Kurven.

Weiter wird in Abschnitt 3 die Gesamtheit der momentanen Fixpunkte solcher Bewegungen untersucht und sodann in 4 gezeigt, wie sich der von M. BARNER[3]) mehrfach verwendete Begriff der *Zentralbewegung* in weitgehend verallgemeinerter Gestalt auf Harmonikal-Bewegungen übertragen läßt. Die kinematischen Eigenschaften solcher verallgemeinerter Zentralbewegungen

---

[1]) Man vgl. für die Kurventheorie des zwei-, drei- und mehrdimensionalen Raumes [9], [11], [12], [14], für die Streifentheorie [9], [13] und für die Theorie der Regelflächen [9], [10]. Es sei weiter auf die analoge Behandlung der Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen [5] und der Kurven auf Quadriken [7] durch M. BARNER sowie auf [16], [17] verwiesen. Herrn G. BOL möchte ich für seine wertvollen Anregungen zu dieser Arbeit herzlich danken.

[2]) Auf ähnliche Fragen bei anderen einparametrigen Gebilden wollen wir bei späterer Gelegenheit eingehen.

[3]) M. BARNER hat Fragen der projektiven Kinematik behandelt in [2], [3], [4], [6], [8]. Man vgl. auch H. PRADE [15].

hängen eng mit dem differentialgeometrischen Verhalten der Ausgangskurve zusammen. Insbesondere ergeben sich auch neue Aussagen für die Kurven des P_2 und P_3.

In der hier vorliegenden Note ist der Fall $r = n$ bevorzugt behandelt. Wir werden dann in einem späteren zweiten Teil auf solche Fragestellungen und Ergebnisse eingehen, die sich auch auf die Harmonikal-Bewegungen der Schmiegräume S_r mit $r < n$ beziehen.

1. Harmonikal-Scharen in der Grundebene

1.1. Die differentialgeometrische Behandlung einparametriger Gebilde mit halbinvarianten Methoden macht Gebrauch von Ableitungsgleichungen, in denen neben den das Gebilde bestimmenden Vektoren zweierlei Arten von Funktionen auftreten. Die Funktionen der ersten Art sind *Halbinvarianten*, das bedeutet, daß sich eine solche Größe $g(t)$ bei einer sogenannten „Sterntransformation" des für das Gebilde gewählten Parameters

$$t = f(t^*)\,, \quad \frac{dt^*}{dt} = \varphi\,, \quad \frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi} = A \tag{1.1}$$

gemäß

$$g^* = \varphi^{-\gamma} g \tag{1.2}$$

transformiert; γ heißt dabei das Gewicht der Halbinvarianten g.

Eine Größe $a(t)$ der zweiten Art zeigt dagegen bei Sterntransformation das Transformationsverhalten

$$a^* = \varphi^{-2}(a + A' - A^2) \tag{1.3}$$

und hängt also wesentlich von der Parameterverteilung ab.

Während nämlich nach (2) das Verschwinden einer Halbinvarianten parameterunabhängige und somit geometrische Bedeutung besitzt, kann man nach (3) durch geeignete Wahl von $A(t)$, also durch passende Parameterwahl erreichen, daß

$$a^* = 0\,. \tag{1.4}$$

1.2. Mit G. Bol [9] verallgemeinern wir dies auf die folgende Weise; $g(t)$ sei eine Funktion des zugrundeliegenden „Urparameters" t, die sich bei (1) halbinvariant vom Gewicht 2 verhalten soll,

$$g^* = \varphi^{-2} g\,. \tag{1.5}$$

Wir wollen alle Parameterverteilungen bestimmen, für die

$$a^* = g^*\,. \tag{1.6}$$

Nach (3) und (5) führt das auf eine Riccatische Differentialgleichung für A,

$$A' - A^2 + a = g\,. \tag{1.7}$$

Die Lösungen $A(t)$ stellen in einer (t, A)-Ebene, die wir auch die *Grundebene* nennen, Kurven einer einparametrigen Schar dar, die die Geraden $t = \text{const}$ projektiv aufeinander abbilden.

Zu jedem $g(t)$ gehört eine eindeutig bestimmte solche Kurvenschar, und zu verschiedenen g_1, g_2 gehören auch verschiedene Scharen. Wir sprechen von der *zu g gehörigen Harmonikal-Schar (H-Schar)*, und dies auch dann, wenn diese Kurvenschar nicht in der Grundebene, sondern auf einer mit dem betrachteten Gebilde verknüpften Fläche gedeutet wird, die auf dieselben Parameter t, A bezogen ist.

Es zeigt sich nämlich[4]), daß bei den Änderungen (1) der Parameterverteilung die Begleitsimplexe des Gebildes, betrachtet an einer festen Stelle $t = t_0$, sich ebenfalls ändern können, und zwar gibt es an jeder Stelle eine einparametrige Gesamtheit solcher Simplexe, als deren Parameter man A ansehen kann. Jeder Lösungskurve $A(t)$ von (7) entspricht dann ein *Bezugssystem*, d. h. an jeder Stelle t ein Begleitsimplex, und jedes Begleitsimplex bestimmt eindeutig das zugehörige Bezugssystem (bzw. die entsprechende Kurve) in der zu g gehörigen H-Schar, da eine Lösung von (7) durch Vorgabe eines Anfangswertes bestimmt ist.

Andererseits bestimmt ein beliebiges Bezugssystem, also eine beliebige Kurve $A(t)$ der Grundebene eindeutig eine H-Schar, der sie angehört. Denn durch (7) wird g festgelegt.

Damit zerfällt die Gesamtheit der Bezugssysteme in *Klassen von je* ∞^1 *Bezugssystemen*, jeder Klasse entspricht eineindeutig eine Funktion $g(t)$ und auch eine H-Schar. Wir bezeichnen die zu g gehörige Klasse mit dem Symbol $\{g\}$

Diese Klasseneinteilung der Bezugssysteme bewirkt weiter eine *Klasseneinteilung der Parameterverteilungen*. Sei nämlich $g(t)$ und damit die zugehörige H-Schar (7) gegeben. Greifen wir eine Lösung $A(t)$ von (7) heraus, so liefert (1) zugehörige Parametertransformationen $t = f(t^*)$, wo t^* ein zur Klasse gehöriger Parameter ist. Wir dürfen also annehmen, daß schon der Urparameter t zur Klasse gehört, so daß (6) bereits für t gilt,

$$a = g\,. \tag{1.8}$$

Dann reduziert sich (7) auf

$$A' - A^2 = 0\,. \tag{1.9}$$

Nach (9) und (1) gilt also für die zur Klasse $\{g\}$ gehörigen Parameter

$$t^* = \frac{pt + q}{rt + s}\,, \quad ps - qr \neq 0, \quad p, q, r, s = \text{const}\,. \tag{1.10}$$

Die zur Klasse $\{g\}$ gehörigen ∞^3 Parameter hängen projektiv zusammen[5]).

Von besonderer Bedeutung ist natürlich der schon eingangs hervorgehobene Fall $g = 0$. Wir sprechen hier von der *Null-Klasse* $\{0\}$ mit ∞^1 *Null-Bezugssystemen* und ∞^3 *Null-Parametern*, um die verschiedenartigen Bezeichnungsweisen zusammenzufassen, die bei den verschiedenen einparametrigen Gebilden üblich sind (Koinzidenz-, Torsal-, Cartansche Parameter usw.[6])).

Beschränkt man sich auf Parametertransformationen innerhalb der gleichen Klasse $\{g\}$, so ist wegen (8), (9) und (3) jetzt auch a eine Halbinvariante.

[4]) Man vgl. 2.1.
[5]) Vgl. G. Bol [9], § 48.
[6]) Man vgl. [9], [10].

Man hätte statt der oben angestellten Überlegungen auch von der Frage ausgehen können, bei welchen speziellen Parametertransformationen $a(t)$ sich halbinvariant verhält, und wäre auch so zu unserer Klasseneinteilung gelangt.

Zur genaueren Untersuchung einer Klasse $\{g\}$ und ihrer H-Schar wird man zweckmäßigerweise einen speziellen Parameter der Klasse als Urparameter zugrunde legen; dann legt a nach (8) die Klasse fest,

(1.11) $$\{g\} = \{a\},$$

weiter gilt (9), und die H-Schar ist in der Grundebene gut zu überblicken (Fig. 1).

Gelegentlich ist es von Vorteil, die (t, A)-Grundebene durch eine (t, B)-Ebene mit

(1.12) $$B = A^{-1}$$

zu ersetzen. Man hat dann statt (9)

(1.13) $$B' + 1 = 0$$

und als H-Schar in dieser Ebene eine Schar paralleler Geraden (Fig. 2).

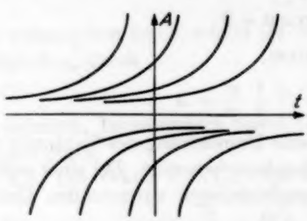

Fig. 1

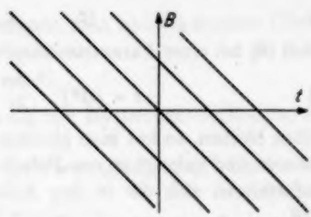

Fig. 2

Fig. 1 und 2. Die Harmonikal-Schar in der (t, A)- bzw. (t, B)-Grundebene, wenn der gewählte Parameter t zur Klasse $\{g\}$ gehört

Diese allgemeinen Überlegungen werden wir nun im folgenden auf die Kurventheorie des n-dimensionalen projektiven Raumes anwenden.

2. Harmonikal-Scharen und Harmonikal-Bewegungen

Wir wollen in diesem Abschnitt zunächst den Bolschen halbinvarianten Kalkül zur Behandlung der n-dimensionalen Kurventheorie skizzieren und definieren dann die für alles weitere grundlegenden Begriffe *Harmonikal-Bewegung* und *Harmonikal-Fläche*.

2.1. Nach G. Bol [14] läßt sich einer Kurve des n-dimensionalen projektiven Raumes P_n

(2.1) $$\mathfrak{x}(t) = \{x_0(t), \ldots, x_n(t)\}$$

für jeden Wert des Parameters t ein Begleitsimplex

(2.2) $$\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n$$

zuordnen, das den *Ableitungsgleichungen*

$$(2.3)\qquad \mathfrak{x}_r' = \mathfrak{x}_{r+1} + \sum_{\mu=1}^{r} a_{r\mu}^n e_\mu \mathfrak{x}_{r-\mu}; \qquad \mathfrak{x}_{n+1} = 0; \; r = 0, \ldots, n$$

genügt. Hierin sind die e_μ Funktionen von t, die wir als *Kurveninvarianten* bezeichnen wollen, und die $a_{r\mu}^n$ haben für ganzzahlige nichtnegative n, r, μ die konstanten Werte

$$(2.4)\qquad a_{r\mu}^n = \begin{cases} \dfrac{r!(n-r+\mu)!}{(r-\mu)!\,(n-r)!} & \text{für } n \geqq r \geqq \mu, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Insbesondere ist also

$$(2.5)\qquad \left.\begin{array}{l} a_{r0}^n = 1 \\ a_r^n = a_{r1}^n = r(n-r+1) \end{array}\right\} \text{für } n \geqq r.$$

Den oberen Index bei $a_{r\mu}^n$ geben wir in Zukunft nur dann ausdrücklich an, wenn er von der Dimension n des zugrunde gelegten Raumes P_n abweicht.

Eine wesentliche Eigenschaft der Ableitungsgleichungen (3) ist die Konstanz der Determinante der Vektoren $\mathfrak{x}_r$, also

$$(2.6)\qquad (\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n) = \text{const} \neq 0.$$

Soll (6) bei einer Parametertransformation

$$(2.7)\qquad t = f(t^*), \quad \frac{dt^*}{dt} = \varphi, \quad \frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi} = A$$

erhalten bleiben, so hat man gleichzeitig eine Umnormung des Vektors $\mathfrak{x}$ vorzunehmen und gelangt so zur Bolschen *Sterntransformation:* Bei einer solchen transformieren sich die in den Ableitungsgleichungen auftretenden Größen gemäß

$$(2.8)\qquad e_1^* = \varphi^{-2}(e_1 + A' - A^2),$$

$$(2.9)\qquad e_\mu^* = \varphi^{-\mu-1} e_\mu, \qquad \mu = 2, \ldots, n,$$

$$(2.10)\qquad \mathfrak{x}_r^* = \varphi^{\frac{n}{2}-r}\, \bar{\mathfrak{x}}_r$$

mit[7])

$$(2.11)\qquad \bar{\mathfrak{x}}_r = \sum_{\mu=0}^{r} a_{r\mu} \frac{A^\mu}{\mu!} \mathfrak{x}_{r-\mu}; \qquad r = 0, \ldots, n.$$

$e_2, \ldots, e_n$ sind also halbinvariant, während e_1 der in 1 genannten Funktion $a(t)$ entspricht.

Wir heben für später noch hervor: *Die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ ist genau dann eine rationale Normkurve C_n der Ordnung n, wenn*

$$(2.12)\qquad e_2 = \cdots = e_n = 0.$$

Gilt (12) lokal, also an einer Stelle $t = t_0$, so spricht man von einer *C_n-Stelle* der Kurve.

[7]) Aus (11) entnimmt man den in 1.2 erwähnten Sachverhalt, daß an jeder Kurvenstelle die Begleitsimplexe eine einparametrige Gesamtheit mit A als Parameter darstellen.

Für das Folgende ist es bequem, wenn wir noch setzen

$$e_0 = 0\,, \quad e_{n+1} = 1\,. \tag{2.13}$$

2.2. Den Ableitungsgleichungen (3) für Punktvektoren lassen sich weiterhin nach G. Bol Ableitungsgleichungen für Hyperebenenvektoren zur Seite stellen. Wenn wir die Vektoren der Hyperebenen des Begleitsimplexes (2) durch die Produkttabelle

$$\begin{array}{c|ccccc} & \mathfrak{x}_0 & \mathfrak{x}_1 & \cdots & \mathfrak{x}_{n-1} & \mathfrak{x}_n \\ \hline \mathfrak{X}_0 & 0 & & & & +1 \\ \mathfrak{X}_1 & & & & -1 & \\ \vdots & & & \iddots & & \\ \mathfrak{X}_n & (-1)^n & & & & 0 \end{array}\,, \tag{2.14}$$

also bei Verwendung des Kronecker-Symbols durch

$$\mathfrak{X}_\mu \mathfrak{x}_\nu = (-1)^\mu \delta_{n,\mu+\nu} \tag{2.15}$$

erklären, dann haben ihre Ableitungsgleichungen die Gestalt

$$\mathfrak{X}'_r = \mathfrak{X}_{r+1} + \sum_{\mu=1}^{r} a_{r\mu} \tilde{e}_\mu \mathfrak{X}_{r-\mu}\,; \qquad \mathfrak{X}_{n+1} = 0\,. \tag{2.16}$$

Sie entsprechen den Formeln (3) vollkommen, man hat bei dualem Übergang lediglich e_μ durch

$$\tilde{e}_\mu = (-1)^{\mu+1} e_\mu \tag{2.17}$$

zu ersetzen. Insbesondere bleibt (10) auch für Hyperebenenvektoren unverändert gültig.

2.3. Der Vektor $\bar{\mathfrak{x}}_r$ in (11) oder auch bei Verwendung von (1.12) der Vektor

$$\hat{\mathfrak{x}}_r = B^r \bar{\mathfrak{x}}_r = \sum_{\mu=0}^{r} a_{r\mu} \frac{B^{r-\mu}}{\mu!} \mathfrak{x}_{r-\mu} \tag{2.18}$$

beschreibt bei festem t in Abhängigkeit von A bzw. B eine rationale Normkurve C_r der Ordnung r ($r = 0, \ldots, n$), die den r-ten Schmiegraum S_r der Dimension r aufspannt. Wir nennen diese C_r die *Harmonikal-C_r* (*H-C_r*) der Kurve.

Der Zusammenhang zwischen den H-C_r und der H-C_n ist einfach: Die Schmieghyperebenen der H-C_n schneiden den Schmiegraum S_r in Unterräumen U_{r-1}, die gerade die Schmiegräume $(r-1)$-ter Dimension der H-C_r sind. Man kann das sofort aus unseren Formeln entnehmen, wenn man die wichtige Beziehung

$$\bar{\mathfrak{x}}_{rA} = r(n-r+1)\bar{\mathfrak{x}}_{r-1} = a_r \bar{\mathfrak{x}}_{r-1}\,; \qquad r = 0, \ldots, n \tag{2.19}$$

beachtet. (19) folgt aus (11) durch partielle Differentiation nach A, a_r war in (5) erklärt.

Da sich die H-C_n der Kurve in einfacher Weise geometrisch charakterisieren läßt[8]), so ist damit auch die geometrische Beziehung aller H-C_r mit $r < n$ zur Kurve geklärt.

---

[8]) Vgl. M. Barner [1].

Längs der Kurve $\mathfrak{x}(t)$, also in Abhängigkeit von t, beschreibt nun jede H-C_r eine Fläche, die wir die *r-te Harmonikal-Fläche* (*H-Fläche*) nennen und mit (C_r) bezeichnen wollen. (C_0) entartet dabei in die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ selbst, (C_1) ist deren Tangentenfläche, (C_2) die Fläche der Harmonikal-Kegelschnitte usw.

Ist nun eine Halbinvariante g vom Gewicht 2 vorgegeben, so können wir, wie in 1 ausgeführt wurde, t als Parameter der Klasse $\{g\}$ wählen, und die zu g gehörige H-Schar

$$A' - A^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad B' + 1 = 0 \tag{2.20}$$

läßt sich jetzt als Kurvenschar auf der r-ten H-Fläche deuten. Ihre Darstellung ist durch (11) bzw. (18) gegeben, wenn man dort A bzw. B als Lösungen von (20) auffaßt. (20) sind Riccatische Differentialgleichungen: *Jede H-Schar bildet die H-C_r projektiv aufeinander ab.*

Diese projektive Beziehung zwischen zwei H-C_r läßt sich nun erweitern zu einer projektiven Abbildung der entsprechenden Schmiegräume S_r aufeinander! Es lassen sich nämlich zwei H-C_r durch eine Projektivität ihrer Räume S_r so projektiv aufeinander abbilden, daß sich je drei beliebig vorgegebene Punkte der beiden H-C_r entsprechen. Denn zunächst sind je zwei Normkurven C_r stets projektiv äquivalent, und weiter gibt es stets eine Projektivität einer C_r auf sich, die drei ihrer Punkte auf drei beliebig vorgegebene abbildet. Wählt man diese drei entsprechenden Punkte auf denselben Kurven der H-Schar von (C_r), so werden alle entsprechenden Punkte der beiden H-C_r ineinander übergeführt. Offenbar gibt es auch nur eine derartige Projektivität, da sie durch $n+2$ Punkte der H-C_r in allgemeiner Lage bestimmt ist. Sie ordnet nicht nur die Punkte der H-C_r, sondern nunmehr alle Punkte der beiden Schmiegräume S_r eineindeutig einander zu. Daher:

Eine zu g gehörige H-Schar auf der H-Fläche (C_r) bestimmt eindeutig eine projektive Beziehung aller Schmiegräume S_r längs der Kurve aufeinander.

Wir sprechen von einer *projektiven Bewegung*, genauer von der *r-ten Harmonikal-Bewegung (H-Bewegung)* $\mathfrak{B}_r$ der Schmiegräume S_r $(r = 0, \ldots, n)$.

$\mathfrak{B}_r$ läßt sich analytisch erfassen durch Angabe einer *Basis*, d. h. durch $r+1$ Vektoren $\mathfrak{a}_\varrho(t)$ $(\varrho = 0, \ldots, r)$ mit $\mathfrak{a}_\varrho(t) \in S_r(t)$, die so beschaffen sind, daß ihre Linearkombinationen mit konstanten Koeffizienten

$$\mathfrak{p} = \sum_{\varrho=0}^{r} \lambda_\varrho \mathfrak{a}_\varrho, \quad \lambda_\varrho = \text{const} \tag{2.21}$$

die *Bahnkurven* der Bewegung sind. Eine solche Basis ist nun durch

$$\mathfrak{a}_\varrho = \sum_{\mu=0}^{\varrho} a_{\varrho,\mu}^{n-r+\varrho} \frac{\dot{B}_0^{\varrho-\mu}}{\mu!} \mathfrak{x}_{r-\mu}; \qquad \varrho = 0, \ldots, r \tag{2.22}$$

gegeben, wo $B_0(t)$ eine beliebig gewählte Lösung von (20) ist. (Man findet diese Basis, indem man zwei der Ecken, nämlich $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_r$, auf zwei Kurven der H-Schar von (C_r) wählt; das Simplex der $\mathfrak{a}_\varrho$ baut sich dann lokal aus den aufeinanderfolgenden Schmiegräumen der H-C_r in $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_r$ auf.)

Daß (22) wirklich eine Basis der H-Bewegung $\mathfrak{B}_r$ auch in der richtigen Normierung darstellt, bestätigt man, indem man zeigt, daß sich die Kurven

der H-Schar (18) in der Gestalt (21) darstellen lassen. Setzt man nämlich

$$\lambda_\varrho = \binom{r}{\varrho}(B - B_0)^{r-\varrho}, \tag{2.23}$$

so ist λ_ϱ wegen (20) konstant, und andererseits ist

$$\begin{aligned} \sum_{\varrho=0}^{r} \lambda_\varrho \mathfrak{a}_\varrho &= \sum_{\varrho=0}^{r} \sum_{\mu=0}^{\varrho} \binom{r}{\varrho} a_{\varrho,\mu}^{n-r+\varrho} \frac{1}{\mu!}(B - B_0)^{r-\varrho} B_0^{\varrho-\mu} \mathfrak{x}_{r-\mu} \\ &= \sum_{\mu=0}^{r} \left[\sum_{\varrho=\mu}^{r} \binom{r-\mu}{\varrho-\mu}(B - B_0)^{r-\varrho} B_0^{\varrho-\mu}\right] a_{r\mu}^{n} \frac{1}{\mu!} \mathfrak{x}_{r-\mu} \\ &= \sum_{\mu=0}^{r} a_{r\mu}^{n} \frac{B^{r-\mu}}{\mu!} \mathfrak{x}_{r-\mu} \\ &= \hat{\mathfrak{x}}_r . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Wir bemerken noch, daß $\mathfrak{x}_r$ stets, dagegen (für $r > 0$) $\mathfrak{x}_0$ niemals eine Kurve der H-Sch r von (C_r), also eine Bahnkurve von $\mathfrak{B}_r$ durchläuft.

2.4. Unsere Überlegungen und Definitionen lassen sich sämtlich auch dualisieren:

Einer H-C_r in S_r mit der Parameterdarstellung (11) oder (18) entspricht dual eine Hyperebenenschar $\tilde{C}_r$ ebenfalls von r-ter Ordnung mit einer zu (18) analogen Darstellung in Hyperebenenvektoren. „Kern" dieser Hyperebenenschar ist dabei der zu S_r duale Raum, das ist der Schmiegraum S_{n-r-1}, wie man aus (14) entnehmen kann.

Insbesondere ist die H-C_n als H-$\tilde{C}_n$ zu sich selbst dual als Punkt- und Hyperebenengesamtheit, es wird sich daher auch der Fall $r = n$ im folgenden immer als besonders wichtig herausstellen. Zwischen der H-$\tilde{C}_n$ und den H-$\tilde{C}_r$ bestehen dual analoge Beziehungen zu jenen, die nach 2.3 schon für die H-C_n und H-C_r gelten.

Setzt man in (18) B wieder als Lösung von (20) ein, so gelangt man analog zu H-Scharen in der Hyperebenenmannigfaltigkeit $(\tilde{C}_r)$ und zu den *dualen H-Bewegungen* $\tilde{\mathfrak{B}}_r$. Für $r = n$ und nur in diesem Fall liefern $\mathfrak{B}_r$ und $\tilde{\mathfrak{B}}_r$ dieselben Bewegungen des P_n in sich, da ja $\hat{\mathfrak{X}}_n$ die Schmieghyperebene der H-C_n in $\hat{\mathfrak{x}}_n$ ist. Die zu (22) dual analog gebildete Basis

$$\mathfrak{A}_\varrho = \sum_{\mu=0}^{\varrho} a_{\varrho,\mu}^{n-r+\varrho} \frac{B_0^{\varrho-\mu}}{\mu!} \mathfrak{X}_{r-\mu} \tag{2.25}$$

der Bewegung $\tilde{\mathfrak{B}}_r$ besteht für $r = n$ aus den Seitenhyperebenen des Basissimplexes (22) von $\mathfrak{B}_n$, weil nämlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_\varrho \mathfrak{a}_\sigma &= \sum_{\mu=0}^{\varrho} \sum_{\nu=0}^{\sigma} a_{\varrho\mu}^{\varrho} a_{\sigma\nu}^{\sigma} \frac{B_0^{\varrho+\sigma-\mu-\nu}}{\mu!\,\nu!} \mathfrak{X}_{n-\mu} \mathfrak{x}_{n-\nu} \\ &= (-1)^\sigma B_0^{\varrho+\quad-n} \frac{\varrho!\,\sigma!}{(\varrho+\sigma-n)!} \sum_{\tau=0}^{\varrho+\sigma-n} (-1)^\tau \binom{\varrho+\sigma-n}{\tau} \begin{cases} \neq 0 & \text{für } \varrho+\sigma = n \\ = 0 & \text{für } \varrho+\sigma \neq n . \end{cases} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Wir werden im folgenden nicht immer auf die dualen Verhältnisse eingehen.

2.5. Wir wollen die Formeln (21), (22) nun noch dazu verwenden, die Fortschreitungsrichtung der Bewegung $\mathfrak{B}_r$ in einem beliebigen Punkt $\mathfrak{p} \in S_r$, also die *Bahntangente* in $\mathfrak{p}$ zu bestimmen. Nach (21), (22) ist

$$\mathfrak{p} = \sum_{\mu=0}^{r} p_\mu \mathfrak{x}_\mu \tag{2.27}$$

mit

$$p_\mu = \sum_{\varrho=r-\mu}^{r} \lambda_\varrho a_{\varrho,r-\mu}^{n-r+\varrho} \frac{1}{(r-\mu)!} B_0^{\varrho-r+\mu}. \tag{2.28}$$

Wegen $B_0' + 1 = 0$ findet man hieraus durch Differentiation nach t

$$p_\mu' = -\frac{r-\mu+1}{n-\mu+1} p_{\mu-1}; \quad p_{-1} = 0; \qquad \mu = 0, \ldots, r. \tag{2.29}$$

Verwenden wir nun (29) und die Ableitungsgleichungen (3), so folgt bei Differentiation von (27)

$$\mathfrak{p}' = \sum_{\mu=0}^{r} \sum_{\nu=\mu}^{r} p_\nu b_{\nu,\nu-\mu} \mathfrak{x}_\mu + \begin{cases} \sum\limits_{\mu=0}^{r+1} \dfrac{n-r}{n-\mu+1} p_{\mu-1} \mathfrak{x}_\mu & \text{für } r < n \\ 0 & \text{für } r = n. \end{cases} \tag{2.30}$$

Dabei haben wir zur Abkürzung

$$b_{\sigma\tau} = a_{\sigma\tau} e_\tau \tag{2.31}$$

gesetzt. (30) gibt die gesuchte Fortschreitungsrichtung an.

2.6. Man gewinnt (30) auch auf folgende, weniger formale Weise: Wenn zunächst $r = n$ ist, so gibt es aus $\mathfrak{p}$ genau n (nicht immer verschiedene) Schmieghyperebenen an die H-C_n. Die Schmieghyperebenen der H-C_n werden nun aber dual zu (18) durch

$$\hat{\mathfrak{X}}_n = \sum_{\mu=0}^{n} a_{n\mu} \frac{B^{n-\mu}}{\mu!} \mathfrak{X}_{n-\mu} \tag{2.32}$$

dargestellt. Für die mit $\mathfrak{p}$ inzidierenden unter ihnen gilt also

$$\hat{\mathfrak{X}}_n \mathfrak{p} = 0, \tag{2.33}$$

was nach (14) auf

$$\sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu p_\mu \frac{a_{n\mu}}{\mu!} B^{n-\mu} = 0 \tag{2.34}$$

führt. Normiert man p_0 zu 1, läßt also Punkte in $\mathfrak{X}_n$ zunächst außer acht, so folgt hieraus weiter

$$p_\mu = \frac{\mu!}{a_{n\mu}} E_\mu^n, \tag{2.35}$$

wo E_μ^n die μ-te elementarsymmetrische Funktion der Wurzeln $B_1, \ldots, B_n$ von (34) bedeutet:

$$E_0^n = 1, E_1^n = B_1 + \cdots + B_n, \ldots, E_n^n = B_1 \cdots B_n. \tag{2.36}$$

Man führt also $\mathfrak{p}$ vermöge der Berührpunkte der Schmieghyperebenen der H-C_n, die durch $\mathfrak{p}$ gehen, projektiv-starr mit.

Ist $r < n$, so kann man entsprechend die Schmiegräume der Dimension $r-1$ der H-C_r heranziehen, die durch $\mathfrak{p}$ gehen. Nach einer früheren Bemerkung in **2.3** sind das aber die Spuren der Schmieghyperebenen der H-C_n in S_r. Man braucht demnach nur

$$B_{r+1} = B_{r+2} = \cdots = B_n = 0 \tag{2.37}$$

zu setzen. Aus den elementarsymmetrischen Funktionen E_μ^n in den $B_1, \ldots, B_n$ werden aber dann die elementarsymmetrischen Funktionen E_μ^r in den $B_1, \ldots, B_r$, also gilt statt (35) allgemeiner

$$p_\mu = \frac{\mu!}{a_{n\mu}} E_\mu^r; \qquad \begin{array}{l} r = 0, \ldots, n, \\ \mu = 0, \ldots, r. \end{array} \tag{2.38}$$

Hieraus gewinnt man jetzt (29), (30) einfacher als aus (28). Wegen der erforderlichen Zusatzbetrachtungen für $p_0 = 0$ und hinsichtlich der Realitätsverhältnisse haben wir aber doch obiger Methode den Vorzug gegeben.

3. Die momentanen Fixpunkte von Harmonikal-Bewegungen

Eine naheliegende und für das Folgende wichtige Frage ist die nach den momentanen Fixpunkten der r-ten H-Bewegung $\mathfrak{B}_r$.

3.1. Wenn wir von der Darstellung

$$\mathfrak{p} = \sum_{\mu=0}^{r} p_\mu \mathfrak{x}_\mu \tag{3.1}$$

für eine Bahnkurve von $\mathfrak{B}_r$ mit (2.28) ausgehen, so besitzt diese genau dann an der Stelle t einen momentanen Fixpunkt, wenn

$$\mathfrak{p}' + \lambda \mathfrak{p} = 0 . \tag{3.2}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $r = n$. Hier schreibt sich (2) mit (2.30) ausführlich

$$\mathfrak{p}' + \lambda \mathfrak{p} = \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{n} (\lambda \delta_{\mu\nu} + b_{\nu,\nu-\mu}) p_\nu \mathfrak{x}_\mu = 0 , \tag{3.3}$$

ergibt also das in den p_ν homogene System

$$\sum_{\nu=\mu}^{n} (\lambda \delta_{\mu\nu} + b_{\nu,\nu-\mu}) p_\nu = 0 ; \qquad \mu = 0, \ldots, n , \tag{3.4}$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{array}{l} \lambda p_0 + b_{11} p_1 + b_{22} p_2 + \cdots\cdots\cdots + b_{nn} p_n = 0 \\ \qquad\quad \lambda p_1 + b_{21} p_2 + b_{32} p_3 + \cdots + b_{n,n-1} p_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda p_{n-1} + b_{n1} p_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda p_n = 0 . \end{array} \tag{3.5}$$

Das System ist nur für $\lambda = 0$ nichttrivial lösbar.

Wir wollen nun unter Beachtung von (2.13) für alles weitere festsetzen: *Die ganze Zahl h sei erklärt durch*

$$e_0 = e_1 = \cdots = e_h = 0 , \quad e_{h+1} \neq 0 ; \qquad 0 \leq h \leq n . \tag{3.6}$$

e_{h+1} ist also die erste Kurveninvariante, die an der Stelle t (oder längs eines Kurvenstückes) nicht verschwindet.

Jetzt reduziert sich (5) auf ein System von $n-h$ Gleichungen für die Größen $p_{h+1}, \ldots, p_n$, das nur die Nullösung zuläßt:

$$p_{h+1} = p_{h+2} = \cdots = p_n = 0 . \tag{3.7}$$

Also haben wir: *Die momentanen Fixpunkte der n-ten H-Bewegung* $\mathfrak{B}_n$ *erfüllen bei Beachtung von* (6) *genau den Schmiegraum* S_h. Wir nennen S_h den *Fixraum* von $\mathfrak{B}_n$.

In unserem Ergebnis liegen Kennzeichnungen einerseits für spezielle Kurvenklassen, andererseits für Parameterverteilungen auf ihnen. So gilt etwa:

Der Kurvenpunkt $\mathfrak{x} = S_0$ *ist immer momentaner Fixpunkt der durch ihn gehenden Bahnkurve von* $\mathfrak{B}_n$. Denn $e_0 = 0$ gilt nach Definition.

Weitere Fixpunkte gibt es genau dann, wenn an der betrachteten Kurvenstelle $e_1 = 0$ *gilt, also*[9]) *wenn die zur H-Bewegung gehörende Halbinvariante g dort eine Nullstelle hat. Gibt es längs der ganzen Kurve außer dem Kurvenpunkt noch weitere Fixpunkte, so gehört* $\mathfrak{B}_n$ *zur Nullklasse und umgekehrt.* Dann ist (mindestens) die Kurventangente S_1 mit momentanen Fixpunkten besetzt.

Im Falle von $n = 3$ Dimensionen sind beispielsweise die durch $e_2 = 0$ charakterisierten *Komplexkurven*[10]) dadurch ausgezeichnet, daß bei Einführung eines Nullparameters (Torsalparameters) die Schmiegebene an jeder Kurvenstelle mit momentanen Fixpunkten besetzt ist.

An einer C_n-Stelle mit

$$e_2 = \cdots = e_n = 0 \tag{3.8}$$

brauchen außer $\mathfrak{x}$ keine momentanen Fixpunkte zu existieren. Das gilt auch dann, wenn die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ eine C_n ist. Aber:

An einer C_n*-Stelle sind genau dann alle Punkte des* P_n *momentane Fixpunkte von* $\mathfrak{B}_n$, *wenn die zu* $\mathfrak{B}_n$ *gehörige Halbinvariante g dort eine Nullstelle hat. Insbesondere läßt längs einer* C_n *die zur Nullklasse gehörige n-te H-Bewegung und nur sie alle Punkte des* P_n *fest.*

3.2. Wir wollen noch auf einige der dualen Sätze hinweisen. Das Verschwinden einer Kurveninvarianten e_μ ist dual invariant, da sich bei dualem Übergang nach (2.17) höchstens das Vorzeichen ändert. Daher:

1. Die momentanen Fixhyperebenen von $\tilde{\mathfrak{B}}_n$ sind bei Beachtung von (6) die Hyperebenen des Hyperbündels mit dem Kern S_{n-h-1}, den wir daher den *dualen Fixraum* nennen.

2. Die Schmieghyperebene $\mathfrak{X}_0 = S_{n-1}$ der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ ist stets momentane Fixhyperebene der Bahnschar, in der sie enthalten ist.

3. Weitere momentane Fixhyperebenen besitzt $\tilde{\mathfrak{B}}_n$ dann und nur dann längs der ganzen Kurve, wenn ein Nullparameter eingeführt ist.

---

[9]) Man beachte, daß bei der Herleitung von (2.30) die Formel (1.13) verwendet wurde, daß also (1.8) gilt und somit der Parameter t bereits der zu untersuchenden Klasse $\{g\}$ angehört.

[10]) Eine Kurve des P_3 heißt Komplexkurve, wenn ihre Tangenten einem linearen Komplex angehören. Man vgl. [9].

4. An einer C_n-Stelle sind genau dann alle Hyperebenen des P_n bezüglich $\tilde{\mathfrak{B}}_n$ momentan fest, wenn die zugehörige Halbinvariante g dort verschwindet.

Als Beispiel sei angeführt, daß die Komplexkurven des dreidimensionalen Raumes dadurch ausgezeichnet sind, daß bei Verwendung eines Nullparameters alle Ebenen durch den jeweiligen Kurvenpunkt $\mathfrak{x}$ momentan fest sind.

3.3. Wir wenden uns abschließend dem Fall $r < n$ zu und zeigen:

$\mathfrak{B}_r$ besitzt für $r < n$ keine momentanen Fixpunkte.

Wir können nämlich (2) mit Hilfe von (2.30) in der Gestalt

$$(3.9)\quad \mathfrak{p}' + \lambda\mathfrak{p} = p_r\mathfrak{x}_{r+1} + \sum_{\mu=0}^{r}\left\{\frac{n-r}{n-\mu+1}p_{\mu-1} + \lambda p_\mu + \sum_{\nu=\mu}^{r} p_\nu b_{\nu,\nu-\mu}\right\}\mathfrak{x}_\mu = 0$$

schreiben. Hieraus folgt zunächst $p_r = 0$.

Sei schon gezeigt, daß

$$(3.10)\qquad p_r = p_{r-1} = \cdots = p_s = 0\,; \qquad 0 < s \leqq r\,.$$

Da der Faktor von $\mathfrak{x}_s$ gleich Null ist,

$$(3.11)\qquad \frac{n-r}{n-s+1}p_{s-1} + \lambda p_s + \sum_{\nu=s}^{r} p_\nu b_{\nu,\nu-\mu} = 0\,,$$

so verschwindet auch p_{s-1}. Also gilt

$$(3.12)\qquad p_r = \cdots = p_0 = 0\,.$$

Es kann demnach keine momentanen Fixpunkte in S_r geben.

Auch das dual Entsprechende gilt natürlich.

4. Zentralbewegungen

Nachdem wir soeben die momentanen Fixpunkte, also die Punkte ohne zugehörige Fortschreitungsrichtung ermittelt haben, wollen wir uns nunmehr der Untersuchung der Gesamtheit der wohldefinierten Bahntangenten von $\mathfrak{B}_r$ an der Stelle t zuwenden. Dabei wird sich ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen dem Verhalten dieser Tangentengesamtheit und der in (3.6) erklärten Zahl h ergeben.

4.1. Da sich wieder die Fälle $r = n$ und $r < n$ wesentlich unterscheiden, nehmen wir zunächst $r = n$ an, betrachten also die n-te H-Bewegung $\mathfrak{B}_n$ des Gesamtraums P_n in sich, die zu einer vorgegebenen Klasse $\{g\}$ gehören möge. Bei Beachtung von (3.6) gehört dann zu jedem Punkt

$$(4.1)\qquad \mathfrak{p} = \sum_{\mu=0}^{n} p_\mu\mathfrak{x}_\mu$$

des P_n außerhalb des Fixraumes S_h nach (2.30) eine wohldefinierte lokale Bahntangente durch

$$(4.2)\qquad \mathfrak{p}' = \sum_{\mu=0}^{n-h-1}\ \sum_{\nu=\mu+h+1}^{n} p_\nu b_{\nu,\nu-\mu}\mathfrak{x}_\mu\,.$$

Wir definieren: *Zentralraum von $\mathfrak{B}_n$ heiße jeder Unterraum des P_n, der von allen lokalen Bahntangenten getroffen wird.* Triviale Zentralräume sind also immer die Hyperebenen des P_n.

Unter einem minimalen Zentralraum verstehen wir einen Zentralraum kleinster Dimension m, falls $m < n - 1$.

Über Existenz und Eindeutigkeit minimaler Zentralräume wird bald zu sprechen sein. Die Zusatzforderung, die wir an m stellen, schließt die trivialen Zentralräume aus.

4.2. Wir beweisen zunächst einige im folgenden benötigte und auch an sich interessante Aussagen.

(A_1) *Die Bahntangenten aus den Punkten $\mathfrak{p} \in S_k$ $(k > h)$ treffen den Schmiegraum S_{k-h-1}.*

Wegen $\mathfrak{p} \in S_k$ ist

$$p_{k+1} = \cdots = p_n = 0 , \tag{4.3}$$

und (2) geht über in

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}' &= \sum_{\mu=0}^{k-h-1} \sum_{\nu=\mu+h+1}^{k} p_\nu b_{\nu,\nu-\mu} \mathfrak{x}_\mu \\ &= (p_{h+1} b_{h+1,h+1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + p_k b_{k,k}) \mathfrak{x}_0 \\ &\qquad + (p_{h+2} b_{h+2,h+1} + \cdots + p_k b_{k,k-1}) \mathfrak{x}_1 \\ &\qquad\qquad + \cdots\cdots\cdots \\ &\qquad\qquad\qquad + p_k b_{k,h+1} \mathfrak{x}_{k-h-1} . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Also liegt $\mathfrak{p}'$ in S_{k-h-1}, und (A_1) ist bewiesen.

Für $h = n$ besteht nach Abschnitt 3 der ganze P_n aus momentanen Fixpunkten, und es gibt also keine Bahntangenten; wir können daher $h < n$ annehmen. Aus (A_1) folgt dann für $k = n$ unmittelbar:

(A_2) *Sämtliche Bahntangenten von $\mathfrak{B}_n$ an der Stelle t treffen den Schmiegraum S_{n-h-1}. Der duale Fixraum S_{n-h-1}*[11]*) ist also Zentralraum von $\mathfrak{B}_n$.*

Für die Dimension eines minimalen Zentralraumes gilt demnach

$$m \leqq n - h - 1 . \tag{4.5}$$

Um Genaueres über minimale Zentralräume aussagen zu können, benötigen wir einige weitere Hilfssätze.

Ergänzend zu (A_1) zeigen wir zunächst, daß auch umgekehrt nur die Punkte des S_k die Eigenschaft haben, daß ihre lokalen Bahntangenten den S_{k-h-1} treffen.

(A_3) *Der Schmiegraum S_{k-h-1} wird genau von den Bahntangenten aus den Punkten $\mathfrak{p} \in S_k$ getroffen.*

Nach (A_2) dürfen wir beim Beweis $k < n$ voraussetzen.

Für einen (nicht in S_h gelegenen) Punkt (1) des P_n ist die zugehörige Bahntangente durch $\mathfrak{p}'$ in (2) bestimmt. Soll nun die Gerade $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ den Schmiegraum S_{k-h-1} treffen, so muß gelten

$$\alpha \mathfrak{p} + \beta \mathfrak{p}' \equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, \mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_{k-h-1}) . \tag{4.6}$$

---

[11]) Man vgl. 3.2.

Das ist nach (1) und (2) mit folgendem System gleichwertig:

$$
(4.7)\qquad
\begin{array}{lll}
\alpha p_{k-h} & + \beta(p_{k+1}b_{k+1,h+1} + \cdots + p_n b_{n,n-k+h}) & = 0 \\
\quad\ddots & \qquad\qquad\ddots & \\
\qquad \alpha p_{n-h-1} & \qquad\qquad + \beta p_n b_{n,h+1} & = 0 \\
\qquad\quad \alpha p_{n-h} & & = 0 \\
\qquad\qquad\ddots & & \\
\qquad\qquad\qquad \alpha p_n & & = 0\,.
\end{array}
$$

Ist $\alpha = 0$, so folgt

$$
(4.8)\qquad p_{k+1} = \cdots = p_n = 0\,,
$$

also $\mathfrak{p} \in S_k$. Ist aber $\alpha \neq 0$, so liegt $\mathfrak{p}$ sogar in S_{k-h-1}, und (A_3) ist bewiesen.

Wir können die Aussage (A_1), daß die Bahntangenten aus Punkten $\mathfrak{p} \in S_k$ den S_{k-h-1} treffen, noch in einer anderen Richtung verschärfen. Aus (4) geht nämlich hervor, daß sogar jeder Punkt $\mathfrak{q} \in S_{k-h-1}$,

$$
(4.9)\qquad \mathfrak{q} = \sum_{\mu=0}^{k-h-1} q_\mu \mathfrak{x}_\mu\,,
$$

von einer Bahntangente aus einem Punkt $\mathfrak{p} \in S_k$ getroffen wird. Denn das lineare System

$$
(4.10)\qquad
\begin{array}{lll}
q_0 = p_{h+1}b_{h+1,h+1} + & \cdots\cdots\cdots\cdots & + p_k b_{kk} \\
q_1 = & p_{h+2}b_{h+2,h+1} + \cdots & + p_k b_{k,k-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
q_{k-h-1} = & & p_k b_{k,h+1}
\end{array}
$$

hat eine von Null verschiedene Determinante, vermittelt also einen umkehrbar eindeutigen Zusammenhang zwischen p_μ und q_μ und somit an jeder Stelle t eine *Projektivität* der beiden Unterräume $(\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_{k-h-1})$ und $(\mathfrak{x}_{h+1}, \ldots, \mathfrak{x}_k)$ aufeinander: Ist $\mathfrak{q}$ in (9) vorgegeben, so läßt sich der zugehörige Punkt

$$
(4.11)\qquad \mathfrak{r} = \sum_{\mu=h+1}^{k} p_\mu \mathfrak{x}_\mu
$$

eindeutig bestimmen. Da $p_0, \ldots, p_h$ noch willkürlich sind, haben wir: *Die Bahntangenten aller Punkte* $\mathfrak{p} \in S_k$ *mit*

$$
(4.12)\qquad \mathfrak{p} \equiv \mathfrak{r}\ (\mathrm{mod}\, \mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_h)
$$

gehen durch denselben Punkt $\mathfrak{q} \in S_{k-h-1}$. Die Punkte (12) gehören offenbar einem $(h+1)$-dimensionalen Unterraum U_{h+1} an.

Es gilt sogar:

(A_4) *Alle Punkte* $\mathfrak{p}$ *des* P_n, *deren zugehörige Bahntangenten von* $\mathfrak{B}_n$ *einen vorgegebenen Punkt* $\mathfrak{q} \in S_{k-h-1}$ *treffen, liegen entweder in* S_{k-h-1} *oder in* $U_{h+1} = \mathfrak{r} \cup S_h$. Dabei ist $\mathfrak{r}$ der Punkt, der in der oben definierten Projektivität $\mathfrak{q}$ entspricht.

Zunächst liegt nach (A_3) $\mathfrak{p}$ in S_k. Mit der Beziehung

$$\mathfrak{q} = \alpha \mathfrak{p} + \beta \mathfrak{p}' \tag{4.13}$$

ist dann das folgende System gleichwertig:

$$\begin{array}{llllll}
q_0 = & \alpha p_0 & + \beta(p_{h+1} b_{h+1,h+1} + \cdots\cdots\cdots + p_k b_{kk}) & & & \\
q_1 = & & \alpha p_1 & + \beta(p_{h+2} b_{h+2,h+1} + \cdots + p_k b_{k,k-1}) & & \\
\vdots & & & \ddots & & \\
q_{k-h-1} = & & & \alpha p_{k-h-1} & + \beta p_k b_{k,h+1} & \\
0 = & & & & \alpha p_{k-h} & \\
\vdots & & & & & \ddots \\
0 = & & & & & \alpha p_k .
\end{array} \tag{4.14}$$

Ist $\alpha \neq 0$, so folgt $\mathfrak{p} \in S_{k-h-1}$. Ist aber $\alpha = 0$, so kommt man wieder auf (10) und (12) zurück, und $\mathfrak{p}$ liegt in U_{h+1}.

4.3. Nun wenden wir uns den minimalen Zentralräumen zu. Sei M_m ($m < n - 1$) ein minimaler Zentralraum von $\mathfrak{B}_n$ an der Stelle t. Dann läßt sich jetzt zeigen:

(A_5) *Die Ecken* $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-h-1}$ *des Begleitsimplexes an unserer Stelle* t *liegen in* M_m.

Wir führen den Beweis indirekt. Es sei $\mathfrak{x}_s$ die erste nicht in M_m enthaltene Ecke; genauer:

$$\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_{s-1} \in M_m, \quad \mathfrak{x}_s \notin M_m; \qquad 0 \leqq s \leqq n - h - 1 . \tag{4.15}$$

Wir betrachten die Schnitträume von M_m mit den Schmiegräumen,

$$M_m \cap S_k = U^{(k)}; \qquad s + h + 1 \leqq k \leqq n , \tag{4.16}$$

und weisen mittels der Annahme (15) nach, daß $U^{(k)}$ die Dimension $k - 1$ hat.

I. Für $k = s + h + 1$ hat der Schnittraum $M_m \cap S_{s+h+1} = U^{(s+h+1)}$ wegen (15) höchstens die Dimension $s + h$.

Die Schnittdimension ist aber auch nicht kleiner! Wäre sie nämlich $\leqq s + h - 1$, so betrachte man $U^{(s+h+1)}$ und S_s. Deren Schnittraum ist offenbar genau S_{s-1}, ihr Verbindungsraum V hat somit höchstens die Dimension $s + h$.

Nun treffen die Bahntangenten aller Punkte $\mathfrak{p} \in S_{s+h+1}$ einerseits S_s wegen (A_1), andererseits $U^{(s+h+1)}$, weil M_m Zentralraum und $U^{(s+h+1)}$ dessen Schnitt mit S_{s+h+1} ist. Jene Bahntangenten, die S_{s-1} nicht treffen, liegen also notwendig in V. Diejenigen Bahntangenten aber, die S_{s-1} treffen, liegen nach (A_3) ganz in S_{s+h}.

Da es doch aber sicher Punkte $\mathfrak{p} \in S_{s+h+1}$ und zugehörige Bahntangenten gibt, die weder im Unterraum V noch in S_{s+h} liegen, haben wir einen Widerspruch, und die Dimension von $U^{(s+h+1)}$ ist wirklich $s + h$.

II. Sei schon gezeigt, daß $U^{(k)} = M_m \cap S_k$ für $s + h + 1 \leqq k < n$ die Dimension $k - 1$ besitzt. Die Dimension von $U^{(k+1)} = M_m \cap S_{k+1}$ ist jedenfalls höchstens k.

Wäre sie kleiner, so wäre nach Induktionsvoraussetzung $U^{(k+1)} = U^{(k)}_{k-1}$. Als nichtzusammenfallende Unterräume des S_k haben $U^{(k)}_{k-1}$ und S_{k-h} einen $(k - h - 1)$-dimensionalen Schnittraum T_{k-h-1}; ihr Verbindungsraum ist $V = S_k$.

Nun treffen die Bahntangenten aller Punkte $\mathfrak{p} \in S_{k+1}$ einerseits S_{k-h} wegen (A_1), andererseits $U^{(k)}_{k-1}$, weil M_m Zentralraum ist. Jene Punkte $\mathfrak{p} \in S_{k+1}$, deren Bahntangenten $T_{k-h-1} = S_{k-h} \cap U^{(k)}_{k-1}$ dabei nicht treffen, liegen daher in $V = S_k$.

Betrachten wir jetzt einen Punkt $\mathfrak{p} \in S_{k+1}$, dessen Bahntangente T_{k-h-1} etwa in $\mathfrak{q}$ trifft! Dann liegt $\mathfrak{p}$ wegen $T_{k-h-1} \subset S_{k-h}$ und nach (A_4) entweder in S_{k-h} oder im Verbindungsraum $\mathfrak{r} \cup S_h$. Dabei ist $\mathfrak{r}$ in der früher erwähnten Projektivität zwischen den Unterräumen $(\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_{k-h})$ und $(\mathfrak{x}_{h+1}, \ldots, \mathfrak{x}_{k+1})$ dem Punkt $\mathfrak{q} \in T_{k-h-1} \subset (\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_{k-h})$ zugeordnet. Sei $\hat{T}_{k-h-1} \subset (\mathfrak{x}_{h+1}, \ldots, \mathfrak{x}_{k+1})$ der dem Unterraum T_{k-h-1} bei dieser Projektivität entsprechende Bildraum; der Verbindungsraum $W = \hat{T}_{k-h-1} \cup S_h$ hat offenbar die Dimension k. Also liegen die in Frage stehenden Punkte $\mathfrak{p}$ entweder in S_{k-h} oder in W_k.

Wir haben einen Widerspruch, denn es gibt ja sicher Punkte in S_{k+1}, die weder in W_k noch in S_k liegen. Also hat in der Tat $U^{(k+1)}$ die Dimension k.

Insbesondere hat dann der Schnittraum $M_m \cap S_n = U^{(n)}_{n-1}$ die Dimension $n - 1$, also ist $m = n - 1$ im Widerspruch zur Definition des minimalen Zentralraums. Somit ist (15) widerlegt und (A_5) bewiesen.

Aus (A_5) folgt nun aber $S_{n-h-1} \subseteq M_m$, also

$$m \geqq n - h - 1 \,, \tag{4.17}$$

so daß wegen (5) und (17) jetzt gilt

$$m = n - h - 1 \,. \tag{4.18}$$

Da nach Definition $m < n - 1$ ist, muß $h > 0$ sein.

(A_6) *Einen minimalen Zentralraum für $\mathfrak{B}_n$ an der betrachteten Stelle gibt es nur dann, wenn $e_1 = 0$, wenn also die zugehörige Halbinvariante g dort verschwindet. Gibt es an jeder Kurvenstelle einen minimalen Zentralraum, so gehört $\mathfrak{B}_n$ notwendig zur Nullklasse.*

Weiter lassen sich (A_2), (A_5), (A_6) folgendermaßen zusammenfassen:

(A$_7$) *Wenn die zu $\mathfrak{B}_n$ gehörige Halbinvariante g an der betrachteten Stelle verschwindet, gibt es dort genau einen minimalen Zentralraum, und zwar den dualen Fixraum S_{n-h-1} der Dimension $n - h - 1$.*

Wir nennen daher S_{n-h-1} auch kurz das *Zentrum von* $\mathfrak{B}_n$.

Gilt (3.6) mit $h > 0$ lokal, d. h. an einer Stelle t, so wollen wir sagen, die n-te H-Bewegung $\mathfrak{B}_n$ habe dort eine *Zentralstelle mit dem Zentrum* S_{n-h-1}. Gilt (3.6) mit $h > 0$ sogar längs der ganzen Kurve, so nennen wir $\mathfrak{B}_n$ eine *Zentralbewegung mit dem (veränderlichen) Zentrum* S_{n-h-1}[12]).

In der Existenz einer Zentralbewegung $\mathfrak{B}_n$ und ihres Zentrums liegt wieder eine Kennzeichnung spezieller Kurvenklassen (bei eingeführtem Nullparameter); es werden solche Kurven ausgezeichnet, die die Eigenschaft (3.6) haben. Bemerkenswert ist, daß nur das Verhalten der zuerstkommenden Kurveninvarianten e_μ (bis zur ersten nichtverschwindenden) eine Rolle spielt.

Besonders tritt noch der Fall extremer Entartung $h = n - 1$ hervor[13]), wo also gilt

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_{n-1} = 0\,, \quad e_n \neq 0\,. \tag{4.19}$$

Hier ist S_0, d. h. der Kurvenpunkt $\mathfrak{x}$ das Zentrum. Man kann die Ausgangskurve $\mathfrak{x}(t)$, falls (19) für alle t gilt, als die *Zielkurve* der Zentralbewegung bezeichnen.

4.4. Wir formulieren noch für die hauptsächlich interessierenden Spezialfälle $n = 2$ und $n = 3$ unsere Ergebnisse, wobei wir uns auf globales Verschwinden der Invarianten beschränken.

Bei einer beliebigen ebenen Kurve sind die Parameter der Nullklasse (die Koinzidenzparameter) geometrisch dadurch gekennzeichnet, daß die zugehörige H-Bewegung $\mathfrak{B}_2$ der Ebene in sich eine Zentralbewegung mit der Ausgangskurve $\mathfrak{x}(t)$ als Zielkurve ist.

Auf einer beliebigen Kurve des P_3 sind die Nullparameter (Torsalparameter) dadurch ausgezeichnet, daß $\mathfrak{B}_3$ eine Zentralbewegung mit der Kurventangente S_1 als Zentrum ist.

Die Komplexkurven des P_3 ($e_2 = 0$) sind dadurch charakterisiert, daß die zu einem Nullparameter gehörige H-Bewegung $\mathfrak{B}_3$ eine Zentralbewegung mit der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ als Zielkurve ist. Sinngemäß läßt sich eine Komplexstelle, d. h. lokales Verschwinden von e_2, kennzeichnen.

Schließlich sei noch kurz auf die dualen Resultate hingewiesen.

Bei Beachtung von (3.6) *mit* $h > 0$ *läßt sich* $\mathfrak{B}_n = \tilde{\mathfrak{B}}_n$ *als duale Zentralbewegung auffassen. Eine (nicht momentan feste) Hyperebene* $\mathfrak{P}$ *bestimmt dabei mit ihrer in der Bewegung „benachbarten" ein Hyperebenenbüschel* ($\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$), *das mit dem als Hyperebenengesamtheit betrachteten Dual-Zentrum* S_h, *d. h. mit dem Fixraum von* $\mathfrak{B}_n$, *eine Hyperebene gemeinsam hat. Das Dual-Zentrum ist als maximaler Dual-Zentralraum eindeutig bestimmt.*

[12]) Dies ist eine naheliegende Verallgemeinerung einer Begriffsbildung von M. Barner [8]. Bei einer Barnerschen Zentralbewegung wird eine Hyperebene des P_n derart projektiv bewegt, daß die Bahntangenten aller Punkte der Hyperebene für $t = t_0$ denselben Punkt außerhalb der Hyperebene treffen.

[13]) Für $h = n$, also bei einer C_n mit Nullparameter, läßt $\mathfrak{B}_n$ den P_n punktweise fest.

4.5. In den vorangehenden Überlegungen haben sich (für $h > 0$) besonders zwei Schmiegräume als wichtig herausgestellt, einerseits das Zentrum oder der duale Fixraum S_{n-h-1} von $\mathfrak{B}_n$ und andererseits das duale Zentrum oder der Fixraum S_h von $\mathfrak{B}_n$. Wir wollen noch etwas genauer auf die Lagebeziehungen dieser beiden Schmiegräume $Z = S_{n-h-1}$ und $F = S_h$ eingehen.

Zentrum und Fixraum sind genau dann identisch, wenn $2h = n - 1$. Das ist also nur in Räumen ungerader Dimension möglich; das einfachste Beispiel ist $n = 3$, $h = 1$ (vgl. 4.4): Auf einer Kurve des P_3, die nicht Komplexkurve ist, ist ein Nullparameter eingeführt, Z und F fallen mit der Kurventangente S_1 zusammen.

Für $2h > n - 1$ ist das Zentrum echt im Fixraum enthalten, $Z \subset F$. Das einfachste Beispiel ist hier $n = 2$, $h = 1$ (vgl. 4.4), also eine ebene Kurve, die nicht Kegelschnitt ist, auf der aber ein Nullparameter eingeführt wurde. Alle Bahntangenten gehen durch den Kurvenpunkt $\mathfrak{x}$; duales Zentrum ist S_1, das bedeutet, daß sich jede Gerade und ihre in der Bewegung „benachbarte" auf der Kurventangente schneiden.

In beiden Fällen waren wegen $Z \subseteq F$ alle Punkte des Zentrums momentane Fixpunkte. Dies ist anders im dritten Fall

(4.20) $$2h < n - 1\,,$$

in dem $F \subset Z$. Nach (A_1) treffen die Bahntangenten aus den nicht momentan festen Punkten des Zentrums den Schmiegraum S_{n-2h-2}.

Kann es sein, daß diese Bahntangenten sämtlich den Fixraum F treffen? Dazu ist nach (A_3)

(4.21) $$h \geqq n - 2h - 2$$

notwendig und hinreichend. Zusammen mit (20) gibt das

(4.22) $$\frac{n-2}{3} \leqq h \leqq \frac{n-2}{2}.$$

Die Bahntangenten der nicht festen Zentrumspunkte treffen genau dann den Fixraum, wenn (22) *gilt.*

Das einfachste Beispiel ist $n = 4$, $h = 1$, also eine allgemeine Kurve des P_4 mit Nullparameter. Da jetzt das Zentrum $Z = S_2$, der Fixraum $F = S_1$ ist, so ist unmittelbar klar, daß die Bahntangenten der nicht festen Zentrumspunkte den Fixraum treffen.

4.6. Bisher hatten wir ausschließlich die n-te H-Bewegung $\mathfrak{B}_n$ betrachtet. Wir wenden uns nun zum Schluß noch den H-Bewegungen $\mathfrak{B}_r$ mit $r < n$ zu und wollen zeigen, daß ein Analogon zu den Zentralbewegungen $\mathfrak{B}_n$ hier nicht existiert.

Für einen Punkt

(4.23) $$\mathfrak{p} = \sum_{\mu=0}^{r} p_\mu \mathfrak{x}_\mu \in S_r$$

haben wir jetzt nach (2.30)

$$\mathfrak{p}' = \sum_{\mu=0}^{r+1} \frac{n-r}{n-\mu+1} p_{\mu-1}\mathfrak{x}_\mu + \sum_{\mu=0}^{r} \sum_{\nu=\mu}^{r} p_\nu b_{\nu,\nu-\mu}\mathfrak{x}_\mu . \tag{4.24}$$

Wir beweisen zunächst zwei Hilfssätze, die im Vergleich zu den früheren (A_1) und (A_2) zeigen, daß für $r < n$ und $r = n$ in gewissem Sinne gegensätzliche Verhältnisse vorliegen.

(H_1) *Die Bahntangenten von* $\mathfrak{B}_r$ *aus den Punkten* $\mathfrak{p} \in S_k$ *mit* $0 \leqq k \leqq r$ *liegen ganz in* S_{k+1}.

Denn setzt man in (24) $p_{k+1} = \cdots = p_r = 0$, so sieht man unmittelbar, daß $\mathfrak{p}' \in S_{k+1}$.

Das läßt sich noch folgendermaßen verschärfen:

(H_2) *Liegt* $\mathfrak{p}$ *in* S_k, *aber nicht in* S_{k-1} ($0 \leqq k \leqq r$), *so ist die Bahntangente aus* $\mathfrak{p}$ *nicht in* S_k *enthalten.*

Setzt man nämlich $p_k \neq 0$, $p_{k+1} = \cdots = p_r = 0$ in (24) ein, so findet man

$$\mathfrak{p}' \equiv \frac{n-r}{n-k} p_k \mathfrak{x}_{k+1} (\operatorname{mod} \mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_k) \notin S_k . \tag{4.25}$$

Nach (H_1) sind alle Bahntangenten aus $\mathfrak{p} \in S_r$ in S_{r+1} enthalten, und der früheren Definition entsprechend haben wir also jeden r-dimensionalen Unterraum von S_{r+1} als (trivialen) *Zentralraum* von $\mathfrak{B}_r$ anzusehen. Wir wollen nun zeigen:

$\mathfrak{B}_r$ *besitzt keine nichttrivialen Zentralräume in* S_{r+1}, *deren Dimension also kleiner als* r *ist.*

Wir nehmen an, es gäbe einen $(r-1)$-dimensionalen Zentralraum $Z_{r-1} \subset S_{r+1}$. Z_{r-1} kann nicht in S_r enthalten sein! Denn die Bahntangente aus einem Punkt $\mathfrak{p} \in S_r$, $\notin S_{r-1}$, $\notin Z_{r-1}$ träfe sonst nach (H_2) den S_r nur in $\mathfrak{p}$, könnte also Z_{r-1} nicht treffen im Widerspruch zur Zentralraum-Eigenschaft.

Auf Grund der eben gemachten Bemerkung können also $\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_{r-1}$ nicht sämtlich in Z_{r-1} liegen. Sei etwa $\mathfrak{x}_s$ die erste nicht in Z_{r-1} enthaltene Simplexecke, also

$$\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_{s-1} \in Z_{r-1}, \mathfrak{x}_s \notin Z_{r-1}; \qquad 0 \leqq s \leqq r-1 . \tag{4.26}$$

Daher ist der Schnittraum $S_s \cap Z_{r-1} = S_{s-1}$ $(s-1)$-dimensional.

Sei schon gezeigt, daß der Schnittraum $S_k \cap Z_{r-1} = T_{k-1}$ die Dimension $k-1$ hat ($s \leqq k < r$). Dann folgt weiter auch, daß der Durchschnitt $S_{k+1} \cap Z_{r-1} = T_k$ k-dimensional ist! Andernfalls wäre nämlich T_{k-1} Schnittraum. Wählt man nun $\mathfrak{p} \in S_k$, $\notin S_{k-1}$, $\notin T_{k-1}$, so liegt die Bahntangente aus $\mathfrak{p}$ nach (H_1) ganz in S_{k+1}, nach (H_2) aber nicht in S_k, trifft S_k also nur in $\mathfrak{p}$ und trifft Z_{r-1} somit nicht. Das steht im Widerspruch dazu, daß Z_{r-1} Zentralraum sein sollte.

Für $k = r$ folgt aus unserem Induktionsschluß $S_r \cap Z_{r-1} = T_{r-1}$, das bedeutet, daß $Z_{r-1} \subset S_r$. Dieser Widerspruch zur eingangs des Beweises gemachten Bemerkung beweist unseren Satz.

Literatur

[1] BARNER, M.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurven des n-dimensionalen Raumes. Arch. Math. **3**, 171—182 (1952).

[2] BARNER, M.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen I. Komplexflächen als Schiebflächen. Math. Ann. **126**, 119—137 (1953).

[3] BARNER, M.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen II. Konstruktion und integrallose Darstellung spezieller Schiebungen. Math. Ann. **126**, 418—446 (1953).

[4] BARNER, M.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen III. Schiebungen als Abrollvorgänge. Singularitätenkurven auf Komplexflächen. Invariante Gebilde. Math Ann. **129**, 304—322 (1955).

[5] BARNER, M.: Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen. Math. Z. **62**, 50—93 (1955).

[6] BARNER, M.: Zur Kinematik der Projektivabwicklung von Raumkurven. Math. Nachr. **14**, 1—16 (1955).

[7] BARNER, M.: Geradengeometrische Kennzeichnung der W-Kurven des projektiven Raumes. Arch. Math. **6**, 462—470 (1955). Man vgl. auch M. BARNER und H. KUNLE: Über W-Kurven auf Quadriken. Monatsh. Math. Physik **65**, 106—142 (1961).

[8] BARNER, M.: Kinematische Fragen in der Projektivgeometrie der Regelflächen. Monatsh. Math. Physik **60**, 21—56 (1956).

[9] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie 1. Teil. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1950.

[10] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie 3. Teil (in Vorbereitung).

[11] BOL, G.: Invarianten linearer Differentialgleichungen. Berichte Math. Tagung Tübingen, 42—44 (1946).

[12] BOL, G.: Einige neue Ergebnisse aus der Differentialgeometrie der Raumkurven im projektiven dreidimensionalen Raum. Arch. Math. **1**, 3—8 (1948/49).

[13] BOL, G.: Zur Projektivgeometrie der Flächenstreifen. Arch. Math. **1**. 192—199 (1948/49).

[14] BOL, G.: Invarianten linearer Differentialgleichungen. Hamb. Abh. **16**, Heft 3/4. 1—28 (1949).

[15] PRADE, H.: Über projektive Bewegungen des dreidimensionalen projektiven Raumes. die invariant mit einem Regelflächenpaar verknüpft sind. Diss. Karlsruhe 1960.

[16] STAKOWSKI, W.: Invariantentheorie der Raumkurven im vierdimensionalen projektiven Raum. Arch. Math. **1**, 200—204 (1948).

[17] STAKOWSKI, W.: Zur Geometrie der Raumkurven im vierdimensionalen projektiven Raum. Arch. Math. **1**, 377—382 (1948).

(Eingegangen am 10. Februar 1961)

HUEBSCH, W., and M. MORSE
Math. Annalen 144, 162—174 (1961)

Schoenflies Extensions of Analytic Families of Diffeomorphisms

By

WILLIAM HUEBSCH and MARSTON MORSE in Princeton, N. J.

§ 1. Introduction

In this paper there is given a real analytic family of analytic diffeomorphisms into a euclidean n-space E_n of an $(n-1)$-sphere $S = S_{n-1}$ in E_n. One seeks to define an analytic family of analytic Schoenflies extensions of the given family of mappings of S into E_n. One admits the possibility that the Schoenflies extensions may fail to be analytic at the center of S, although one requires that all Schoenflies extensions be homeomorphisms. The principal theorem is Theorem 2.1. In order to state Theorem 2.1 it is necessary to introduce appropriate notation and conventions.

Notation. We shall suppose that the center of the $(n-1)$-sphere S is at the origin 0 in E_n, and that the radius of S is 1. Given a topological $(n-1)$-sphere M in E_n let $\mathring{J}M$ denote the interior of M and JM the closure of $\mathring{J}M$. In particular $\mathring{J}S$ and JS are thereby defined. If $\mathring{J}M$ contains 0 we shall set

$$JM - 0 = J_0M, \quad \mathring{J}M - 0 = \mathring{J}_0M . \tag{1.1}$$

Let $(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ be rectangular coordinates in E_n. Let $\mathbf{x}$ be a vector whose components are the coordinates of (x). We identify $\mathbf{x}$ with (x) and speak of $\mathbf{x}$ as a point in E_n. Let $\|\mathbf{x}\|$ be the length of the vector $\|\mathbf{x}\|$.

Conventions. An analytic or C^μ-mapping $\mathbf{F}$ into E_n, $\mu > 0$, of an open subset X of E_n or an analytic or C^μ-diffeomorphism of X into E_n is defined in the usual way. We shall extend these definitions to any subset X of E_n such that $X \subset Cl\,\mathring{X}$. For such a set we say that $\mathbf{F}$ is an analytic or C^μ-mapping of X into E_n or an analytic or C^μ-diffeomorphism of X into E_n, if $\mathbf{F}$ admits an extension $\mathbf{F}^e$ over an open subset $Y \supset X$ such that $\mathbf{F}^e$ has the respective properties on Y. When $X \subset Cl\,\mathring{X}$ a mapping $\mathbf{F}$ of X into E which is analytic in the above sense, is uniquely determined by the restriction of $\mathbf{F}$ to $\mathring{X}$.

A_0 or C_0^μ-diffeomorphisms, $\mu > 0$. Let X be a subset of E_n such that $\mathring{X}$ contains the origin and $X \subset Cl\,\mathring{X}$. Among such sets are JS and $\mathring{J}S$. Set $X - \mathbf{0} = X_0$. *An A_0 or C_0^μ-mapping* $\mathbf{F}$ of X into E_n is a continuous mapping of X into E_n whose restriction to X_0 is an analytic or C^μ-mapping respectively of X_0 into E_n. Such a mapping will be called an A_0 or C_0^μ-diffeomorphism of X into E_n if it is a homeomorphism of X into E_n, and if $\mathbf{F}|X_0$ is an analytic or C^μ-diffeomorphism, respectively, of X_0 into E_n.

The following theorem was proved by MORSE in [5].

Theorem 1.1. *Corresponding to a C^μ-diffeomorphism φ of S into E_n with $\mu > 0$, there exists a C_0^μ-diffeomorphism of $J S$ into E_n which extends φ.*

Making use of this theorem ROYDEN in [7] proved the following theorem.

Theorem 1.2. *Corresponding to an analytic diffeomorphism φ of S into E_n there exists an A_0-diffeomorphism of $J S$ into E_n which extends φ.*

In [3] HUEBSCH and MORSE have given a second proof of Theorem 1.2 using modes of approximation different from those used by ROYDEN. We have found Royden's mode of approximation of differentiable Schoenflies extensions difficult to extend to analytic families of Schoenflies extensions without major modifications. The proof of Theorem 1.2 which we give in [3] will serve as a model for a proof of Theorem 2.2 in this paper.

Theorems 1.1 and 1.2 are theorems on a *simple* Schoenflies extension problem, as distinguished from a problem in which there is given a *family* of diffeomorphisms of S into E_n depending on a parameter p in a topological space Γ. This more general problem will be called a *Γ-problem.* In the next section we consider Γ-problems.

§ 2. Γ-problems

Let Γ be a real analytic proper, regular, r-manifold in a euclidean m-space E_m, $0 < r \leqq m$. The condition that Γ be *proper*, cf. [6], implies that Γ derives its topological structure from that of E_m. The condition that Γ be *regular* implies that in some neighborhood relative to Γ of a prescribed point $q \in \Gamma$ the rectangular coordinates in E_m are real analytic functions of r of these coordinates.

p-Sections of a subset of $E_n \times \Gamma$. Let X be a non-empty subset of $E_n \times \Gamma$. The projection $\mathrm{pr}_2 X$ of X into Γ is well-defined. Cf. [1], p. 20. For each $p \in \mathrm{pr}_2 X$ set

$$X^p = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x}, p) \in X\} \qquad (\mathbf{x} \in E_n)\,. \tag{2.1}$$

We term X^p the *p-section* of X.

p-Sections of a mapping $\mathbf{F}$. If $\mathbf{F}$ is a mapping

$$\mathbf{F} : X \to E_n\,; \quad (\mathbf{x}, p) \to \mathbf{F}(\mathbf{x}, p) \tag{2.2}$$

then for each $p \in \mathrm{pr}_2 X$, the partial mapping

$$\mathbf{F}^p : X^p \to E_n\,; \quad \mathbf{x} \to \mathbf{F}(\mathbf{x}, p) = \mathbf{F}^p(\mathbf{x}) \tag{2.3}$$

will be called the *p-section* of $\mathbf{F}$.

A_Γ or C_Γ^μ-mappings, $\mu > 0$. The $(n + r)$-manifold $E_n \times \Gamma$ is assigned a differential structure derived in the usual way from the differential structures of E_n and Γ. An analytic or C^μ-mapping into E_n of an open subset of $E_n \times \Gamma$ is then defined as usual. More generally if X is a subset of $E_n \times \Gamma$ such that $X \subset Cl\,\mathring{X}$, an analytic or C^μ-mapping of X into E_n is defined as in § 1, replacing E_n by $E_n \times \Gamma$. Suppose that $X \supset \mathring{J} S \times \Gamma$ and set $X - (\mathbf{0} \times \Gamma) = X_\Gamma$. Note then that

$$X_\Gamma \subset Cl(\mathrm{Int}\, X_\Gamma)\,.$$

It is by virtue of this inclusion that the notion of C^μ or analytic mappings of X_Γ into E_n is well-defined in accord with the above conventions. If $\mathbf{F}$ is a continuous mapping of X into E_n such that $\mathbf{F} \mid X_\Gamma$ is an analytic or C^μ-mapping, then $\mathbf{F}$ will be termed an A_Γ or C^μ_Γ-mapping, respectively, of X into E_n.

The principal theorem of this paper follows. It parallels Theorem 1.2 of [3] and is an analytic analogue of Theorem 1.2 of [4].

Theorem 2.1. *Corresponding to an analytic mapping*

$$\mathbf{g} : S \times \Gamma \to E_n ; \quad (\mathbf{x}, p) \to \mathbf{g}(\mathbf{x}, p) \tag{2.4}$$

whose p-sections $\mathbf{g}^p$ *are analytic diffeomorphisms of* S *into* E_n, *there exists an* A_Γ*-mapping*

$$\mathbf{G} : J\,S \times \Gamma \to E_n ; \quad (\mathbf{x}, p) \to \mathbf{G}(\mathbf{x}, p) \tag{2.5}$$

whose p-sections $\mathbf{G}^p$ *are* A_0*-diffeomorphisms of* $J\,S$ *into* E_n *extending the respective diffeomorphisms* $\mathbf{g}^p$ *of* S *into* E_n.

In proving Theorem 2.1 we prove a theorem which a priori is somewhat stronger.

Theorem 2.2. *Under the hypotheses of Theorem 2.1 there exists a neighborhood* N *of* $J\,S \times \Gamma$, *open relative to* $E_n \times \Gamma$, *and an* A_Γ*-mapping*

$$\mathbf{G} : N \to E_n : \quad (\mathbf{x}, p) \to \mathbf{G}(\mathbf{x}, p)$$

whose p-sections $\mathbf{G}^p$ *are* A_0*-diffeomorphisms of* N^p *into* E_n *extending the respective diffeomorphisms* $\mathbf{g}^p$ *of* S *into* E_n.

§ 3. An equivalent Γ-problem

The r-manifold Γ is in E_m.

Definition. The problem of finding an extension $\mathbf{G}$ of $\mathbf{g}$ of the type affirmed to exist in Theorem 2.2 will be called the *problem* $(\mathbf{g}, \Gamma)$. Such an extension $\mathbf{G}$, together with its domain of definition N, will be called a *solution* of problem $(\mathbf{g}, \Gamma)$. If $(\mathbf{g}', \Gamma')$ is a second such problem we shall say that the problems $(\mathbf{g}, \Gamma)$ and $(\mathbf{g}', \Gamma')$ are *equivalent* if the existence of a solution of $(\mathbf{g}', \Gamma')$ implies the existence of a solution of $(\mathbf{g}, \Gamma)$ and vice versa.

We shall prove the following lemma.

Lemma 3.1. *Corresponding to an arbitrary* Γ*-problem* $(\mathbf{g}, \Gamma)$ *there exists an equivalent* Γ*-problem* $(\mathbf{g}', \Gamma')$ *in which* Γ' *is an open subset of* E_m.

If the dimension r of Γ equals m there is nothing to prove. Suppose then that $r < m$. We shall find an equivalent Γ-problem $(\mathbf{g}', \Gamma')$ in which Γ' is a "tubular" neighborhood of Γ, open relative to E_m.

The "tube" Γ'. Let $\pi(p)$ be the $(m-r)$-plane orthogonal to Γ in E_m at the point $p \in \Gamma$. For $s > 0$ let $\pi(p, s)$ be the subset of points of $\pi(p)$ whose distances from p are less than s. The set $\pi(p, s)$ is an open $(m-r)$-disc. Corresponding to an arbitrary continuous mapping, $p \to \sigma(p)$ of Γ into R_+, we introduce the subset

$$\Gamma_\sigma = \bigcup_{p \in \Gamma} \pi(p, \sigma(p)) \tag{3.1}$$

of E. The following lemma is of familiar type. A proof is given in [6].

Lemma 3.2. *For a suitable choice of the above mapping σ the following is true:*

(i) *There corresponds to each point $q \in \Gamma_\sigma$ a unique point $p = \omega(q)$ in Γ such that q is in $\pi(p, \sigma(p))$.*

(ii) *The set Γ_σ is a neighborhood of Γ, open relative to E_m.*

(iii) *The mapping $q \to \omega(q)$ of Γ_σ onto Γ is analytic.*

The problem $(\mathbf{g}', \Gamma')$. We define an analytic mapping

$$\mathbf{g}' : S \times \Gamma_\sigma \to E_n\,; \quad (\mathbf{x}, q) \to \mathbf{g}'(\mathbf{x}, q) \tag{3.2}$$

by setting

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}, q) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \omega(q)) \qquad ((\mathbf{x}, q) \in S \times \Gamma_\sigma)\,. \tag{3.3}$$

For fixed $q \in \Gamma_\sigma$ the q-section $\mathbf{g}'^q$ of $\mathbf{g}'$ has the values

$$\mathbf{g}'^q(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^{\omega(q)}(\mathbf{x}) \qquad (\|\mathbf{x}\| = 1) \tag{3.4}$$

and is an analytic diffeomorphism of S into E_n. Set $\Gamma_\sigma = \Gamma'$.

A problem $(\mathbf{g}', \Gamma')$ is thus defined in the sense in which the problem $(\mathbf{g}, \Gamma)$ is defined.

Suppose that $\mathbf{K} : U \to E_n$ is a solution of the problem $(\mathbf{g}', \Gamma')$, that is, an $A_{\Gamma'}$-mapping into E_n of some neighborhood U of $JS \times \Gamma'$, open relative to $E_n \times \Gamma'$, a q-section $\mathbf{K}^q$, $q \in \Gamma'$, being an A_0-diffeomorphism of U^q into E_n which extends the diffeomorphism $\mathbf{g}'^q$. If one puts $U \cap (E_n \times \Gamma) = N$ and sets $\mathbf{G} = \mathbf{K} | N$, one sees that $\mathbf{G}$ is a solution of the problem $(\mathbf{g}, \Gamma)$.

Conversely, suppose that $\mathbf{G} : N \to E_n$ is a solution of the problem $(\mathbf{g}, \Gamma)$. Here N is a neighborhood of $JS \times \Gamma$, open relative to $E_n \times \Gamma$. Let U be the open subset of $E_n \times \Gamma'$ defined by

$$U = \{(\mathbf{x}, q) \mid (\mathbf{x}, \omega(q)) \in N\} \qquad ((\mathbf{x}, q) \in E_n \times \Gamma')$$

and let $\mathbf{K}$ be the mapping of U into E_n with values

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, q) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \omega(q)) \qquad ((\mathbf{x}, q) \in U)\,.$$

It is readily seen that $\mathbf{K}$, so defined, is a solution of the problem $(\mathbf{g}', \Gamma')$.

This establishes Lemma 3.1.

We shall assume throughout this paper that Γ is an open subspace of E_m.

§ 4. Paracompact spaces

The r-manifold Γ, introduced in § 2, may be regarded as a metric subspace of E_m and hence is paracompact. [2], § 4, No. 5.

Definition. Let X be a topological space. With each point p of X let there be associated an interval $(0, c_p)$ with $c_p > 0$. Any value on this interval will here be termed *admissible* at p. The indexed set of intervals $(0, c_p)$, $p \in X$, will be termed *locally consistent*, if corresponding to each point $q \in X$, there exists an open neighborhood N_q of q and an open interval $(0, b_q)$ such that each value in $(0, b_q)$ is admissible at each point $p \in N_q$.

Lemmas 4.1 and 4.2 belong to a class of lemmas well-known in the theory of paracompact spaces. Proofs of these lemmas are given in [6].

Lemma 4.1. *With each point p of a paracompact space W let there be associated an interval $(0, c_p)$, $c_p > 0$, of admissible values. If this indexed set of intervals is locally consistent there exists a continuous mapping $p \to k(p)$ of W into R_+ such that for each $p \in W$, $k(p)$ is admissible at p.*

Definition. A mapping $p \to F(p)$ of a topological space X into R_+ will be said to be *locally bounded from zero* if corresponding to each point $q \in X$, there exists an open neighborhood U_q of q and a positive constant c_q such that $F(p) > c_q$, for $p \in U_q$.

Lemma 4.2. *If F is locally bounded from zero on a paracompact space W, there exists a continuous mapping $p \to h(p)$ of W into R_+ such that $h(p) < F(p)$ for $p \in W$.*

We state a useful lemma.

Lemma 4.3. *Corresponding to an arbitrary continuous mapping*

$$\Gamma \to R_+ : p \to \eta(p) \tag{4.1}$$

of Γ into R_+ there exists an analytic mapping

$$\Gamma \to R_+ : p \to \zeta(p)$$

such that $\zeta(p) < \eta(p)$ for each $p \in \Gamma$.

This lemma can be inferred from Lemma 25 of [8].

§ 5. The four lemmas used in proving Theorem 2.2

In this section we shall state four lemmas which lead to a proof of Theorem 2.2. These lemmas will be established in §§ 6, 7, 8, 9, respectively. In accord with Lemma 3.1 we are assuming without loss of generality in proving Theorem 2.2 that Γ is an open subset of a euclidean space E_m.

The first lemma used in proving Theorem 2.2 parallels Theorem 2.1 of [3]. It is as follows.

Lemma 5.1. *Under the hypotheses of Theorem 2.2 there exists a C^∞_Γ-mapping*

$$\mathbf{H} : \mathscr{D} \to E_n ; \quad (\mathbf{x}, p) \to \mathbf{H}(\mathbf{x}, p) \tag{5.1}$$

of a neighborhood $\mathscr{D}$ of $JS \times \Gamma$, open relative to $E_n \times \Gamma$, such that for each $p \in \Gamma$, the p-section $\mathbf{H}^p$ of $\mathbf{H}$ is a C^∞_0-diffeomorphism of $\mathscr{D}^p$ into E_n which extends $\mathbf{g}^p$.

The second lemma used in proving Theorem 2.2 parallels Lemma 4.1 of [3]. In Lemma 5.2 a parameter $t \in (-1, 1)$ is introduced. One sets

$$\mathscr{D}_\Gamma = \mathscr{D} - (\mathbf{0} \times \Gamma) . \tag{5.2}$$

The mapping $\mathbf{H}$ given by Lemma 5.1 is approximated in the proof of Lemma 5.2 for $t \in (0, 1)$ by an A_Γ-mapping

$$(\mathbf{x}, p) \to \mathbf{B}(\mathbf{x}, p; t) \ ((\mathbf{x}, p) \in \mathscr{D})$$

which converges to $\mathbf{H}(\mathbf{x}, p)$ as $t \downarrow 0$, uniformly for $(\mathbf{x}, p) \in \mathscr{D}$. Lemma 5.2 is proved in § 7.

Lemma 5.2. *There exists a continuous mapping*

$$\mathbf{B} : \mathscr{D} \times (-1, 1) \to E_n ; \quad (\mathbf{x}, p; t) \to \mathbf{B}(\mathbf{x}, p; t)$$

which satisfies the following conditions:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, p; t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, p) \qquad ((\mathbf{x}, p; t) \in \mathscr{D} \times (-1, 0]) \tag{5.3}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}, p; t) = \mathbf{H}(\mathbf{0}, p) \qquad (p \in \Gamma;\ -1 < t < 1)\,. \tag{5.4}$$

B *is of class* C^1 *on the set* $\mathscr{D}_\Gamma \times (-1, 1)$. *The restriction of* **B** *to* $\mathscr{D}_\Gamma \times (0, 1)$ *is analytic. For fixed* $t \in (-1, 1)$ *and* $p \in \Gamma$ *the Jacobian of* **B** *as to the variables* $(x_1, \ldots, x_n)$, *evaluated for* $\|\mathbf{x}\| \neq 0$, *does not vanish.*

For t fixed in $(0, 1)$ the t-section

$$(\mathbf{x}, p) \to \mathbf{B}(\mathbf{x}, p; t) = \mathbf{B}_t(\mathbf{x}, p) \qquad ((\mathbf{x}, p) \in \mathscr{D}) \tag{5.5}$$

cannot in general be expected to serve as a mapping **G** satisfying Theorem 2.2, for two reasons.

(I) *For* $0 < t < 1$, *a p-section* $\mathbf{B}_t^p$ *of* $\mathbf{B}_t$ *will not in general be a homeomorphism of* $\mathscr{D}^p$ *into* E_n.

(II) *For* $0 < t < 1$, *a p-section* $\mathbf{B}_t^p$ *of* $\mathbf{B}_t$, *restricted to* S, *will not in general coincide with* $\mathbf{g}^p$.

The deficiency (I) will be met by Lemma 5.3, the deficiency (II) by Lemma 5.4.

Disc neighborhoods of $JS \times \Gamma$. Lemma 5.3 refers to *disc neighborhoods* of $JS \times \Gamma$. Such neighborhoods are defined as follows. Let $p \to \alpha(p)$ be a continuous mapping of Γ into the interval $(1, 2)$. The closed set

$$\Delta_\alpha = \{(\mathbf{x}, p) \mid \|\mathbf{x}\| \leq \alpha(p)\} \tag{5.6}$$

in $E_n \times \Gamma$ will be called a disc neighborhood of $JS \times \Gamma$. The p-section Δ_α^p of Δ_α is a closed n-disc in E_n with center at the origin and radius $\alpha(p)$.

A disc neighborhood $\Delta_\beta \subset \mathscr{D}$. Let $\mathscr{D}$ be the neighborhood of $JS \times \Gamma$ affirmed to exist in Lemma 5.1. For $p \in \Gamma$, let $h(p)$ be the maximum value of a number r on the interval $(1, 2]$ such that the subset $\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| < r\}$ of E_n is included in $\mathscr{D}^p$. Since $\mathscr{D}$ includes $JS \times \Gamma$ and is open, relative to $E_n \times \Gamma$, $h(p) - 1$ is locally bounded from zero for $p \in \Gamma$. It follows from Lemma 4.2 that there exists a continuous mapping $p \to \beta(p)$ of Γ into $(1, 2)$ such that $1 < \beta(p) < h(p)$ for each $p \in \Gamma$. For such a β, $\Delta_\beta \subset \mathscr{D}$. This choice of Δ_β is permanent.

Definition of $\mathbf{L}^\varepsilon$. Let $p \to \varepsilon(p)$ be an arbitrary mapping of Γ into $(0, 1)$. For $0 < t < 1$ set

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, p; \varepsilon(p)t) = \mathbf{L}^\varepsilon(\mathbf{x}, p; t) = \mathbf{L}_t^\varepsilon(\mathbf{x}, p) \quad [(\mathbf{x}, p) \in \Delta_\beta]\,. \tag{5.7}$$

We shall choose the mapping $p \to \varepsilon(p)$ in various ways.

Lemma 5.3 is proved in § 8. It parallels Lemmas 5.1 and 5.2 of [3].

Lemma 5.3. *There exists a continuous mapping* $p \to \eta(p)$ *of* Γ *into* $(0, 1)$ *with the following property.*

If $p \to \zeta(p)$ *is a mapping of* Γ *into* $(0, 1)$ *such that* $\zeta \leq \eta$, *then, for* $0 < t < 1$, *each p-section of* $\mathbf{L}_t^\zeta$ *is an* A_0*-diffeomorphism* $\mathbf{L}_t^{\zeta, p}$ *of* Δ_β^p *onto a set* JM_t^p *in* E_n *such that*

$$JM_t^p \supset \mathbf{g}^p(S) \qquad (p \in \Gamma)\,. \tag{5.8}$$

Moreover $\mathbf{L}_t^{\zeta, p}(\mathbf{0})$ *is not a point of* $\mathbf{g}^p(S)$.

The mappings $\mathbf{L}_t^\zeta$ will *not* in general have the property that

$$\mathbf{L}_t^{\zeta,p} \mid S = \mathbf{g}^p \qquad (p \in \Gamma) .$$

This deficiency is met by Lemma 5.4. Lemma 5.4 parallels Lemma 6.1 of [3]. In Lemma 5.4 we shall refer to an arbitrary disc neighborhood Δ_γ of $JS \times \Gamma$ such that $1 < \gamma < \beta$. For such a choice of γ

$$JS \times \Gamma \subset \Delta_\gamma \subset \mathring{\Delta}_\beta \subset \Delta_\beta \subset \mathscr{D} . \tag{5.9}$$

This choice of Δ_γ is permanent. Lemma 5.4 is proved in § 9.

Lemma 5.4. *There exists a continuous mapping $p \to \eta_1(p)$ of Γ into $(0, 1)$ such that $\eta_1 \leqq \eta$ (Lemma 5.3) and the following is true.*

Corresponding to any analytic mapping $p \to \zeta(p)$ of Γ into $(0, 1)$ such that $\zeta \leqq \eta_1$, and to $\mathbf{L}^\zeta$, there exists a continuous mapping

$$\mathbf{Q}^\zeta : \Delta_\gamma \times (0, 1) \to E_n ; \quad (\mathbf{x}, p; t) \to \mathbf{Q}^\zeta(\mathbf{x}, p; t) \tag{5.10}$$

each of whose t-sections $\mathbf{Q}_t^\zeta$, $0 < t < 1$, is an A_Γ-mapping of Δ_γ into E_n with a p-section $\mathbf{Q}_t^{\zeta,p}$ which is an A_0-diffeomorphism of Δ_γ^p into Δ_β^p, leaving the origin fixed, and such that

$$\mathbf{g}^p(\mathbf{z}) = (\mathbf{L}_t^{\zeta,p} \mathbf{Q}_t^{\zeta,p})(\mathbf{z}) \qquad (\mathbf{z} \in S) \tag{5.11}$$

for each $p \in \Gamma$.

§ 6. Proof of Lemma 5.1

We take over the following definitions from § 2 of [3].

The bands $B_\alpha S$ and $B_\alpha \mathscr{M}$. Let $\mathscr{M}$ be the image of S in E_n under a C^μ-diffeomorphism, $\mu > 1$, $\mathfrak{f}$ of S into E_n. With α a constant such that $0 < \alpha < 1$, let $B_\alpha S$ be the open set of points in E_n within a distance α of S. Similarly let $B_\alpha \mathscr{M}$ be the open set of points within a distance α of $\mathscr{M}$.

Let $V(\mathbf{z})$ be the straight line which is normal to S at the point $\mathbf{z} \in S$. We suppose $V(\mathbf{z})$ so sensed that $V(\mathbf{z})$ crosses S at $\mathbf{z}$ from the interior to the exterior of S, and term $V(\mathbf{z})$ a normal to S at $\mathbf{z}$ *exteriorly directed* at $\mathbf{z}$. Regarding $\mathbf{z}$ as an origin on $V(\mathbf{z})$ let s be the signed algebraic coordinate of a point on $V(\mathbf{z})$. Similarly, corresponding to a point $\mathfrak{f}(\mathbf{z})$ of $\mathscr{M}$, let $\mathscr{V}(\mathfrak{f}(\mathbf{z}))$ be a straight line normal to $\mathscr{M}$ at $\mathfrak{f}(\mathbf{z})$, *exteriorly directed* at $\mathfrak{f}(\mathbf{z})$ relative to $\mathscr{M}$. Let $\mathfrak{f}(\mathbf{z})$ be taken as an origin of coordinates s on $\mathscr{V}(\mathfrak{f}(\mathbf{z}))$.

A canonical band mapping $\mathfrak{f}_\alpha$. Cf. [5], § 5. If α is a sufficiently small positive constant there exists a $C^{\mu-1}$-diffeomorphism $\mathfrak{f}_\alpha$ of the band $B_\alpha S$ onto the band $B_\alpha \mathscr{M}$ such that

$$\mathfrak{f}_\alpha \mid S = \mathfrak{f} \tag{6.1}$$

and such that the point on the exteriorly directed normal $V(\mathbf{z})$ to S at $\mathbf{z}$ with algebraic coordinate $s \in (-\alpha, \alpha)$ corresponds to the point with algebraic coordinate s on the exteriorly directly normal $\mathscr{V}(\mathfrak{f}(\mathbf{z}))$ to $\mathscr{M}$ at $\mathfrak{f}(\mathbf{z})$. We term this mapping

$$\mathfrak{f}_\alpha : B_\alpha S \to B_\alpha \mathscr{M} \qquad (\mathscr{M} = \mathfrak{f}(S)) \tag{6.2}$$

a *canonical band mapping*.

In Lemma 6.1 we return to the analytic mapping $\mathbf{g}$ of $S \times \Gamma$ into E_n given in Theorem 2.1. In terms of the p-sections $\mathbf{g}^p$ of $\mathbf{g}$ set

$$\mathbf{g}^p(S) = \mathscr{M}^p \qquad (p \in \Gamma). \tag{6.3}$$

Given a point $q \in \Gamma$ and a sufficiently small neighborhood U_q of q we can define an extension of $\mathbf{g} \mid (S \times U_q)$ as follows.

Lemma 6.1. *Corresponding to an arbitrary point $q \in \Gamma$, there exists an open neighborhood U_q of q, a constant $a(q) \in (0, 1/2)$ and an analytic mapping,*

$$\mathbf{g}_q : (B_{a(q)} S) \times U_q \to E_n \,; \quad (\mathbf{x}, p) \to \mathbf{g}_q(\mathbf{x}, p)\,, \tag{6.4}$$

which extends $\mathbf{g} \mid (S \times U_q)$ and whose p-section $\mathbf{g}_q^p$, for $p \in U_q$, is a canonical band mapping

$$\mathbf{g}_q^p : B_{a(q)} S \to B_{a(q)} \mathscr{M}^p \qquad (p \in U_q). \tag{6.5}$$

This lemma differs from Lemma 5.1 of [5] principally in the dependence of the mapping $\mathbf{g}_q^p$ on the parameter $p \in U_q$. However the proof of Lemma 5.1 of [5], with trivial modifications, gives a proof of the above Lemma 6.1.

A neighborhood W of $S \times \Gamma$. Set

$$W = \bigcup_{q \in \Gamma} [(B_{a(q)} S) \times U_q]\,. \tag{6.6}$$

The subset W of $E_n \times \Gamma$ so defined, is a union of subsets of $E_n \times \Gamma$, indexed by $q \in \Gamma$. The set with index q is a neighborhood of $S \times q$, open relative to $E_n \times \Gamma$. Hence the set W is a neighborhood of $S \times \Gamma$, open relative to $E_n \times \Gamma$.

The p-section W^p of W is the open band

$$\{\mathbf{x} \mid 1 - \lambda(p) < \|\mathbf{x}\| < 1 + \lambda(p)\} \qquad (\mathbf{x} \in E_n) \tag{6.7}$$

where for fixed $p \in \Gamma$

$$\lambda(p) = \sup_q a(q)\,, \tag{6.8}$$

taking the sup over all $q \in \Gamma$ such that $p \in U_q$. Hence

$$W^p = B_{\lambda(p)} S\,. \tag{6.9}$$

Lemma 6.1 accordingly leads to the following lemma.

Lemma 6.2. *The mapping $\mathbf{g}$ of $S \times \Gamma$ into E_n, given in Theorem 2.1, admits an analytic extension $\mathbf{g}_W$ over the above neighborhood W of $S \times \Gamma$ such that, for each $p \in \Gamma$, the p-section $\mathbf{g}_W^p$ of $\mathbf{g}_W$ is a canonical band mapping of W^p into E_n of the form*

$$\mathbf{g}_W^p : B_{\lambda(p)} S \to B_{\lambda(p)} \mathscr{M}^p\,. \tag{6.10}$$

Proof of Lemma 5.1. Lemma 5.1 will follow from Lemma 6.2 with the aid of Theorem 1.2 of [4].

To that end recall that a mapping Φ of a subset X of $E_n \times \Gamma$ into $E_n \times \Gamma$ in which $(\mathbf{x}, p) \to \Phi(\mathbf{x}, p)$ is termed "p-invariant" in [4] if

$$\mathrm{pr}_2(\Phi(\mathbf{x}, p)) = p \qquad ((\mathbf{x}, p) \in X)\,. \tag{6.11}$$

Corresponding to the mapping $\mathbf{g}_W : W \to E_n$, affirmed to exist in Lemma 6.2, there exists a p-invariant mapping Φ of W into $E_n \times \Gamma$ in which

$$\mathrm{pr}_1(\Phi(\mathbf{x}, p)) = \mathbf{g}_W(\mathbf{x}, p) \qquad ((\mathbf{x}, p) \in W). \tag{6.12}$$

Conditions (6.11) and (6.12) together uniquely define Φ. It follows from Lemma 1.2 of [4] that Φ is a C^∞-diffeomorphism of W into $E_n \times \Gamma$.

One can accordingly apply Theorem 1.2 of [4] and affirm the following. Corresponding to a sufficiently small neighborhood $X \subset W$ of $S \times \Gamma$, open relative to $E_n \times \Gamma$, there exists a p-invariant homeomorphism Λ_Φ of $X \cup (JS \times \Gamma)$ into $E_n \times \Gamma$ which extends $\Phi \mid X$ and has the following properties. Its projection

$$\mathrm{pr}_1(\Lambda_\Phi) = \mathbf{H} \tag{6.13}$$

is a C^∞_Γ-mapping into E_n of the open subset

$$\mathcal{D} = X \cup (JS \times \Gamma) \tag{6.14}$$

of $E_n \times \Gamma$ which extends $\mathbf{g}_W \mid X$ and hence $\mathbf{g}$, and has p-sections $\mathbf{H}^p$ which are C^∞_0-diffeomorphisms into E_n of the respective p-sections $\mathcal{D}^p$ of $\mathcal{D}$.

Thus $\mathcal{D}$, as defined in (6.14), *and* $\mathbf{H}$, *as defined over* $\mathcal{D}$, *satisfy Lemma* 5.1.

§ 7. Proof of Lemma 5.2

We refer to the mapping $\mathbf{H}$ of Lemma 5.1. This mapping extends $\mathbf{g}$ (given in Theorem 2.1) over the open neighborhood $\mathcal{D}$ of $JS \times \Gamma$, introduced in Lemma 5.1. As affirmed in Lemma 3.1 we can suppose that Γ is an open subset of E_m. Let a point p of Γ now be represented as a point with coordinates $(p_1, \ldots, p_m)$. We now regard $E_n \times \Gamma$ as a subset of the euclidean space E_{n+m} of points

$$(\mathbf{x}, p) = (x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_m). \tag{7.1}$$

The mapping $\mathbf{H}$ of $\mathcal{D}$ into E_n will be approximated by mappings $\mathbf{B}_t$, $0 < t < 1$, in a manner which we now make precise. We begin with the definition of a mapping δ of $\mathcal{D}_\Gamma$ (cf. (5.2)) into R_+ which will be used to condition the nearness of our approximations to $\mathbf{H}$.

The mapping δ. Recall that the Jacobian

$$\frac{D(H_1, \ldots, H_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{x}, p) \tag{7.2}$$

never vanishes for $(\mathbf{x}, p) \in \mathcal{D}_\Gamma$. Suppose that $\mathbf{K}$ is an arbitrary analytic mapping of $\mathcal{D}_\Gamma$ into E_n. Corresponding to an arbitrary point $(\mathbf{x}, p) \in \mathcal{D}_\Gamma$ there exists a maximum positive number $e(\mathbf{x}, p)$ on the interval $(0, 1]$, independent of the choice of $\mathbf{K}$, such that if

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i}(\mathbf{x}, p) - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}(\mathbf{x}, p)\right\| < e(\mathbf{x}, p) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{7.3}$$

then

$$\frac{D(K_1, \ldots, K_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{x}, p) \neq 0. \tag{7.4}$$

We shall apply Lemma 4.1. The open subset $\mathcal{D}_\Gamma$ of E_{n+m} is a metric space and hence paracompact. [2], § 4, No. 5. In the sense of § 4 we term each number on the interval $(0, e(\mathbf{x}, p))$ "admissible" at the point $(\mathbf{x}, p)$ of $\mathcal{D}_\Gamma$. The indexed set of intervals $(0, e(\mathbf{x}, p))$ is "locally consistent" in the sense of Lemma 4.1 as is readily seen. That is, corresponding to a point $(\mathbf{y}, q) \in \mathcal{D}_\Gamma$ there exists a neighborhood $U(\mathbf{y}, q)$ of (y, q) relative to $\mathcal{D}_\Gamma$ and an open interval $(0, a(\mathbf{y}, q))$ of values admissible at each point $(\mathbf{x}, p) \in U(\mathbf{y}, q)$. It follows from Lemma 4.1 that there exists a continuous mapping

$$(\mathbf{x}, p) \to \delta(\mathbf{x}, p); \quad \mathcal{D}_\Gamma \to (0, 1) \tag{7.5}$$

such that each value $\delta(\mathbf{x}, p)$ is admissible at the corresponding point $(\mathbf{x}, p)$.

We can further suppose that $\delta(\mathbf{x}, p)$ tends to zero uniformly with the distance of $(\mathbf{x}, p)$ in E_{n+m} from the boundary, relative to E_{n+m}, of $\mathcal{D}_\Gamma$.

The definition of **B**. Let t be a parameter on the interval $(-1, 1)$. In the euclidean space E_{n+m+1} of coordinates

$$(\mathbf{x}, p; t) = (x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots; p_m; t) \tag{7.6}$$

the product $\mathcal{D}_\Gamma \times (0, 1)$ is an open subset. On this subset let an auxiliary mapping **A** into E_n be defined by setting

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, p; t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, p); \quad [(\mathbf{x}, p; t) \in \mathcal{D}_\Gamma \times (0, 1)].$$

Let $D_j\mathbf{F}$ indicate the first partial derivative of a mapping **F** into E_n with respect to the j-th of the $n + m + 1$ variables (7.6), whenever $D_j\mathbf{F}$ exists.

It follows from Lemma 6 of [9] that there exists an analytic mapping into E_n

$$(\mathbf{x}, p; t) \to \mathbf{B}(\mathbf{x}, p; t); \quad \mathcal{D}_\Gamma \times (0, 1) \to E_n \tag{7.7}$$

such that for $j = 1, \ldots, n + m + 1$ and $(\mathbf{x}, p; t) \in \mathcal{D}_\Gamma \times (0, 1)$

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{x}, p; t) - \mathbf{A}(\mathbf{x}, p; t)\| = \|\mathbf{B}(\mathbf{x}, p; t) - \mathbf{H}(\mathbf{x}, p)\| < t\delta(\mathbf{x}, p) \tag{7.8}$$

$$\|D_j\mathbf{B}(\mathbf{x}, p; t) - D_j\mathbf{A}(\mathbf{x}, p; t)\| = \|D_j\mathbf{B}(\mathbf{x}, p; t) - D_j\mathbf{H}(\mathbf{x}, p)\| < t\delta(\mathbf{x}, p). \tag{7.9}$$

When $j = m + n + 1$ the condition (7.9) takes the special form

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, p; t) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{x}, p; t)\right\| = \left\|\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, p; t)\right\| < t\delta(\mathbf{x}, p). \tag{7.10}$$

The mapping **B**, so chosen, can be extended over $\mathcal{D} \times (-1, 1)$ by setting

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, p; t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, p) \quad [(\mathbf{x}, p; t) \in \mathcal{D} \times (-1, 0]] \tag{7.11}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}, p; t) = \mathbf{H}(\mathbf{0}, p) \quad [(p, t) \in \Gamma \times [0, 1)]. \tag{7.12}$$

So extended **B** will be of class C^1 on the open set $\mathcal{D}_\Gamma \times (-1, 1)$. The mapping **B** then satisfies Lemma 5.2, as one verifies readily.

§ 8. Proof of Lemma 5.3

If the word "continuous" were deleted from Lemma 5.3, the resulting Lemma 5.3 (a) would hold by virtue of Lemmas 5.1 and 5.2 of [3]. Let $p \to \omega(p)$

be a mapping which satisfies Lemma 5.3 (a), with ω replacing η, and set

$$\alpha(p) = \sup \omega(p),$$

taking the sup over all mappings ω for which Lemma 5.3 (a) is valid.

We shall apply Lemma 4.1, taking values on the interval $(0, \alpha(p))$ as "admissible" at $p \in \Gamma$. The proof of Lemma 5.1, in [3], modified in an obvious manner, shows that this set of intervals indexed by $p \in \Gamma$ is "locally consistent". That is, corresponding to any point $q \in \Gamma$, there exists a neighborhood U_q of q and a positive constant c such that if Lemma 5.3(a) holds for a mapping $p \to \omega(p)$ of Γ into $(0, 1)$ it also holds if the values $\omega(p)$ for $p \in U_q$ are replaced by the constant c.

It follows from Lemma 4.1 that there exists a continuous map $p \to \eta(p)$ of Γ into $(0, 1)$, such that for each $p \in \Gamma$, $\eta(p)$ is admissible at p. That is to say, Lemma 5.3 holds as stated.

§ 9. Proof of Lemma 5.4

Recall that in Lemma 5.4 there is given a "disc" neighborhood Δ_γ of $JS \times \Gamma$ such that $\Delta_\gamma \subset \mathring{\Delta}_\beta$. There is also given the continuous mapping $p \to \eta(p)$ of Γ into $(0, 1)$ introduced in Lemma 5.3. From Lemma 6.1 of [3] we get a lemma similar to Lemma 5.4 but in which η_1 is not required to be continuous, and in which ζ is replaced by an *arbitrary* mapping $p \to \varepsilon(p)$ of Γ into $(0, 1)$ with $\varepsilon \leqq \eta_1$. This lemma follows.

Lemma 9.1. *There exists a mapping $p \to \eta_1(p)$ of Γ into $(0, 1)$, with $\eta_1 \leqq \eta$, such that the following is true.*

Corresponding to any mapping $p \to \varepsilon(p)$ of Γ into $(0, 1)$ such that $\varepsilon \leqq \eta_1$, and to $\mathbf{L}^{\varepsilon, p}$, $p \in \Gamma$, there is a continuous mapping

$$\mathbf{Q}^{\varepsilon, p} : \Delta_\gamma^p \times (0, 1) \to \Delta_\beta^p ; \quad (\mathbf{x}, t) \to \mathbf{Q}^{\varepsilon, p}(\mathbf{x}, t) \tag{9.1}$$

which is the "conjugate" of $\mathbf{L}^{\varepsilon, p}$ on $\Delta_\gamma^p \times (0, 1)$ relative to $\mathbf{g}^p$, in the sense of § 6 *of* [3].

The mapping $\mathbf{Q}^{\varepsilon, p}$ in (9.1), as "conjugate" of $\mathbf{L}^{\varepsilon, p}$, has the following properties. For $0 < t < 1$, the t-section $\mathbf{Q}_t^{\varepsilon, p}$ of $\mathbf{Q}^{\varepsilon, p}$ is an A_0-diffeomorphism of Δ_γ^p into Δ_β^p which leaves the origin fixed and is such that

$$\mathbf{g}^p(\mathbf{z}) = (\mathbf{L}_t^{\varepsilon, p} \mathbf{Q}_t^{\varepsilon, p})(\mathbf{z}) \qquad (\mathbf{z} \in S). \tag{9.2}$$

Completion of proof of Lemma 5.4. Taking the sup for all mappings η_1 which satisfy Lemma 9.1, set

$$\eta_2(p) = \sup \eta_1(p) \qquad (p \in \Gamma), \tag{9.3}$$

and term values in $(0, \eta_2(p))$ "admissible" at p. The proof of Lemma 6.1 of [3] is readily modified to show that this set of intervals, indexed by $p \in \Gamma$, is "locally consistent". It follows from Lemma 4.1 that Lemma 9.1 can be satisfied by a mapping η_1 which is continuous.

Suppose now that $p \to \zeta(p)$ is an analytic mapping of Γ into $(0, 1)$ with $\zeta \leq \eta_1$. Then $\mathbf{L}^\zeta$, as defined in (5.7), is continuous on $\Delta_\beta \times (0, 1)$, and $\mathbf{L}^\zeta_t$ is analytic on the set $\Delta_\beta - (\mathbf{0} \times \Gamma)$ for fixed $t \in (0, 1)$.

With $\mathbf{L}^\zeta$ so defined, Lemma 9.1 implies the existence of a mapping

$$\mathbf{Q}^\zeta : \Delta_\gamma \times (0, 1) \to E_n \tag{9.4}$$

whose p-section $\mathbf{Q}^{\zeta, p}$ is the conjugate of $\mathbf{L}^{\zeta, p}$ on $\Delta^p_\gamma \times (0, 1)$ relative to $\mathbf{g}^p$, for $p \in \Gamma$. The explicit construction of $\mathbf{Q}^{\zeta, p}$ as conjugate of $\mathbf{L}^{\zeta, p}$, in § 6, [3], shows that $\mathbf{Q}^\zeta$ is *continuous* on $\Delta_\gamma \times (0, 1)$, and that each t-section $\mathbf{Q}^\zeta_t$ is *analytic* on $\Delta_\gamma - (\mathbf{0} \times \Gamma)$ for $0 < t < 1$. The affirmations of Lemma 5.4 concerning $\mathbf{Q}^{\zeta, p}_t$, and the relation (5.11), follow directly from Lemma 9.1, with ε replaced by ζ.

This completes the proof of Lemma 5.4.

§ 10. Completion of proof of Theorem 2.2

Given $\mathbf{g}$ as in Theorems 2.1 and 2.2 we shall present a continuous family $\mathbf{G}_t$, $0 < t < 1$ of solutions of the corresponding Γ-problem $(\mathbf{g}, \Gamma)$. To this end let the disc-neighborhood Δ_γ of $JS \times \Gamma$ be chosen as in (5.9), and let an analytic mapping $p \to \zeta(p)$ of Γ into $(0, 1)$ be chosen so that $\zeta \leq \eta_1$ (Lemma 4.3). The mapping $\mathbf{L}^\zeta$ of $\Delta_\gamma \times (0, 1)$ into E_n is then defined in (5.7). Let $\mathbf{Q}^\zeta$ be the mapping of $\Delta_\gamma \times (0, 1)$ into E_n associated with $\mathbf{L}^\zeta$ as in Lemma 5.4. For fixed ζ, chosen as above, and $0 < t < 1$ we set

$$\mathbf{Q}^\zeta_t = \mathbf{Q}_t, \quad \mathbf{L}^\zeta_t = \mathbf{L}_t$$

and state a lemma paralleling Lemma 6.2 of [3].

Lemma 10.1. *Let a mapping*

$$\mathbf{G}_t : \Delta_\gamma \to E_n; \quad (\mathbf{x}, p) \to \mathbf{G}_t(\mathbf{x}, p) \qquad (0 < t < 1)$$

be defined by setting

$$\mathbf{G}^p_t(\mathbf{x}) = (\mathbf{L}^p_t \mathbf{Q}^p_t)(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in \Delta^p_\gamma)$$

for each $p \in \Gamma$. *If one sets* $N = \mathring{\Delta}_\gamma$ *then, for* $0 < t < 1$, $\mathbf{G}_t \mid N$ *will serve as a mapping* $\mathbf{G}$ *of* N *into* E_n *which will satisfy Theorem* 2.2.

The mapping $\mathbf{G}_t$ is an A_Γ-mapping of Δ_γ into E_n for each $t \in (0, 1)$. For $\mathbf{Q}_t$ is an A_Γ-mapping of Δ_γ into E_n such that $\mathbf{Q}^p_t$ leaves the origin fixed and is biunique (Lemma 5.4). Moreover $\mathbf{Q}^p_t$ maps Δ^p_γ into Δ^p_β and Δ^p_β is the domain of definition of $\mathbf{L}^p_t$. Since $\mathbf{L}_t$ is an A_Γ-mapping of Δ_β into E_n (cf. (5.7)) we infer that $\mathbf{G}_t$ is an A_Γ-mapping of Δ_γ into E_n for each $t \in (0, 1)$.

Moreover $\mathbf{G}^p_t$ is an A_0-diffeomorphism of Δ^p_γ into E_n for $p \in \Gamma$ and $0 < t < 1$. For $\mathbf{Q}^p_t$ is an A_0-diffeomorphism of Δ^p_γ into Δ^p_β (Lemma 5.4) and $\mathbf{L}^p_t$ is an A_0-diffeomorphism of Δ^p_β into E_n (Lemma 5.3).

Finally $\mathbf{G}^p_t \mid S = \mathbf{g}^p$ in accord with (9.2).

This completes the proof of Theorem 2.2.

References

[1] BOURBAKI, N.: Théorie des ensembles, Fascicule de résultats. Paris: Hermann et Cie. 1958.

[2] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chapitre 9. Paris: Hermann et Cie. 1958.

[3] HUEBSCH, WILLIAM, and MARSTON MORSE: The Schoenflies extension in the analytic case. Annali di Mat. (1961), to appear.

[4] HUEBSCH, WILLIAM, and MARSTON MORSE: The dependence of the Schoenflies extension on an accessory parameter. J. d'Analyse Math. **8**, 209—271, (1960—61).

[5] MORSE, MARSTON: Differentiable mappings in the Schoenflies theorem. Compositio Math. **14**, 83—151 (1959).

[6] MORSE, MARSTON: An arbitrarily small analytic mapping into R_+ of a proper, regular, analytic r-manifold in E_m. Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A. **95** (1961).

[7] ROYDEN, H. L.: The analytic approximation of differentiable mappings. Math. Ann. **139**, 171—179 (1960).

[8] WHITNEY, H.: Differentiable manifolds. Ann. Math. **37**, 645—680 (1936).

[9] WHITNEY, H.: Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. Am. Math. Soc. **36**, 63—89 (1934).

(Received February 12, 1961)

KOECHER, M.
Math. Annalen 144, 175—182 (1961)

Beiträge zu einer Reduktionstheorie in Positivitätsbereichen. II

Von
MAX KOECHER in Münster (Westf.)

Einleitung

Wie in Teil I (vgl. [1]) bezeichne X auch in dem vorliegenden zweiten Teil stets einen n-dimensionalen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen; σ eine symmetrische positiv definite Bilinearform und Y einen Positivitätsbereich von X. Ω sei eine diskontinuierliche (I, § 5.1) Untergruppe der Gruppe $\Sigma(Y)$ der linearen Automorphismen von Y (I, § 1.4).

Denken wir uns wie früher eine in X diskrete Teilmenge D von $\overline{Y} - \{0\}$ gegeben, von der sofort $\Omega D = D$ vorausgesetzt werden soll (I, § 5). Mit Hilfe von D wurden für y aus Y die Minima

$$\mu(y) := \mu_D(y) := \inf\{\sigma(a, y); a \in D\}$$

gebildet, und die Menge

$$M(y) := M_D(y) := \{a; a \in D, \mu(y) = \sigma(a, y)\}$$

der Vektoren, die eine Darstellung des Minimums vermitteln, untersucht. Im Mittelpunkt stand der Begriff der *vollkommenen* Punkte, d. h. der Punkte v von Y, für die es n linear unabhängige Vektoren in $M(v)$ gibt. Die Menge $V(D)$ der vollkommenen Punkte v mit $\mu(v) = 1$ ist bei der aus Ω abgeleiteten Gruppe Ω^* (I, § 5.2) invariant. In Teil I wurde einerseits dargelegt, wie die Annahme, daß es nur endliche viele nach Ω^* inäquivalente Punkte aus $V(D)$ gibt, zu Ergebnissen über Ω und einen Fundamentalbereich von Ω in Y führt (I, § 5 und 7). Andererseits wurde gezeigt, daß diese Annahme in allen wichtigen Beispielen erfüllt ist (I, § 8—10). In diesem Teil II soll eine erneute Anwendung dieser Endlichkeitsannahme gemacht werden. Die Ergebnisse sind bisher nur im Spezialfall der positiv definiten quadratischen Formen bekannt und gehen in diesem Fall auf eine wenig beachtete Arbeit von B. A. WENKOV [2] zurück. Wir formulieren dieses Ergebnis in § 3.4.

§ 1. Ein weiteres Prinzip zur Konstruktion von Fundamentalbereichen

1. In diesem Paragraphen sei lediglich eine diskontinuierliche Untergruppe Ω von $\Sigma(Y)$ gegeben. Die Menge D — und die daraus abgeleiteten Begriffe — wird jetzt also noch nicht benötigt. Da Ω nach Teil I, Lemma 2, eine Gruppe von Isometrien ist, ist Ω nach einem bekannten Satz genau dann

diskontinuierlich, wenn Ω als Untergruppe der Gruppe $\Sigma(Y)$ — versehen mit der natürlichen Topologie — diskret ist. Mit Ω ist daher auch Ω^* (I, § 5.2) diskontinuierlich.

Zu einem gegebenen Punkt u von Y bilden wir die Menge

$$D_u := \Omega^* u := \{\Phi^* u; \Phi \in \Omega\}$$

aller nach Ω^* zu u äquivalenten Punkte. Wir wollen stets annehmen, daß D_u *in X diskret* ist.

2. Zu D_u kann man jetzt nach I, § 2, die Minima

$$\mu_u(y) := \inf\{\sigma(a, y); a \in D_u\}$$

bilden. Nach Definition von D_u kann man hierfür auch

$$\mu_u(y) = \inf\{\sigma(u, \Phi y); \Phi \in \Omega\}$$

schreiben. Die Mengen

$$M_u(y) := \{\Phi^* u; \mu_u(y) = \sigma(u, \Phi y), \Phi \in \Omega\}$$

sind endlich und es gelten alle Ergebnisse von I, § 2, mit D_u an Stelle von D. In den interessanten Fällen ist D_u aber keineswegs zulässig im Sinne von I, § 3.2. Wegen $\Omega^* D_u = D_u$ ist nach I, § 5.2 (durch Vertauschung von Ω mit Ω^*)

$$\mu_u(\Phi y) = \mu_u(y) \quad \text{für} \quad \Phi \text{ aus } \Omega\,.$$

3. Die Minima $\mu_u(y)$, $y \in Y$, werden jetzt in anderer Weise als in Teil I untersucht. Man bilde die Menge

$$F_u := \{y; y \in Y, \mu_u(y) = \sigma(u, y)\}\,, \tag{1.1}$$

d. h. man betrachte diejenigen Punkte von Y, deren Minimum $\mu_u(y)$ gleich dem Wert $\sigma(u, y)$ der Bilinearform ist. Berücksichtigt man die Definition von $\mu_u(y)$, dann kann man auch schreiben

$$F_u = \{y; y \in Y, \sigma(u, y) \leqq \sigma(u, \Phi y) \quad \text{für alle} \quad \Phi \in \Omega\}\,. \tag{1.2}$$

Geometrisch ist $\overline{F}_u$ offenbar ein konvexer Kegel mit der Spitze im Nullpunkt. Einige einfache Eigenschaften von F_u fassen wir zusammen in

Satz 1. *Ist u aus Y und Ω eine diskontinuierliche Untergruppe von $\Sigma(Y)$, für die $D_u = \Omega^* u$ in X diskret ist, dann gilt*

1) *F_u ist in Y relativ abgeschlossen.*

2) *Zu jedem $y \in Y$ gibt es $\Phi \in \Omega$ mit $\Phi y \in F_u$.*

3) *Sind Φy und Ψy innere Punkte von F_u, $\Phi, \Psi \in \Omega$, dann ist $\Phi^* u = \Psi^* u$.*

4) *Zu jedem Kompaktum K von Y gibt es nur endlich viele $\Psi \in \Omega$, für die $\Psi F_u \cap K$ nicht leer ist.*

Beweis: 1) Ist klar, da F_u Durchschnitt von relativ abgeschlossenen Mengen ist.

2) In 2 hatten wir gesehen, daß das Minimum $\mu_u(y)$ angenommen wird, d. h. es gibt $\Phi \in \Omega$ mit $\mu_u(y) = \sigma(u, \Phi y)$. Da $\mu_u(y)$ bei Ω invariant ist, folgt $\Phi y \in F_u$ nach (1.1).

3) Nach Voraussetzung gibt es offene Umgebung U von y mit $\Phi U \subset F_u$ und $\Psi U \subset F_u$. Nach (1.2) bedeutet dies

$$\sigma(u, \Phi x) \leqq \sigma(u, \Lambda \Phi x), \quad \sigma(u, \Psi x) \leqq \sigma(u, \Lambda \Psi x)$$

für alle $\Lambda \in \Omega$ und $x \in U$. Setzt man in der ersten Ungleichung $\Lambda = \Psi\Phi^{-1}$ und in der zweiten $\Lambda = \Phi\Psi^{-1}$, so folgt $\sigma(u, \Phi x) = \sigma(u, \Psi x)$ für alle $x \in U$. Bringt man hier Φ und Ψ an die erste Stelle der Bilinearform und beachtet, daß U sicher n linear unabhängige Vektoren enthält, so folgt die Behauptung.

4) Wir wählen ein y aus $\Psi F_u \cap K$ und haben nach (1.2)

$$\sigma(u, \Psi^{-1} y) \leqq \sigma(u, \Phi\Psi^{-1} y)$$

für alle $\Phi \in \Omega$. $\Phi = \Psi$ und Anwendung von I, Lemma 1f, liefert

$$\varrho(K)\, |\Psi^{*-1} u| \leqq \sigma(\Psi^{*-1} u, y) = \sigma(u, \Psi^{-1} y) \leqq \sigma(u, y)\,.$$

Wegen $y \in K$ ist $\sigma(u, y)$ beschränkt und daher auch $|\Psi^{*-1} u|$. Da D_u diskret und die Menge der $\Psi \in \Omega$ mit $\Psi^* u = u$ endlich ist, gilt dies für höchstens endlich viele $\Psi \in \Omega$.

4. Vergleicht man die Aussage von Satz 1 mit der Definition eines Fundamentalbereiches in Teil I, § 5.1, so sieht man, daß F_u *genau dann ein Fundamentalbereich von* Ω *in* Y ist, wenn aus $\Psi^* u = u$, $\Psi \in \Omega$, stets folgt, daß Ψ die Identität ist, mit anderen Worten: *wenn* u *kein Fixpunkt von* Ω^* *ist.* Da die Nichtfixpunkte einer diskontinuierlichen Gruppe überall dicht liegen, kann u zur Konstruktion eines Fundamentalbereiches weitgehend beliebig gewählt werden. Für $\Psi^* u = u$ hat man $\Psi F_u = F_u$.

Bei allen ähnlich gearteten Untersuchungen ist es wichtig zu wissen, ob ein gegebener Fundamentalbereich endlich viele Nachbarn besitzt. Als *Nachbarn* von F_u wird man in jedem Falle diejenigen Bilder ΨF_u bezeichnen, für die $F_u \cap \Psi F_u$ nicht leer ist. Wir zeigen: ΨF_u *ist dann und nur dann ein Nachbar von* F_u, *wenn es ein* $y \in F_u$ *mit* $\sigma(u, y) = \sigma(u, \Psi y)$, *d. h.* $\Psi^* u \in M_u(y)$ *gibt.* Ist nämlich $\Psi y \in F_u \cap \Psi F_u$, dann hat man

$$\sigma(u, y) \leqq \sigma(u, \Phi y), \quad \sigma(u, \Psi y) \leqq \sigma(u, \Phi\Psi y)$$

für alle $\Phi \in \Omega$. Man setzt $\Phi = \Psi$ bzw. $\Phi = \Psi^{-1}$ und erhält $\sigma(u, y) = \sigma(u, \Psi y)$. Die Umkehrung liest man sofort ab.

Nach Satz 1 sind zwei Nachbarn $\Psi_1 F_u$ und $\Psi_2 F_u$ von F_u entweder identisch oder sie haben keine inneren Punkte gemeinsam, der erste Fall tritt dann und nur dann ein, wenn $\Psi_1^* u = \Psi_2^* u$ gilt. *Jedem Punkt der Vereinigung*

$$N_u := \bigcup_{y \in F_u} M_u(y)$$

entspricht daher genau ein Nachbar von F_u *und umgekehrt.*

§ 2. Ein Lemma

1. Nach den allgemeinen Vorbetrachtungen des § 1 schließen wir jetzt wieder an die Situation von Teil I an. Neben der vermöge eines festen Punktes u von Y und der diskontinuierlichen Untergruppe Ω von $\Sigma(Y)$ gebildeten Menge $D_u = \Omega^* u$ denken wir uns wie früher eine zulässige Menge D, die in $\overline{Y} - \{0\}$ enthalten ist, gegeben. Wir nehmen an, daß $\Omega D = D$ gilt und *es nur endlich viele nach* Ω^* *inäquivalente (bezüglich* D*) vollkommene Punkte* v *mit* $\mu(v) = 1$ *gibt, d. h. daß* $V(D)/\Omega^*$ *endlich ist.* Unter diesen Voraussetzungen beweisen wir das folgende

Lemma. *Ist der Durchschnitt von F_u mit der vollkommenen Pyramide $P(M(w))$ (I, § 4.4) nicht leer, dann gibt es linear unabhängige Vektoren $a_1, \ldots, a_r$ aus $M(w)$ mit*

$$\sigma(u, a_k) \leqq \gamma_k \quad \textit{für} \quad 1 \leqq k \leqq r \quad \textit{und} \quad \sum_{k=1}^{r} a_k \in Y .$$

Hier bezeichnen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ nur von u, D und Ω abhängige positive Konstanten.

2. Zum *Beweis* werden wir n beschränkte Teilmengen E_k, $1 \leqq k \leqq n$, von $\overline{Y}$ konstruieren. Zuvor wählen wir ein Vertretersystem $V(D)/\Omega^*$ fest aus und bezeichnen dies mit V. Weiter möge für Vektoren $a_1, \ldots, a_r$ aus $\overline{Y}$ mit $[a_1, \ldots, a_r]$ die Menge der r-Tupel $(\Phi a_1, \ldots, \Phi a_r)$ für alle Φ aus Ω bezeichnet werden. Speziell ist also $[a] = \Omega a$.

Zur Konstruktion der Mengen E_k verwenden wir gewisse endliche Teilmengen V_k von D und Konstante $\gamma_k > 0$. Wir beginnen mit

$$V_1 := \bigcup_{v \in V} M(v)$$

und

$$\gamma_1 := \sup\{\sigma(u, a); a \in V_1\} .$$

E_1 wird nun definiert durch

$$E_1 := \{y; y \in \overline{Y}, \sigma(u, y) \leqq \gamma_1\} .$$

Wegen I, Lemma 1f, ist E_1 beschränkt. Offenbar gilt $V_1 \subset E_1 \cap D$ und $\dim V_1 = n$, d. h. V_1 enthält n linear unabhängige Vektoren.

3. Nehmen wir nun an, daß bereits endliche nicht leere Mengen V_k für $1 \leqq k \leqq r$ als Vereinigung von Mengen $\Phi M(v)$ mit gewissen $\Phi \in \Omega$ und $v \in V$ konstruiert sind. Vermöge der V_k sind Konstante

$$\gamma_k := \sup\{\sigma(u, a); a \in V_k\}$$

und beschränkte Mengen

$$E_k := \{y; y \in \overline{Y}, \sigma(u, y) \leqq \gamma_k\}$$

definiert.

Zu je r linear unabhängigen Vektoren $a_1, \ldots, a_r$ aus $E_r \cap D$ und jedem r-Tupel $(b_1, \ldots, b_r)$ aus $[a_1, \ldots, a_r]$ bestimmen wir ein festes $\Phi_{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots b_r}$ aus Ω mit

$$a_k = \Phi_{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r} b_k$$

für $1 \leqq k \leqq r$. V_{r+1} wird jetzt definiert als Vereinigung aller Mengen

$$\Phi_{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r} M(v) ,$$

wobei

(2.1) $(a_1, \ldots, a_r)$ alle r-Tupel von linear unabhängigen Vektoren aus $E_r \cap D$,

(2.2) $(b_1, \ldots, b_r)$ alle r-Tupel aus $[a_1, \ldots, a_r]$ und

(2.3) v alle vollkommenen Punkte aus V, für die ein $(b_1, \ldots, b_r)$ von (2.2) in $M(v)$ enthalten ist,

durchläuft. Da nach (2.3) nur diejenigen $(b_1, \ldots, b_r)$, die in V_1 enthalten sind, einen nicht-trivialen Beitrag leisten, ferner nur endlich viele $(a_1, \ldots, a_r)$ in

Betracht kommen (denn E_r ist beschränkt und D in X diskret) ist V_{r+1} endlich.

Nach Annahme über V_r können wir $\Phi \in \Omega$ und $v \in V$ so wählen, daß $\Phi M(v)$ in V_r und daher in E_r liegt. Aus $\Phi M(v)$ wählen wir linear unabhängige Vektoren $a_1, \ldots, a_r$ und definieren b_k aus $M(v)$ durch $a_k = \Phi b_k$. Für dieses r-Tupel $(b_1, \ldots, b_r)$ ist (2.2) und (2.3) erfüllt und daher ist V_{r+1} nicht leer.

Das Verfahren bricht bei $r = n$ ab.

4. Nach dieser Konstruktion kommen wir zum eigentlichen Beweis des Lemmas. Betrachten wir ein vollkommenes w, für welches der Durchschnitt $P(M(w)) \cap F_u$ nicht leer ist. Wir wählen $\Psi \in \Omega$ derart, daß $v = \Psi^{*-1} w$ in V_1 d. h. $\Psi M(w) = M(v)$ in V_1 enthalten ist. Es gibt nun ein

$$y = \sum_{a \in M(w)} \lambda(a) a, \quad \lambda(a) \geqq 0,$$

in F_u, d. h. y liegt in Y und es gilt

$$\sum_{a \in M(w)} \lambda(a)\, \sigma(u, a) \leqq \sum_{a \in M(w)} \lambda(a)\, \sigma(u, \Phi a) \tag{2.4}$$

für alle Φ aus Ω.

In (2.4) setzen wir $\Phi = \Psi$ und erhalten wenigstens ein $a_1 \in M(w)$ mit

$$\lambda(a_1) > 0 \quad \text{und} \quad \sigma(u, a_1) \leqq \sigma(u, \Psi a_1),$$

denn andernfalls könnte (2.4) nicht gelten. Wegen $\Psi a_1 \in \Psi M(w) \subset V_1$ ist nach 2 dann $\sigma(u, \Psi a_1) \leqq \gamma_1$, d. h. für dieses $a_1 \in M(w)$ gilt $\sigma(u, a_1) \leqq \gamma_1$.

5. Nehmen wir an, wir hätten bereits $r \geqq 1$ linear unabhängige Punkte $a_1, \ldots, a_r$ aus $M(w)$ mit

$$\sigma(u, a_k) \leqq \gamma_k \quad \text{für} \quad 1 \leqq k \leqq r \tag{2.5}$$

gefunden. Wir teilen damit $M(w)$ in zwei disjunkte Mengen M_r' und M_r'' ein: M_r' enthält alle von den $a_1, \ldots, a_r$ linear abhängenden Vektoren, M_r'' die davon linear unabhängigen. Nun sind zwei Fälle zu diskutieren:

a) *Für alle $a \in M_r''$ ist* $\lambda(a) = 0$. Wir zeigen, daß dann das Lemma bewiesen ist, d. h.

$$b := \sum_{k=1}^{r} a_k$$

zu Y gehört. Wäre das nicht der Fall, d. h. liegt b auf dem Rand von Y, dann gibt es nach I, Lemma 1e, ein von Null verschiedenes x aus dem Rand von Y mit $\sigma(b, x) = 0$. Wegen $\sigma(a_k, x) \geqq 0$ folgt $\sigma(a_k, x) = 0$ für alle k und da die $a \in M_r'$, die allein einen Beitrag zu y geben, von den a_k linear abhängen, folgt $\sigma(y, x) = 0$. Das ist aber ein Widerspruch zu $y \in Y$.

b) *Es gibt ein $a \in M_r''$ mit* $\lambda(a) > 0$. In diesem Falle kann das Verfahren einen Schritt fortgesetzt werden: Für die Vektoren $a_1, \ldots, a_r$ bedeutet (2.5) offenbar $a_k \in E_r \cap D$. Mit dem bereits fixierten $\Psi \in \Omega$ bilden wir $b_k := \Psi a_k$ für $1 \leqq k \leqq r$ und erhalten

$$(b_1, \ldots, b_r) \in [a_1, \ldots, a_r], \quad (b_1, \ldots, b_r) \subset M(v).$$

Nach 3 wird

$$a_k = \Phi_{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r} b_k, \quad 1 \leqq k \leqq r,$$

d. h. für

$$\Phi := \Phi_{a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_r}\Psi$$

ist $\Phi a_k = a_k$, $1 \leqq k \leqq r$. Nach Konstruktion von M_r' ist daher

$$\Phi a = a \quad \text{für alle} \quad a \in M_r' .$$

Trägt man Φ in (2.4) ein, so hat man

$$\sum_{a \in M_r''} \lambda(a)\, \sigma(u, a) \leqq \sum_{a \in M_r''} \lambda(a)\, \sigma(u, \Phi a) .$$

Nach Definition von M_r'' ist hier wenigstens ein $\lambda(a)$ positiv und daher gibt es ein $a_{r+1} \in M_r'' \subset M(w)$ mit

$$\sigma(u, a_{r+1}) \leqq \sigma(u, \Phi a_{r+1}) .$$

Hier ist

$$b_{r+1} := \Phi a_{r+1} = \Phi_{a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_r}\Psi a_{r+1}$$
$$\in \Phi_{a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_r} M(v) .$$

Nach Definition liegt daher b_{r+1} in V_{r+1} und man erhält

$$\sigma(u, a_{r+1}) \leqq \gamma_{r+1} .$$

Damit ist das Verfahren wie angekündigt einen Schritt fortgesetzt. Da es aber spätestens bei $r = n$ abbricht, ist das Lemma vollständig bewiesen.

§ 3. Ein Endlichkeitssatz

1. D sei wieder stets eine zulässige Teilmenge von $\overline{Y} - \{0\}$, für die diskontinuierliche Untergruppe Ω von $\Sigma(Y)$ gelte $\Omega D = D$, ferner sei $D_u = \Omega^* u$ diskret. Nach I, Satz 2, überdecken die vollkommenen Pyramiden ganz Y und daher auch jede Menge F_u. Wir werden sehen, daß unter der zusätzlichen Annahme der Endlichkeit von $V(D)/\Omega^*$ zur Überdeckung schon endlich viele ausreichen.

Satz 2. *Ist $V(D)/\Omega^*$ endlich, dann gibt es nur endlich viele vollkommene Pyramiden, die mit F_u einen Punkt gemeinsam haben.*

Beweis: Betrachten wir eine vollkommene Pyramide $P(M(w))$, die mit F_u einen Punkt gemeinsam hat. Nach dem Lemma von § 2 gibt es dann r linear unabhängige Punkte $a_1, \ldots, a_r$ aus $M(w)$ mit

$$\sigma(u, a_k) \leqq \gamma_k \quad \text{für} \quad 1 \leqq k \leqq r , \tag{3.1}$$

$$\sum_{k=1}^{r} a_k \in Y .$$

Nach I, Lemma 1f, folgt aus der ersten Beziehung, daß die Vektoren a_k beschränkt sind mit einer Schranke, die nicht von w abhängt. Da D in X diskret ist und die a_k zu D gehören, gibt es nur endlich viele mögliche Vektoren a_k und daher mögliche Summen der a_k. Nach I, § 1.3, gibt es somit ein d aus Y mit

$$\sum_{k=1}^{r} a_k \geqq d \tag{3.2}$$

für alle in (3.1) vorkommenden Vektoren a_k.

Von dem vollkommenen Punkt w dürfen wir $\mu(w) = 1$ annehmen und erhalten durch Eintragen von (3.2)

$$\sigma(d, w) \leq \sigma\left(\sum_{k=1}^{r} a_k, w\right) = \sum_{k=1}^{r} \sigma(a_k, w) = \sum_{k=1}^{r} 1 \leq n .$$

I, Lemma 1f, zeigt wieder $|w| \leq \frac{n}{\varrho(d)}$, und da die vollkommenen Punkte w mit $\mu(w) = 1$ nach I, Lemma 5, diskret liegen, gibt es nur endlich viele w. Damit ist der Satz bewiesen.

2. Diskutieren wir jetzt die Nachbarn von F_u. Nach I, Satz 4, gibt es einen Fundamentalbereich F von Ω in Y, der in der Vereinigung endlich vieler vollkommener Pyramiden enthalten ist, sofern $V(D)/\Omega^*$ endlich ist. Da F_u in diesem Falle nach unserem Lemma außerdem von nur endlich vielen vollkommenen Pyramiden überdeckt wird, hat F_u nur mit endlich vielen Bildern ΦF, $\Phi \in \Omega$, von F Punkte gemeinsam. F hat darüber hinaus endlich viele Nachbarn und daher hat auch F_u nur endlich viele Nachbarn. Man hat somit

Satz 3. *Ist $V(D)/\Omega^*$ endlich, dann hat jedes F_u, $u \in Y$, nur endlich viele Nachbarn.*

3. In § 1.4 hatten wir gesehen, daß die verschiedenen Nachbarn von F_u eineindeutig auf die Punkte der Vereinigung

$$N_u = \bigcup_{y \in F_u} M_u(y)$$

bezogen werden können. Satz 3 zeigt daher, daß diese Menge endlich ist. Dieses Ergebnis benutzen wir zum Beweis von

Satz 4. *Ist $V(D)/\Omega^*$ endlich, dann ist die Anzahl der $\Psi \in \Omega$ mit*

$$\sigma(u, \Psi y) = \mu_u(y)$$

unabhängig von y aus Y beschränkt.

Beweis: Da $\mu_u(y)$ bei der Abbildung $y \to \Phi y$, $\Phi \in \Omega$, invariant ist, gilt dies auch für die fragliche Anzahl. Man kann sich daher nach Satz 1 auf die y aus F_u beschränken. Für jede Lösung Ψ ist jetzt $\Psi^* u \in M_u(y)$, d. h. $\Psi^* u$ gehört zu N_u. Da sowohl N_u als auch die Gruppe der $\Psi \in \Omega$ mit $\Psi^* u = u$ endlich ist, folgt die Behauptung.

4. Die in Satz 4 ausgesprochene Endlichkeitsaussage ist damit für alle im § 6 und den §§ 8—10 von Teil I behandelten Beispiele bewiesen. Wir formulieren das Ergebnis lediglich für den Fall der reellen positiv definiten quadratischen Formen und behalten dazu die Bezeichnung von I, § 8, bei. $u = \mathfrak{T}$ sei eine fest gewählte ganz-rationale positiv definite Matrix. $\mu_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{Y})$ ist dann das Infimum der Zahlen $\mathrm{Spur}(\mathfrak{T}\mathfrak{U}'\mathfrak{Y}\mathfrak{U})$ für alle unimodularen $\mathfrak{U}$, und $F_{\mathfrak{T}}$ ist die Menge der $\mathfrak{Y} > 0$ mit

$$\mathrm{Spur}(\mathfrak{T}\mathfrak{Y}) \leq \mathrm{Spur}(\mathfrak{T}\mathfrak{U}'\mathfrak{Y}\mathfrak{U})$$

für alle unimodularen $\mathfrak{U}$. Sind die Einheiten von $\mathfrak{T}$ nur die Matrizen $\pm\mathfrak{E}$, d. h. folgt aus $\mathfrak{U}'\mathfrak{T}\mathfrak{U} = \mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$ unimodular, notwendig $\mathfrak{U} = \pm\mathfrak{E}$, dann ist $F_{\mathfrak{T}}$ ein Fundamentalbereich in Y bezüglich der Abbildungen $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{U}'\mathfrak{Y}\mathfrak{U}$ mit nur

endlich vielen Nachbarn. Dies ist das zitierte Ergebnis von B. A. WENKOV. Satz 4 bedeutet dann, daß die Anzahl der unimodularen $\mathfrak{U}$ mit

$$\mathrm{Spur}(\mathfrak{T}\,\mathfrak{Y}) = \mathrm{Spur}(\mathfrak{T}\,\mathfrak{U}'\mathfrak{Y}\mathfrak{U})$$

für $\mathfrak{Y} \in F_{\mathfrak{T}}$ beschränkt ist.

Literatur

[1] KOECHER, M.: Beiträge zu einer Reduktionstheorie in Positivitätsbereichen. I. Math. Ann. **141**, 384—432 (1960).

[2] WENKOV, B. A.: Über die Reduktion positiver quadratischer Formen. Izvest. Akad. Nauk CCCP, Math. Ser. **4**, 37—52 (1940).

(Eingegangen am 23. Februar 1961)

BARTHEL, W. u. G. FRANZ
Math. Annalen 144, 183—198 (1961)

Eine Verallgemeinerung des Busemannschen Satzes vom Brunn-Minkowskischen Typ

Von

WOLDEMAR BARTHEL und GUDRUN FRANZ in Saarbrücken

Während die Brunn-Minkowskische Ungleichung in ihrer ursprünglichen Gestalt die Inhalte von Parallelschnitten eines konvexen Körpers abschätzt, untersucht BUSEMANN [4] die Inhalte der Schnitte eines konvexen Körpers mit den Halbhyperebenen eines eigentlichen Büschels. Dieser Busemannsche „Satz vom Brunn-Minkowskischen Typ" wird in [1] in einer affininvarianten Ungleichung zusammengefaßt und unter Abschwächung der Konvexitätsvoraussetzungen mit vollständiger Gleichheitsdiskussion behandelt. Die Grundidee für diesen wie auch den ursprünglichen Busemannschen Beweis gibt der klassische symmetrisierungsfreie Beweis des Brunn-Minkowskischen Satzes, der wesentlich analytischer Natur ist[1]).

Ohne analytische Hilfsmittel geben HADWIGER und OHMANN [6] einen symmetrisierungsfreien Beweis des Brunn-Minkowskischen Satzes in seiner allgemeinen, von Konvexitätsvoraussetzungen freien Form[2]). In diesem mengengeometrischen Beweis wird die Gleichheitsbedingung für die Brunn-Minkowskische Ungleichung gemeinsam mit der für die isoperimetrische Ungleichung der äußeren Minkowski-Oberfläche gewonnen. Die Gleichheitsdiskussion für die isoperimetrische Ungleichung der inneren Minkowski-Oberfläche ist in [2] ebenfalls mit diesen geometrischen Methoden ausgeführt.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir auch den Busemannschen Satz rein mengengeometrisch beweisen. Dabei erlauben uns die Ohmannschen Methoden eine völlige Vermeidung von Konvexitätsvoraussetzungen und eine Vereinfachung der Gleichheitsdiskussion.

1. Formulierung des Busemannschen Satzes

In einem $(n+1)$-dimensionalen affinen Raum R^{n+1} $(n \geqq 1)$ betrachten wir ein *Halbbüschel*, das aus allen von einer festen $(n-1)$-dimensionalen Ebene T berandeten abgeschlossenen Halbhyperebenen besteht, die eine feste zu T windschiefe Gerade G schneiden. Zur Beschreibung dieses Halbbüschels wählen wir einen Ursprung $O \in T$, Basisvektoren Z_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, n-1)$ des

[1]) Vgl. etwa BONNESEN-FENCHEL [3] S. 88—91, wo anschließend ein Literaturüberblick zu finden ist.

[2]) Dieser Beweis ist auch bei HADWIGER [5] Kap. 5 aufgenommen.

Trägers T und eine Parameterdarstellung[3]) $X_\lambda = X_0 + \lambda L$ der Geraden G. Die vom Träger T und einem festen Punkt X_λ aufgespannte Halbhyperebene des Halbbüschels werde mit H_λ bezeichnet.

Für zwei Mengen $A \subset H_{\lambda_0}$, $B \subset H_{\lambda_1}$ $(\lambda_0 \neq \lambda_1)$ und eine reelle Zahl $0 \leqq t \leqq 1$ werde die *harmonische Linearkombination* $[A, B]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}$ als Menge aller Punkte von $H_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}$ erklärt, die auf Verbindungsstrecken je eines Punktes aus A und B liegen. Im Spezialfall zweier Mengen, die den Träger T nicht schneiden, hat die harmonische Linearkombination die Gestalt

$$[A, B]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1} = \left\{ \frac{1}{(1-t)x^{-1} + t\bar{x}^{-1}} X_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1} + \frac{(1-t)x^{-1}z^\varrho + t\bar{x}^{-1}\bar{z}^\varrho}{(1-t)x^{-1} + t\bar{x}^{-1}} Z_\varrho \right\},$$

wenn $xX_{\lambda_0} + z^\varrho Z_\varrho$ alle Punkte von A und $\bar{x}X_{\lambda_1} + \bar{z}^\varrho Z_\varrho$ alle Punkte von B durchläuft. Im allgemeinen Fall lassen sich nur die nicht zum Träger gehörenden Punkte der harmonischen Linearkombination in der angegebenen Weise darstellen.

Für die verschiedenen Ebenen in dem Halbbüschel wollen wir Lebesguesche Maße durch Auszeichnung eines Parallelotops als Maßeinheit einführen. Im Träger T und allen dazu parallelen $(n-1)$-dimensionalen Ebenen werde das Maß $|\ |_{n-1}$ auf das von den Vektoren $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ aufgespannte Parallelotop bezogen. Entsprechend soll in den einzelnen Halbhyperebenen H_λ das von X_λ, $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ gebildete Parallelotop als Einheit für das Maß $|\ |_n$ dienen. Es sei bemerkt, daß für die Vektoren X_λ die Relation

$$X_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1} = (1-t)\, X_{\lambda_0} + t X_{\lambda_1}$$

besteht.

Nun gilt der

Busemannsche Satz: *$A \subset H_{\lambda_0}$, $B \subset H_{\lambda_1}$ seien kompakte Mengen positiven n-Maßes in verschiedenen Halbhyperebenen eines Halbbüschels. Für eine Zahl t mit $0 < t < 1$ ist dann das Defizit*

$$(1) \qquad p_t(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} |[A, B]_{(1-t)\lambda_0 + t\lambda_1}|_n - ((1-t)|A|_n^{-1} + t|B|_n^{-1})^{-1} \geqq 0\,.$$

Dabei steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn A und B bis auf Punkte des Trägers T konvexe Körper sind, die durch Parallelprojektion auseinander hervorgehen.

In den weiteren Ausführungen, die dem Beweis dieses Satzes gewidmet sind, setzen wir zur Vereinfachung $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_1 = 1$. Dies kann stets durch eine affine Transformation des Parameters auf der Geraden G erreicht werden und stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar[4]).

2. Eigenschaften der harmonischen Linearkombination

Wir betrachten zwei Mengen $A \subset H_0$ und $B \subset H_1$ positiven n-Maßes in verschiedenen Halbhyperebenen eines Halbbüschels. Für eine den Träger T nicht enthaltende Hyperebene E des R^{n+1} bezeichne E' bzw. E'' die beiden

---

[3]) Im Ursprung O abgetragene Vektoren identifizieren wir mit ihren Endpunkten.

[4]) Man vgl. auch die Bemerkung über eine äquivalente Erzeugung eines Halbbüschels in [1] S. 409.

von E berandeten abgeschlossenen Halbräume. Setzen wir

$$A' \overset{\text{def}}{=} A \cap E', A'' \overset{\text{def}}{=} A \cap E'' \quad \text{und} \quad B' \overset{\text{def}}{=} B \cap E', B'' \overset{\text{def}}{=} B \cap E'',$$

so gilt

$$|A|_n = |A'|_n + |A''|_n \quad \text{und} \quad |B|_n = |B'|_n + |B''|_n .$$

Wir sagen, die Hyperebene E erzeugt eine *maßtreue Zerlegung* von A und B, wenn

$$\frac{|A'|_n}{|A|_n} = \frac{|B'|_n}{|B|_n}$$

ist.

Hilfssatz 1: *Bei maßtreuer Zerlegung von $A \subset H_0$ und $B \subset H_1$ in Mengen positiven n-Maßes gilt für die Defizite*

$$p_t(A, B) \geqq p_t(A', B') + p_t(A'', B''), \qquad (0 < t < 1).$$

Beweis: Zunächst folgt aus

$$[A, B]_t \supset [A', B']_t \cup [A'', B'']_t$$

die Ungleichung

$$(2) \qquad |[A, B]_t|_n \geqq |[A', B']_t|_n + |[A'', B'']_t|_n ,$$

da der Durchschnitt

$$[A', B']_t \cap [A'', B'']_t \subset H_t \cap E$$

und daher eine Nullmenge in H_t ist. Andererseits haben wir nach Voraussetzung

$$|B|_n = v\,|A|_n, \; |B'|_n = v\,|A'|_n, \; |B''|_n = v\,|A''|_n ,$$

so daß

$$\begin{aligned} ((1-t)\,|A|_n^{-1} + t\,|B|_n^{-1})^{-1} &= |A|_n (1 - t + tv^{-1})^{-1} \\ &= (|A'|_n + |A''|_n)\,(1 - t + tv^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} ((1-t)\,|A|_n^{-1} + t\,|B|_n^{-1})^{-1} = {}& ((1-t)\,|A'|_n^{-1} + t\,|B'|_n^{-1})^{-1} + \\ &+ ((1-t)\,|A''|_n^{-1} + t\,|B''|_n^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

ist. Daraus gewinnt man mit der Ungleichung (2) die Behauptung.

Hilfssatz 2: *$A_i \subset H_0 - T$ und $B_i \subset H_1 - T$ $(i = 1, 2, \ldots)$ seien zwei fallende Folgen kompakter Mengen. Dann ist $[A_i, B_i]_t \subset H_t - T$ eine fallende Folge kompakter Mengen mit*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [A_i, B_i]_t = \left[\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right]_t, \qquad (0 < t < 1).$$

Beweis: Nach Definition der harmonischen Linearkombination ist $[A_i, B_i]_t \subset H_t - T$ eine fallende Folge kompakter Mengen mit

$$\bigcap_i [A_i, B_i]_t \supset \left[\bigcap_i A_i, \bigcap_i B_i\right]_t .$$

Andererseits läßt sich ein Punkt $R \in \bigcap_i [A_i, B_i]_t$ in der Form

$$(4) \qquad R = \frac{1}{(1-t)\,x_i^{-1} + t\,\bar{x}_i^{-1}}\, X_i + \frac{(1-t)\,x_i^{-1} z_i^0 + t\,\bar{x}_i^{-1} \bar{z}_i^0}{(1-t)\,x_i^{-1} + t\,\bar{x}_i^{-1}}\, Z_0$$

mit $P_i = x_i X_0 + z_i^\varrho Z_\varrho \in A_i$ und $Q_i = \bar{x}_i X_1 + \bar{z}_i^\varrho Z_\varrho \in B_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ darstellen. Zu einem Häufungspunkt P der Folge P_i existiert eine Teilfolge $P_{i'} \to P$. Wäre $P \in H_0 - A_j$, so läge P in einer bezüglich H_0 offenen Menge, die keinen der Punkte $P_{i'}$, mit $i' \geqq j$ enthält. Weil dies nicht möglich ist, muß $P \in \bigcap_i A_i$ sein. Zu einem Häufungspunkt Q der entsprechenden Teilfolge $Q_{i'}$ gibt es nun wieder eine Teilfolge $Q_{i''} \to Q \in \bigcap_i B_i$. Dann folgt aber aus (4) für $i'' \to \infty$

$$R = [P, Q]_t \in \left[\bigcap_i A_i, \bigcap_i B_i\right]_t,$$

was die Behauptung beweist.

Hilfssatz 3: *Für eine konvexe Menge $A \subset H_{\lambda_0}$, eine beliebige Menge $B \subset H_{\lambda_1}$ und $0 < r, s < 1$ gilt*

$$[A, [A, B]_{(1-s)\lambda_0 + s\lambda_1}]_{(1-r)\lambda_0 + r((1-s)\lambda_0 + s\lambda_1)} = [A, B]_{(1-rs)\lambda_0 + rs\lambda_1}.$$

Beweis: Es genügt, die Behauptung für $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_1 = 1$, also die Gleichung

$$[A, [A, B]_s]_{rs} = [A, B]_{rs}$$

zu beweisen. Ein Punkt $R \in [A, B]_{rs}$ liegt auf der Verbindungsstrecke von Punkten $P \in A$ und $Q \in B$. Da diese Verbindungsstrecke H_s in einem Punkt $S \in [A, B]_s$ schneidet, gehört R auch zur Verbindungsstrecke von P und S, also zu $[A, [A, B]_s]_{rs}$. Umgekehrt liegt ein Punkt $R \in [A, [A, B]_s]_{rs}$ auf der Verbindungsstrecke von Punkten $P \in A$ und $S \in [A, B]_s$. S wiederum liegt auf der Verbindungsstrecke von Punkten $P_1 \in A$ und $Q \in B$. Dann schneidet aber die Gerade durch Q und R die Verbindungsstrecke von P und P_1 in P_2. Wegen der Konvexität von A gehört R zur Verbindungsstrecke der Punkte $P_2 \in A$ und $Q \in B$, also zu $[A, B]_{rs}$.

3. Beweis der Ungleichung

Die Busemannsche Ungleichung (1) soll zunächst unter verschiedenen Einschränkungen bewiesen werden.

In einer Halbhyperebene H_λ werde ein *spezieller Kegelstumpf* K definiert als Durchschnitt eines Kegels mit der Spitze O und eines Parallelstreifens $\{x X_\lambda + z^\varrho Z_\varrho \mid 0 < k_0 \leqq x \leqq k_1\}$. K ist also vollständig bestimmt durch die x-Koordinaten $k_0 < k_1$ seiner Grundflächen und die große Grundfläche K_1 selbst.

Hilfssatz 4: *$A \subset H_0$ und $B \subset H_1$ seien zwei spezielle Kegelstümpfe, gegeben durch*

$$a_0 < a_1 \quad \textit{und} \quad A_1 \quad \textit{bzw.} \quad b_0 < b_1 \quad \textit{und} \quad B_1.$$

Für $0 < t < 1$ ist dann $[A, B]_t \subset H_t$ wieder ein spezieller Kegelstumpf mit den Bestimmungsstücken

$$m_0 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{(1-t)a_0^{-1} + t b_0^{-1}} < m_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{(1-t)a_1^{-1} + t b_1^{-1}} \quad \textit{und} \quad M_1 \overset{\text{def}}{=} (1-\xi)A_1 + \xi B_1,$$

wobei in der Minkowski-Summe die Koeffizienten

$$1 - \xi = (1-t)a_1^{-1} m_1 \quad \textit{und.} \quad \xi = t b_1^{-1} m_1$$

auftreten.

Beweis: Der in H_t durch $m_0 < m_1$ und M_1 gegebene spezielle Kegelstumpf ist natürlich in $[A, B]_t$ enthalten und diese Menge wiederum im Parallelstreifen $\{xX_t + z^{\varrho}Z_{\varrho} \mid m_0 \leqq x \leqq m_1\}$. Umgekehrt liegt ein Punkt $R \in [A, B]_t$ auf der Verbindungsstrecke zweier Punkte $P \in A$ und $Q \in B$. Der Strahl von O durch P treffe die große Grundfläche von A in $P_1 \in A_1$ und entsprechend der Strahl von O durch Q die große Grundfläche von B in $Q_1 \in B_1$. Dann liegt aber R auf dem Strahl von O durch $(1 - \xi) P_1 + \xi Q_1 \in (1 - \xi) A_1 + \xi B_1$, in dem die Halbhyperebene H_t von der Ebene durch O, P, Q geschnitten wird.

Hilfssatz 5: *Für zwei spezielle Kegelstümpfe $A \subset H_0$ und $B \subset H_1$, die positives n-Maß haben, und $0 < t < 1$ ist $p_t(A, B) \geqq 0$.*

Beweis: Wir übernehmen die Bezeichnungen des letzten Hilfssatzes. Dann sind die n-Maße der beiden speziellen Kegelstümpfe

$$|A|_n = \frac{1}{n} a_1 \left(1 - \frac{a_0^n}{a_1^n}\right) |A_1|_{n-1} \quad \text{und} \quad |B|_n = \frac{1}{n} b_1 \left(1 - \frac{b_0^n}{b_1^n}\right) |B_1|_{n-1}.$$

Für das n-Maß ihrer harmonischen Linearkombination führen wir die folgenden Abschätzungen durch:

$$\begin{aligned} |[A, B]_t|_n &= \frac{1}{n} m_1 \left(1 - \frac{m_0^n}{m_1^n}\right) |M_1|_{n-1} \\ &= \frac{1}{n} m_1 \left(1 - \{(1 - t) a_0^{-1} m_1 + t\, b_0^{-1} m_1\}^{-n}\right) |M_1|_{n-1} \\ &= \frac{1}{n} m_1 \left(1 - \left\{(1 - \xi) \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^{-1} + \xi \left(\frac{b_0}{b_1}\right)^{-1}\right\}^{-n}\right) |M_1|_{n-1}. \end{aligned}$$

Wendet man zuerst auf die geschweifte Klammer die Jensensche Ungleichung[5]) mit $r = -1$ und $s = n$ an, so folgt

$$\begin{aligned} &\geqq \frac{1}{n} m_1 \left(1 - \left\{(1 - \xi) \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^n + \xi \left(\frac{b_0}{b_1}\right)^n\right\}\right) |M_1|_{n-1} \\ &= \frac{1}{n} m_1 \left((1 - \xi) \left(1 - \frac{a_0^n}{a_1^n}\right) + \xi \left(1 - \frac{b_0^n}{b_1^n}\right)\right) |M_1|_{n-1} \\ &= \left(\frac{(1 - \xi)^2}{1 - t} |A|_n\, |A_1|_{n-1}^{-1} + \frac{\xi^2}{t} |B|_n\, |B_1|_{n-1}^{-1}\right) |M_1|_{n-1}. \end{aligned}$$

Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für die Grundfläche $M_1 = (1 - \xi) A_1 + \xi B_1$ liefert die zweite Abschätzung

$$\geqq \left(\frac{(1 - \xi)^2}{1 - t} |A|_n\, |A_1|_{n-1}^{-1} + \frac{\xi^2}{t} |B|_n\, |B_1|_{n-1}^{-1}\right) \left((1 - \xi)\, |A_1|_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} + \xi\, |B_1|_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1},$$

---

[5]) Es seien v, w zwei positive Zahlen und $0 < \vartheta < 1$. Dann ist für von Null verschiedene Zahlen $r < s$ stets

$$\{(1 - \vartheta) v^r + \vartheta w^r\}^{1/r} \leqq \{(1 - \vartheta) v^s + \vartheta w^s\}^{1/s}.$$

Vgl. etwa Hardy-Littlewood-Pólya [7], S. 26 Theorem 16.

und eine identische Umformung beider Klammern ergibt

$$= \Bigg[(1-\xi)\left(\frac{1-\xi}{1-t}|A|_n\right)^{\frac{1}{n}}\left\{|A_1|_{n-1}\left(\frac{1-\xi}{1-t}|A|_n\right)^{\frac{1-n}{n}}\right\}^{-1} + \\ + \xi\left(\frac{\xi}{t}|B|_n\right)^{\frac{1}{n}}\left\{|B_1|_{n-1}\left(\frac{\xi}{t}|B|_n\right)^{\frac{1-n}{n}}\right\}^{-1}\Bigg] \times$$

$$\times \Bigg[(1-\xi)\left(\frac{1-\xi}{1-t}|A|_n\right)^{\frac{1}{n}}\left\{|A_1|_{n-1}\left(\frac{1-\xi}{1-t}|A|_n\right)^{\frac{1-n}{n}}\right\}^{\frac{1}{n-1}} + \\ + \xi\left(\frac{\xi}{t}|B|_n\right)^{\frac{1}{n}}\left\{|B_1|_{n-1}\left(\frac{\xi}{t}|B|_n\right)^{\frac{1-n}{n}}\right\}^{\frac{1}{n-1}}\Bigg]^{n-1}.$$

Nun wenden wir die Jensensche Ungleichung[5]) mit $r = -1$ und $s = \dfrac{1}{n-1}$ an und erhalten als dritte Abschätzung

$$\geqq \left((1-\xi)\left(\frac{1-\xi}{1-t}|A|_n\right)^{\frac{1}{n}} + \xi\left(\frac{\xi}{t}|B|_n\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n.$$

Benutzt man abermals die Jensensche Ungleichung mit $r = -1$ und $s = \dfrac{1}{n}$, so ergibt sich bei dieser vierten Abschätzung schließlich

$$\geqq ((1-t)\,|A|_n^{-1} + t\,|B|_n^{-1})^{-1}.$$

Damit haben wir das gewünschte Resultat gewonnen[6]).

Jetzt betrachten wir spezielle Kegelstümpfe, bei denen die großen Grundflächen $(n-1)$-dimensionale abgeschlossene Parallelotope sind, deren Kanten parallel zu den Vektoren $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ liegen. Wir wollen dann kurz von *speziellen Pyramidenstümpfen* sprechen.

Hilfssatz 6: *$A \subset H_0$ und $B \subset H_1$ seien jeweils Vereinigungen endlich vieler spezieller Pyramidenstümpfe, die sich höchstens in $(n-1)$-dimensionalen Seitenflächen berühren. Für $0 < t < 1$ ist dann $p_t(A, B) \geqq 0$.*

Beweis: A bestehe aus $l(A)$ und B aus $l(B)$ speziellen Pyramidenstümpfen. Wir beweisen die Ungleichung durch vollständige Induktion nach $l = l(A) + l(B)$. Für $l = 2$ ist die Behauptung im Hilfssatz 5 enthalten. Wir nehmen nun an, die Ungleichung sei für alle l mit $2 \leqq l < l_0$ richtig und es liege ein Fall $l = l_0$ vor. Dann kann man durch eine Hyperebene E, die entweder parallel zu T ist oder durch O geht und parallel zu $n-2$ der Vektoren Z_ϱ ist, eine maßtreue Zerlegung von A und B erzeugen, so daß $l' = l(A') + l(B') < l_0$ und $l'' = l(A'') + l(B'') < l_0$ gilt. Man braucht dazu nur E so zu wählen, daß zwei spezielle Pyramidenstümpfe bei einer der Mengen A oder B getrennt werden. Nach Hilfssatz 1 und Induktionsvoraussetzung folgt

$$p_t(A, B) \geqq p_t(A', B') + p_t(A'', B'') \geqq 0\,,$$

womit die Ungleichung für $l = l_0$ bewiesen ist.

---

[6]) Die zweite bis vierte Abschätzung führt Busemann in seinem analytischen Beweis [4] in ähnlicher Weise für ein Integral durch.

Hilfssatz 7: *Für kompakte Mengen $A \subset H_0$ und $B \subset H_1$, die positives n-Maß haben und den Träger T nicht schneiden, und $0 < t < 1$ ist $p_t(A, B) \geqq 0$.*

Beweis: Für eine feste ganze Zahl $i \geqq 0$ werde jede der beiden Halbhyperebenen H_0 und H_1 des Halbbüschels durch die Punkte

$$\frac{j}{2^i}\left(X_0 + \frac{j^\varrho}{2^i} Z_\varrho\right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{j}{2^i}\left(X_1 + \frac{j^\varrho}{2^i} Z_\varrho\right) \quad \text{mit} \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\text{und} \quad j^\varrho = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

in ein Netz spezieller Pyramidenstümpfe und Pyramiden der „Maschenweite" $\frac{1}{2^i}$ zerlegt. Für die Menge $A \subset H_0$ sei A_i die Vereinigung aller Pyramidenstümpfe und Pyramiden des Netzes in H_0, die mit A wenigstens einen Punkt gemeinsam haben. Analog werde B_i definiert. Da A und B kompakt und zu T fremd sind, bestehen A_i und B_i für $i \geqq i_0$ nur aus endlich vielen Pyramidenstümpfen des entsprechenden Netzes. Wir erhalten zwei fallende Folgen $A_i \subset H_0 - T$ und $B_i \subset H_1 - T$ $(i = i_0, i_0 + 1, \ldots)$ kompakter Mengen mit

$$\bigcap_{i=i_0}^{\infty} A_i \supset A \quad \text{und} \quad \bigcap_{i=i_0}^{\infty} B_i \supset B .$$

Ein Punkt P aus der bezüglich H_0 offenen Menge $(H_0 - T) - A$ liegt bei einem Netz hinreichend feiner Maschenweite $\frac{1}{2^{i_1}}$ im Innern einer Vereinigung von höchstens 2^n Pyramidenstümpfen, die ganz in $(H_0 - T) - A$ enthalten ist. Weil dann $P \in (H_0 - T) - A_{i_1} \subset (H_0 - T) - \bigcap_i A_i$ gilt, haben wir sogar

$$\bigcap_{i=i_0}^{\infty} A_i = A \quad \text{und ebenso} \quad \bigcap_{i=i_0}^{\infty} B_i = B .$$

Nach Hilfssatz 2 ist auch $[A_i, B_i]_t$ $(i = i_0, i_0 + 1, \ldots)$ eine fallende Folge kompakter Mengen mit

$$\bigcap_{i=i_0}^{\infty} [A_i, B_i]_t = [A, B]_t .$$

Für die n-Maße folgt daraus

$$|A_i|_n \to |A|_n, \quad |B_i|_n \to |B|_n, \quad |[A_i, B_i]_t|_n \to |[A, B]_t|_n .$$

Dann konvergiert aber

$$p_t(A_i, B_i) \to p_t(A, B) \geqq 0 ,$$

weil nach Hilfssatz 6 bereits alle $p_t(A_i, B_i) \geqq 0$ sind.

Nach diesen vorbereitenden Hilfssätzen können wir die Ungleichung des Busemannschen Satzes in ihrer allgemeinen Form beweisen.

Satz: *Für kompakte Mengen $A \subset H_0$ und $B \subset H_1$ positiven n-Maßes und $0 < t < 1$ ist $p_t(A, B) \geqq 0$.*

Beweis: In den beiden Halbhyperebenen H_0 und H_1 konstruieren wir jeweils die wachsenden Folgen kompakter Mengen

$$A_i \overset{\text{def}}{=} A \cap \left\{x X_0 + z^\varrho Z_\varrho \mid x \geqq \frac{1}{i}\right\} \quad \text{bzw.} \quad B_i \overset{\text{def}}{=} B \cap \left\{\bar{x} X_1 + \bar{z}^\varrho Z_\varrho \mid \bar{x} \geqq \frac{1}{i}\right\},$$

die etwa für $i = i_0, i_0 + 1, \ldots$ positives n-Maß haben. Wegen

$$\bigcup_{i=i_0}^{\infty} A_i = A - T \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=i_0}^{\infty} B_i = B - T$$

unterscheiden sich $\bigcup_i A_i$ und A bzw. $\bigcup_i B_i$ und B nur um Nullmengen, so daß

$$|A_i|_n \to \Big|\bigcup_j A_j\Big|_n = |A|_n \quad \text{und} \quad |B_i|_n \to \Big|\bigcup_j B_j\Big|_n = |B|_n$$

konvergiert. Andererseits ist unter Benutzung von Hilfssatz 7

$$|[A, B]_t|_n \geqq |[A_i, B_i]_t|_n \geqq ((1-t)\,|A_i|_n^{-1} + t\,|B_i|_n^{-1})^{-1},$$

woraus wir für $i \to \infty$ die Behauptung

$$|[A, B]_t|_n \geqq ((1-t)\,|A|_n^{-1} + t\,|B|_n^{-1})^{-1}$$

gewinnen.

4. Beweis der Gleichheitsbedingung

Der Nachweis für die Bedingung der Gleichheit in der Busemannschen Ungleichung (1) soll ebenfalls in mehreren Schritten durchgeführt werden.

Hilfssatz 8: *Für einen Punkt $P \in H_0 - T$ und eine kompakte Menge $B \subset H_1 - T$ positiven n-Maßes ist auch* $|[P, B]_t|_n > 0$, $(0 < t < 1)$.

Beweis: P habe die x-Koordinate $a > 0$. Sei zunächst B ein spezieller Kegelstumpf, der durch $b_0 < b_1$ und B_1 gegeben ist, so folgt nach der ersten Abschätzung des Hilfssatzes 5 mit der dort benutzten Bezeichnungsweise

$$\begin{aligned}|[P, B]_t|_n &\geqq \frac{1}{n} m_1 \xi \left(1 - \left(\frac{b_0}{b_1}\right)^n\right) \xi^{n-1} |B_1|_{n-1} \\ &= |B|_n t^n (b_1^{-1} m_1)^{n+1} \\ &\geqq |B|_n \frac{t^n}{((1-t)a^{-1}c + t)^{n+1}} \quad \text{für} \quad b_1 \leqq c\,.\end{aligned}$$

Dabei wählen wir die Konstante c für das Folgende hinreichend groß. Es gibt also eine nur von den festen Größen t, a, c abhängige Konstante $k > 0$, so daß

$$|[P, B]_t|_n \geqq k \cdot |B|_n \tag{5}$$

ist. Sei jetzt B die Vereinigung endlich vieler spezieller Pyramidenstümpfe, die sich höchstens in $(n-1)$-dimensionalen Seitenflächen berühren, so gilt wegen $[P, \bigcup B_i]_t = \bigcup\, [P, B_i]_t$ ebenfalls die Ungleichung (5). Schließlich kann zu einer kompakten Menge $B \subset H_1 - T$ wie beim Beweis des Hilfssatzes 7 eine fallende Folge B_i von Mengen der eben betrachteten Art mit $B = \bigcap B_i$ konstruiert werden. Wegen $[P, \bigcap B_i]_t = \bigcap\, [P, B_i]_t$ gilt auch dann noch die Ungleichung (5), aus der nun sofort die Behauptung folgt.

Eine Menge $M \subset H_\lambda$ heiße *separierbar*, wenn es eine Hyperebene E mit

$$M \cap E = \theta, \quad M' = M \cap E' \neq \theta, \quad M'' = M \cap E'' \neq \theta$$

gibt. Dabei bezeichnen E' und E'' wieder die beiden von E berandeten abgeschlossenen Halbräume. Ein Punkt R einer n-meßbaren Menge $M \subset H_\lambda$ heiße *maßverbunden*, wenn für jedes n-dimensionale achsenparallele Par-

allelotop W in der von H_λ aufgespannten Hyperebene, das den Mittelpunkt R hat, $|M \cap W|_n > 0$ ist. Die Vereinigung aller maßverbundenen Punkte von M heißt *Maßkern* M_0. Für ihn gilt

$$|M|_n = |M_0|_n .$$

Mit M ist auch M_0 kompakt.

Hilfssatz 9: *Für kompakte Mengen $A \subset H_0$ und $B \subset H_1$ positiven n-Maßes sei $A - T$ separierbar und $B_0 \cap T = \theta$. Dann gilt $p_t(A, B) > 0$, $(0 < t < 1)$.*

Beweis: Wir können die $A - T$ separierende Hyperebene E so legen, daß E eine maßtreue Zerlegung von A und B erzeugt und B in einem maßverbundenen Punkt Q trifft. Dann gibt es zwei Stützhyperebenen E_1 an A' und E_2 an A'', so daß

$$E_1 \cap H_1 = E_2 \cap H_1 = E \cap H_1$$

ist und im Innern des von E_1 und E_2 gebildeten Winkelraumes, der E enthält, keine Punkte von A liegen. Für zwei Punkte $P' \in A' \cap E_1 - T$, $P'' \in A'' \cap \cap E_2 - T$ und ein genügend kleines n-dimensionales achsenparalleles Parallelotop W mit Mittelpunkt Q ist nun

$$[A, B]_t \supset [A', B']_t \cup [A'', B'']_t \cup [P', B'' \cap W]_t \cup [P'', B' \cap W]_t .$$

Die Durchschnitte je zweier der rechts stehenden Teilmengen von $[A, B]_t$ sind nach Konstruktion Nullmengen in H_t, also folgt

$$|[A, B]_t|_n \geqq |[A', B']_t|_n + |[A'', B'']_t|_n + |[P', B'' \cap W]_t|_n + |[P'', B' \cap W]_t|_n .$$

Weil $Q \in B_0$ sein sollte, also $|B \cap W|_n > 0$ ist, muß nach Hilfssatz 8 wenigstens eine der Mengen $[P', B'' \cap W]_t$ und $[P'', B' \cap W]_t$ positives n-Maß haben. Dann folgt aber

$$|[A, B]_t|_n > |[A', B']_t|_n + |[A'', B'']_t|_n . \tag{6}$$

Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden. Haben A' und A'' beide positives n-Maß, so erhalten wir aus (6), (3) und der Busemannschen Ungleichung (1)

$$p_t(A, B) > p_t(A', B') + p_t(A'', B'') \geqq 0 .$$

Ist dagegen etwa A'' eine Nullmenge, so muß

$$|A|_n = |A'|_n \quad \text{und} \quad |B|_n = |B'|_n$$

sein. In diesem Fall folgt aus

$$|[A, B]_t|_n > |[A', B']_t|_n$$

ebenfalls

$$p_t(A, B) > p_t(A', B') \geqq 0 .$$

Hilfssatz 10: *Für kompakte Mengen $A \subset H_0$ und $B \subset H_1$ positiven n-Maßes möge bei einer maßtreuen Zerlegung auch $|A'|_n > 0$ sein. Dann ist*

$$p_t(A, B) \geqq p_t(A', B'), \quad (0 < t < 1) . \tag{7}$$

Insbesondere folgt aus $p_t(A, B) = 0$ auch $p_t(A', B') = 0$.

Beweis: Ist auch $|A''|_n > 0$, so erhalten wir nach Hilfssatz 1 und der Busemannschen Ungleichung (1) die Behauptung. Anderenfalls ist $|A|_n = |A'|_n$

und $|B|_n = |B'|_n$, was zusammen mit $|[A, B]_t|_n \geqq |[A', B']_t|_n$ dasselbe Resultat liefert.

Hilfssatz 11: *Für kompakte Mengen $A \subset H_0$ und $B \subset H_1$ positiven n-Maßes und eine Zahl t mit $0 < t < 1$ sei*

$$A_0 \cap T = B_0 \cap T = \theta \quad \textit{und} \quad p_t(A, B) = 0 .$$

Dann müssen $A - T$ und $B - T$ konvexe Körper sein.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, der Maßkern A_0 sei nicht konvex. Dann gäbe es zwei maßverbundene Punkte P_1, $P_2 \in A_0$, auf deren Verbindungsstrecke ein nicht zu A_0 gehörender Punkt P_3 liegt. In dem bezüglich H_0 offenen Komplement $H_0 - A_0$ kann man ein n-dimensionales Prisma konstruieren, das P_3 im Innern enthält, dessen Grundfläche ein $(n-1)$-dimensionales Simplex ist und dessen Erzeugenden parallel zur Verbindungsstrecke von P_1 und P_2 verlaufen. Mittels Hyperebenen durch die Mantelseiten dieses Prismas führen wir, von A_0 und B ausgehend, nacheinander n maßtreue Zerlegungen durch. Sie liefern ein Paar von Teilmengen $A^* \subset A_0$ und $B^* \subset B$ positiven n-Maßes, bei dem A^* von einer durch P_3 gehenden und parallel zur Prismengrundfläche liegenden Hyperebene separiert wird. Nach (7) und Hilfssatz 9 folgt dann

$$p_t(A_0, B) \geqq p_t(A^*, B^*) > 0 .$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung, da wegen $|A|_n = |A_0|_n$ und der Busemannschen Ungleichung (1)

$$p_t(A, B) = p_t(A_0, B) = 0$$

gilt. Also ist A_0 konvex. Schließlich müssen wir noch zeigen, daß $A - T = A_0$ ist. Gäbe es einen Punkt $P \in (A - T) - A_0$, so wäre wieder wegen $|A|_n = |A_0 \cup \{P\}|_n$

$$p_t(A, B) = p_t(A_0 \cup \{P\}, B) = 0 .$$

Da jedoch $A_0 \cup \{P\}$ separierbar ist, entsteht abermals ein Widerspruch zu Hilfssatz 9. — Wegen der Symmetrie in den Voraussetzungen muß nun auch $B - T$ ein konvexer Körper sein.

Hilfssatz 12: *Für konvexe Körper $A \subset H_0$ und $B \subset H_1$ positiven n-Maßes und* eine *Zahl t mit $0 < t < 1$ sei $p_t(A, B) = 0$. Dann gilt diese Gleichung für* alle *jene Zahlen t.*

Beweis: Zu jeder Zahl s mit $t < s < 1$ ist $0 < r \overset{\text{def}}{=} \frac{t}{s} < 1$. Nach Hilfssatz 3 und der Busemannschen Ungleichung (1) gilt dann

$$\begin{aligned} |[A, B]_t|_n &= |[A, [A, B]_s]_{r s}|_n \\ &\geqq ((1-r)\,|A|_n^{-1} + r\,|[A, B]_s|_n^{-1})^{-1} \\ &\geqq ((1-r)\,|A|_n^{-1} + r(1-s)\,|A|_n^{-1} + r\,s\,|B|_n^{-1})^{-1} \\ &= ((1-t)\,|A|_n^{-1} + t\,|B|_n^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung $p_t(A, B) = 0$ besteht aber in dieser Ungleichung überall Gleichheit, insbesondere muß also $p_s(A, B) = 0$ sein. Aus Symmetrie-

gründen steht dann in der Busemannschen Ungleichung sogar für alle t mit $0 < t < 1$ das Gleichheitszeichen.

Hilfssatz 13: *$A = (P_1, \ldots, P_{n+1}) \subset H_0 - T$ sei ein abgeschlossenes Simplex, dessen Ecken $P_2, \ldots, P_{n+1}$ eine zu T parallele $(n-1)$-dimensionale Ebene aufspannen und dessen Ecke P_1 zwischen dieser Ebene und T liegt. $B \subset H_1 - T$ sei ein konvexer Körper positiven n-Maßes, und für ein t mit $0 < t < 1$ gelte $p_t(A, B) = 0$. Dann ist B ein Simplex, das aus A durch Parallelprojektion hervorgeht.*

Beweis: E_i sei die durch die Simplexseite $S_i \overset{\text{def}}{=} (P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_{n+1})$ gehende Hyperebene, die A und B von derselben Seite stützt. Die Gerade $\bigcap_{i=2}^{n+1} E_i$ definiert dann eine Parallelprojektion π von H_0 auf H_1. Zu dem Simplex $\pi(A) \subset H_1 - T$ konstruieren wir durch eine Homothetie h mit dem Zentrum $\pi(P_1)$ und dem Faktor $h > 0$ ein B umbeschriebenes Simplex $h\pi(A)$. Wir wählen jeweils einen Berührungspunkt $Q_i \in B \cap E_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ von B mit den Seiten von $h\pi(A)$ und bezeichnen mit (Q, Q_i) die Verbindungsstrecke von Q_i und einem beliebigen Punkt $Q \in B$. Dann gilt

$$[A, B]_t \supset [A, Q]_t \cup \bigcup_{i=2}^{n+1} [S_i, (Q, Q_i)]_t \,.$$

Weil die Durchschnitte je zweier der rechts stehenden Teilmengen von $[A, B]_t$ höchstens in $(n-1)$-dimensionalen Ebenen von H_t liegen, folgt

$$|[A, B]_t|_n \geqq |[A, Q]_t|_n + \sum_{i=2}^{n+1} |[S_i, (Q, Q_i)]_t|_n \,. \tag{8}$$

Andererseits ist wegen $h\pi(A) \supset B$ und der Voraussetzung $p_t(A, B) = 0$ auch

$$((1-t)\,|A|_n^{-1} + t\,|h\pi(A)|_n^{-1})^{-1} \geqq ((1-t)\,|A|_n^{-1} + t\,|B|_n^{-1})^{-1} = |[A, B]_t|_n \,. \tag{9}$$

Nach Hilfssatz 12 gilt diese Ungleichung für alle t mit $0 < t < 1$; für das Folgende können wir deshalb t immer als hinreichend klein annehmen. Wir wenden uns jetzt der Berechnung der in (9) links und in (8) rechts stehenden Maße zu. Setzen wir für $i = 1, \ldots, n+1$

$$P_i = x_i X_0 + z_i^\varrho Z_\varrho \quad \text{mit} \quad 0 < x_1 < x_2 = \cdots = x_{n+1} \,,$$

so können wir ohne Einschränkung

$$\pi(P_i) = c\,x_i X_1 + z_i^\varrho Z_\varrho \quad \text{mit} \quad c > 0$$

annehmen. Dann ist

$$h\pi(P_i) = c((1-h)\,x_1 + h\,x_i)X_1 + ((1-h)z_1^\varrho + h z_i^\varrho)Z_\varrho \,,$$

woraus wir die Darstellung

$$\begin{aligned} Q_i &= \bar{x}_i X_1 + \bar{z}_i^\varrho Z_\varrho \\ &= c\left((1-h)\,x_1 + h \sum_{j=1}^{n+1} \vartheta_{ij} x_j\right) X_1 + \left((1-h) z_1^\varrho + h \sum_{j=1}^{n+1} \vartheta_{ij} z_j^\varrho\right) Z_\varrho \end{aligned} \tag{10}$$

mit $0 \leqq \vartheta_{ij} \leqq 1$, $\vartheta_{ii} = 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \vartheta_{ij} = 1$ gewinnen. Schließlich setzen wir noch

$$Q = \bar{x} X_1 + \bar{z}^\varrho Z_\varrho .$$

Zunächst ergeben sich unmittelbar die Maße

$$|A|_n = \frac{1}{n} |\det(x_i, z_i^1, \ldots, z_i^{n-1}, 1)| ,$$

$$|h\pi(A)|_n = h^n |\pi(A)|_n = h^n c |A|_n .$$

Da $[A, Q]_t$ das Simplex mit den Ecken $[P_i, Q]_t$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ ist, folgt weiter

$$\begin{aligned} |[A, Q]_t|_n &= \frac{1}{n} \left| \det \left(\frac{\bar{x} x_i}{(1-t)\bar{x} + t x_i}, \frac{(1-t)\bar{x} z_i^\varrho + t x_i \bar{z}^\varrho}{(1-t)\bar{x} + t x_i}, 1 \right) \right| \\ &= \frac{(1-t)^n \bar{x}^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n+1} ((1-t)\bar{x} + t x_i)} |A|_n \\ &= \left\{ 1 + t \left(1 - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{\bar{x}} \right) + O(t^2) \right\} |A|_n . \end{aligned}$$

Zur Berechnung der restlichen Maße wählen wir $Q \in B$ vorerst so, daß die Verbindungsgeraden von Q und Q_i den Träger T jeweils in einem Punkt R_i treffen. Für jeden Punkt $P \in S_i$ schneidet dann die Gerade durch $[P, Q]_t$ und $[P, Q_i]_t$ den Träger T in demselben Punkt

$$R_i = \frac{\bar{x} \bar{z}_i^\varrho - \bar{x}_i \bar{z}^\varrho}{\bar{x} - \bar{x}_i} Z_\varrho .$$

Daher ist $[S_i, (Q, Q_i)]_t$ ein Pyramidenstumpf, dessen n-Maß wir als Differenz der n-Maße zweier Simplizes berechnen. Wir betrachten jetzt ein festes $i = 2, \ldots, n+1$. Für das n-Maß V_i' des von R_i und $[S_i, Q_i]_t$ aufgespannten Simplex gilt dann, wenn j die Zahlen $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n+1$ durchläuft,

$$\begin{aligned} V_i' &= \frac{1}{n} \left| \det \left(\frac{\bar{x}_i x_j}{(1-t)\bar{x}_i + t x_j}, \frac{(1-t)\bar{x}_i z_j^\varrho + t x_j \bar{z}_i^\varrho}{(1-t)\bar{x}_i + t x_j} - \frac{\bar{x}\bar{z}_i^\varrho - \bar{x}_i \bar{z}^\varrho}{\bar{x} - \bar{x}_i} \right) \right| \\ &= \frac{\bar{x}_i}{n \prod_{j \neq i} ((1-t)\bar{x}_i + t x_j)} \left| \det \left(x_j, (1-t)\bar{x}_i z_j^\varrho - ((1-t)\bar{x}_i + t x_j) \frac{\bar{x}\bar{z}_i^\varrho - \bar{x}_i \bar{z}^\varrho}{\bar{x} - \bar{x}_i} \right) \right| \\ &= \frac{(1-t)^{n-1} \bar{x}_i^n}{n \prod_{j \neq i} ((1-t)\bar{x}_i + t x_j)} \left| \det \left(x_j, z_j^\varrho - \frac{\bar{x}\bar{z}_i^\varrho - \bar{x}_i \bar{z}^\varrho}{\bar{x} - \bar{x}_i} \right) \right| \\ &= \frac{(1-t)^{n-1}}{|\bar{x} - \bar{x}_i|} \frac{\bar{x}_i^n}{\prod_{j \neq i} ((1-t)\bar{x}_i + t x_j)} \Delta_i(Q) \end{aligned}$$

mit dem von t unabhängigen Faktor

$$\Delta_i(Q) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \left| \det \begin{pmatrix} 0, & \bar{x}\bar{z}_i^\varrho - \bar{x}_i \bar{z}^\varrho, & \bar{x} - \bar{x}_i \\ x_j, & z_j^\varrho, & 1 \end{pmatrix} \right| .$$

Diese stetige Funktion soll noch etwas umgeformt werden. Mittels der expliziten Darstellung von $\bar{x}_i$ und $\bar{z}_i^0$ in (10) ist nämlich

$$\Delta_i(Q) = \frac{1}{n}\left|\det\begin{pmatrix} -\frac{\bar{x}\bar{x}_i}{c}, & -\bar{x}_i\bar{z}^0, & -\bar{x}_i \\ x_j, & z_j^0, & 1 \end{pmatrix}\right|$$

(11) $$\Delta_i(Q) = \bar{x}_i\frac{1}{n}\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\bar{x}}{c}, & \bar{z}^0, & 1 \\ x_j, & z_j^0, & 1 \end{pmatrix}\right|, \qquad (i = 2, \ldots, n+1).$$

Entsprechend folgt für das n-Maß V_i'' des von R_i und $[S_i, Q]_t$ aufgespannten Simplex

$$V_i'' = \frac{(1-t)^{n-1}}{|\bar{x} - \bar{x}_i|}\,\frac{\bar{x}^n}{\prod\limits_{j \neq i}((1-t)\bar{x} + t x_j)}\,\Delta_i(Q).$$

Aus beiden Simplexmaßen erhalten wir zusammen

$$\begin{aligned}|[S_i, (Q, Q_i)]_t|_n &= |V_i'' - V_i'| \\ &= \frac{(1-t)^{n-1}}{|\bar{x} - \bar{x}_i|}\left|\frac{\bar{x}^n}{\prod\limits_{j\neq i}((1-t)\bar{x} + t x_j)} - \frac{\bar{x}_i^n}{\prod\limits_{j\neq i}((1-t)\bar{x}_i + t x_j)}\right|\Delta_i(Q) \\ &= \frac{(1-t)^{n-1}}{|\bar{x} - \bar{x}_i|}\left|t\sum_{j\neq i}\left(\frac{x_j}{\bar{x}_i} - \frac{x_j}{\bar{x}}\right) + O(t^2)\right|\Delta_i(Q) \\ &= \left\{\frac{t}{\bar{x}\bar{x}_i}\sum_{j\neq i} x_j + O(t^2)\right\}\Delta_i(Q).\end{aligned}$$

Wir setzen nun die berechneten Maße in die Ungleichungen (9) und (8) ein und gewinnen die Beziehung

$$\begin{aligned}1 + t\left(1 - \frac{1}{h^n c}\right) + O(t^2) &\geqq 1 + t(1 - |A|_n|B|_n^{-1}) + O(t^2) \geqq \\ &\geqq 1 + t\left\{1 - \frac{1}{\bar{x}}\sum_{i=1}^{n+1} x_i + \frac{1}{\bar{x}}\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{\bar{x}_i}\Delta_i(Q)\,|A|_n^{-1}\sum_{j\neq i} x_j\right\} + O(t^2).\end{aligned}$$

Nach Subtraktion von 1, Division durch t und Grenzübergang $t \to 0$ folgt daraus

$$\frac{1}{h^n c} \leqq |A|_n\,|B|_n^{-1} \leqq \frac{1}{\bar{x}}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i - \sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{\bar{x}_i}\Delta_i(Q)\,|A|_n^{-1}\sum_{j\neq i} x_j\right).$$

Wir führen jetzt noch den Grenzübergang $Q \to Q_1$ durch[7]). Mittels der aus (11) und (10) folgenden Werte

$$\Delta_i(Q_1) = \bar{x}_i h\vartheta_{1i}|A|_n$$

erhalten wir dann wegen (10)

(12) $$\frac{(1-h)x_1 + h x_2}{h^n} \leqq \bar{x}_1|A|_n|B|_n^{-1} \leqq x_1 + n x_2 - h(x_1 + (n-1)x_2).$$

[7]) Wir haben nicht sofort $Q = Q_1$ gewählt, weil dann einige Verbindungsgeraden von Q und Q_i $(i = 2, \ldots, n+1)$ parallel zu T sein könnten, was für die Berechnung der Maße $|[S_i, (Q, Q_i)]_t|_n$ zusätzliche Überlegungen erforderte.

Für die äußere Ungleichung liefert nun eine einfache Umformung

$$x_1(1-h)(1-h^n) \leqq x_2(1-h)h^n\left(n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{h^i}\right). \tag{13}$$

Diese Ungleichung ist aber für $0 < h < 1$ bzw. $h > 1$ unmöglich, weil in beiden Fällen ihre linke Seite positiv und ihre rechte Seite negativ ist. Die Relation (13) besteht also nur für $h = 1$, und zwar mit dem Gleichheitszeichen. Dann muß auch in (12) Gleichheit gelten und somit

$$|B|_n = |\pi(A)|_n$$

sein. Wegen $B \subset \pi(A)$ und der Abgeschlossenheit von B folgt daraus die Behauptung $B = \pi(A)$.

Hilfssatz 14: *Für konvexe Körper $A \subset H_0 - T$ und $B \subset H_1 - T$ positiven n-Maßes und für ein t mit $0 < t < 1$ gelte $p_t(A, B) = 0$. Dann gehen A und B durch Parallelprojektion auseinander hervor.*

Beweis: Da konvexe Körper für $n = 1$ Simplizes sind, können wir mit Rücksicht auf den letzten Hilfssatz im folgenden $n \geqq 2$ voraussetzen. Ein Simplex in einer Halbhyperebene H_λ, von dem n Ecken eine zu T parallele $(n-1)$-dimensionale Ebene aufspannen und dessen $(n+1)$-te Ecke zwischen diesen beiden Ebenen liegt, wollen wir kurz als *spezielles Simplex* in H_λ bezeichnen. Zu jedem speziellen Simplex $A^* \subset A$ können wir nun durch $n + 1$ nacheinander ausgeführte maßtreue Zerlegungen einen konvexen Körper $B^* \subset B$ ausschneiden, so daß wegen Hilfssatz 10 wieder $p_t(A^*, B^*) = 0$ ist. Nach Hilfssatz 13 muß dann B^* projektionsgleich[8]) zu A^* sein. Umgekehrt gibt es natürlich auch zu jedem speziellen Simplex in B ein projektionsgleiches in A. Sei jetzt E eine zu T parallele Hyperebene, die eine maßtreue Zerlegung von A und B erzeugt und diese Körper in Mengen positiven $(n-1)$-Maßes schneidet. Dann enthalten $A \cap E$ und $B \cap E$ bis auf Translationen die gleichen Strecken, weil sich jede Strecke in $A \cap E$ zu einem speziellen Simplex in A ergänzen läßt. Führen wir in T und damit in allen dazu parallelen $(n-1)$-dimensionalen Ebenen eine euklidische Metrik ein, so müssen $A \cap E$ und $B \cap E$ zwei gleichlange parallele Durchmessersehnen haben. Da ein konvexer Körper nicht zwei verschiedene parallele Durchmessersehnen besitzen kann, gibt es genau eine Parallelprojektion $\pi: H_0 \to H_1$, die eine Durchmessersehne $(P_1, P_2) \subset A \cap E$ in $B \cap E$ abbildet. Die bei der maßtreuen Zerlegung entstehenden Mengen A' und B' mögen in demselben Halbraum von E liegen wie T. Das mit einem beliebigen Punkt $P \in A'$ gebildete Dreieck $(P, P_1, P_2) \subset A'$ läßt sich wieder zu einem speziellen Simplex in A' ergänzen und hat deshalb ein projektionsgleiches in B'. Letzteres ist nach der Bemerkung über die Durchmessersehne (P_1, P_2) eindeutig bestimmt, d. h. es ist $(\pi(P), \pi(P_1), \pi(P_2)) \subset B'$. Da umgekehrt aus $Q \in B'$ auch $\pi^{-1}(Q) \in A'$ folgt, erhalten wir $B' = \pi(A')$. Ist E_0 die zu T parallele Stützhyperebene an A und B, die T von A und B trennt, so liefern unsere Überlegungen insbesondere die Translationsgleichheit

[8]) Der Terminus „projektionsgleich“ soll hier im Sinne von „gleich unter einer *Parallel*projektion“ benutzt werden.

von $A \cap E_0$ und $B \cap E_0$. Dies bedeutet aber, daß die eben konstruierte Projektion π von der speziellen Wahl der Hyperebene E unabhängig ist. Wir betrachten jetzt die zu T parallele Stützhyperebene E^* an A und B, für die T, A und B in demselben Halbraum liegen. Geht sie durch den Punkt $x^* X_0$, so seien E_i die zu T parallelen Hyperebenen, die durch $\left(x^* - \frac{1}{i}\right) X_0$ gehen, A und B maßtreu zerlegen sowie A und damit auch B etwa für $i = i_0, i_0 + 1, \ldots$ in Mengen positiven $(n-1)$-Maßes schneiden. Liegen wieder die bei den maßtreuen Zerlegungen entstehenden Mengen A_i' und B_i' in demselben Halbraum von E_i wie T, so ist

$$\bigcup_{i=i_0}^{\infty} A_i' = A - E^* \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=i_0}^{\infty} B_i' = B - E^* .$$

Wegen $B_i' = \pi(A_i')$ folgt daraus

$$B - E^* = \pi(A - E^*) .$$

Zu einem Punkt $P \in A \cap E^*$ wählen wir eine Folge $P_i \in A - E^*$, die gegen P konvergiert. Wegen der Stetigkeit von π und der Abgeschlossenheit von B konvergiert dann $\pi(P_i) \to \pi(P) \in B \cap E^*$. Da sich jeder Punkt aus $B \cap E^*$ so gewinnen läßt, erhalten wir schließlich $B = \pi(A)$.

Satz: *Für kompakte Mengen $A \subset H_0$ und $B \subset H_1$ positiven n-Maßes und für eine Zahl t mit $0 < t < 1$ gelte $p_t(A, B) = 0$. Dann müssen $A - T$ und $B - T$ konvexe Mengen sein, die durch Parallelprojektion auseinander hervorgehen.*

Beweis: Im Fall $A_0 \cap T = B_0 \cap T = \Theta$ sind $A - T$ und $B - T$ nach Hilfssatz 11 konvexe Körper, für die wegen des Hilfssatzes 10 auch $p_t(A - T, B - T) = 0$ ist. Der Hilfssatz 14 liefert dann sofort die Behauptung. Wir können also annehmen, daß etwa $B_0 \cap T \neq \Theta$ ist. Sei $a \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Min}\{x \mid x X_0 + z^e Z_e \in A_0\}$, so betrachten wir die zu T parallelen Hyperebenen E_i, die jeweils durch den Punkt $\left(a + \frac{1}{i}\right) X_0$ gehen sowie A und B maßtreu zerlegen. Die dabei entstehenden Mengen A_i'' und B_i'', die in dem T abgewandten Halbraum von E_i liegen und etwa für $i = i_0, i_0 + 1, \ldots$ positives n-Maß haben, sind dann nach den Hilfssätzen 10 und 11 konvexe Körper. Für sie existiert wegen des Hilfssatzes 14 eine Parallelprojektion $\pi : H_0 \to H_1$ mit

$$B_i'' = \pi(A_i'') , \tag{14}$$

die wieder von i unabhängig ist. Insbesondere sind nämlich $A \cap E^*$ und $B \cap E^*$ translationsgleich, wenn E^* die zu T parallele Hyperebene bezeichnet, die A und B von derselben Seite stützt und T nicht enthält. Die Mengen

$$\bigcup_{i=i_0}^{\infty} A_i'' \quad \text{und} \quad B - T = \bigcup_{i=i_0}^{\infty} B_i''$$

sind nun zunächst konvex, weil sonst bereits ein A_i'' bzw. B_i'' nicht konvex wäre, und mittels (14) folgt

$$B - T = \pi\left(\bigcup_{i=i_0}^{\infty} A_i''\right) .$$

Dann muß aber $a = 0$ und somit $A - T = \bigcup_{i=i_0}^{\infty} A_i''$ sein.

Mit dem letzten Satz haben wir eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Busemannschen Ungleichung (1) gewonnen. Durch eine direkte Rechnung läßt sich jetzt bestätigen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist.

Literatur

[1] Barthel, W.: Zum Busemannschen und Brunn-Minkowskischen Satz. Math. Z. **70**, 407—429 (1959).

[2] Barthel, W., u. W. Bettinger: Die isoperimetrische Ungleichung für die innere Minkowskische Relativoberfläche. Math. Ann. **142**, 322—327 (1961).

[3] Bonnesen, T., u. W. Fenchel: Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934.

[4] Busemann, H.: A theorem on convex bodies of the Brunn-Minkowski type. Proc. Nat. Acad. Sci. **35**, 27—31 (1949).

[5] Hadwiger, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin 1957.

[6] Hadwiger, H., u. D. Ohmann: Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie. Math. Z. **66**, 1—8 (1956).

[7] Hardy, G. H., J. E. Littlewood and G. Pólya: Inequalities. Cambridge 1934.

(Eingegangen am 14. März 1961)

Peressini, A. L.
Math. Annalen 144, 199—223 (1961)

On Topologies In Ordered Vector Spaces*

By

A. L. Peressini in Pullman, Washington

Introduction

The study of the topological structure of ordered topological vector spaces was initiated during the period between 1937 and 1948. We note, in particular, the fundamental work of M. G. Krein and his school [8, 9, 10]. Most of this initial work was carried out in a rather restricted topological or order-theoretic framework (e. g., the spaces considered were often assumed to be normed vector lattices). However, the development of the general theory of topological vector spaces and, in particular, locally convex spaces necessitated a study of the relations between order and topology for these more general types of spaces. Such studies have been conducted by Namioka [12], Schaefer [14 to 18], and others.

The purpose of this paper is to continue these investigations in two principal directions. The first of these involves a study of the basic properties of the topology of uniform convergence on order bounded sets; this is taken up in sections I—IV. The second part of this investigation deals with a method for constructing the finest topology (resp. the finest locally convex topology) for which the filters of a given class converge. Relationships between these topologies and other topologies which have appeared in the literature are also discussed.

In order to make the presentation reasonably self-contained, we shall now list some of the definitions and results concerning ordered topological vector spaces that we shall need later. For further details concerning the concepts that are introduced, we refer the reader to Birkhoff [1], Bourbaki [3], Namioka [12], and Schaefer [14—17]. No attempt will be made here to collect the definitions and results from the general theory of topological vector spaces that will be needed in what follows; for these the reader should consult, e.g., Bourbaki [2] or Köthe [7]. Notation in general follows that used in Bourbaki [2].

Let E be a real vector space, then a *cone* in E is a convex subset K of E which is invariant under all mappings of the form $x \to \lambda x$ $(\lambda > 0)$. K is a

*) Most of the results in this paper can be found in the author's doctoral dissertation submitted at Washington State University in January, 1961 and written while he held a National Science Foundation Graduate Fellowship. The author wishes to acknowledge his indebtedness and to express his sincere gratitude to his thesis adviser, Professor Helmut H. Schaefer for his many helpful suggestions during the course of this investigation.

proper cone if $K \cap (-K) = \{\theta\}$ where θ denotes the neutral element of E. To each proper cone K in E there corresponds a transitive, reflexive, and antisymmetric binary relation $\geqq$ on E; namely, the relation $\geqq$ defined by $y \geqq x$ (or $x \leqq y$) if $y - x \in K$. Conversely, each transitive, reflexive, and antisymmetric relation $\geqq$ on E determines a proper cone K; namely, the *positive cone* $K = \{x \in E : x \geqq \theta\}$. Such a relation $\geqq$ on E is called an *order* for E. E equipped with an order is called an *ordered vector space*[1]).

If E is an ordered vector space with cone K and M is a linear subspace of E, then M (resp. E/M) is an ordered vector space for the cone $K \cap M$ (resp. $\varphi(K)$ where φ is the canonical map of E onto E/M, provided $\varphi(K)$ is proper). If $\{E_\iota\}_{\iota \in I}$ is a family of ordered vector spaces with cones $K_\iota (\iota \in I)$, then $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ $\left(\text{resp. } E = \bigoplus_{\iota \in I} E_\iota\right)$ is an ordered vector space for the cone $K = \prod_{\iota \in I} K_\iota$ $\left(\text{resp. } K = \bigoplus_{\iota \in I} K_\iota\right)$. Unless it is specifically mentioned to the contrary, the above spaces will always be assumed to be ordered in this way.

Let E be an ordered vector space and let $x, y \in E$, then the set $[x, y] = (x + K) \cap (y - K) = \{z \in E : x \leqq z \leqq y\}$ is called an *order interval*. A subset $B \subset E$ is *order bounded* if it is contained in an order interval. B is *majorized* (resp. *minorized*) if there exists an $x \in E$ such that $b \leqq x$ (resp. $b \geqq x$) for all $b \in B$. A subset B of E is *directed* $(\leqq)$ if $b_1, b_2 \in B$ implies that there exists a $b_3 \in B$ majorizing $\{b_1, b_2\}$. Let B be directed $(\leqq)$, then the class of sets $\{S_x\}_{x \in B}$ where $S_x = \{y \in B : y \geqq x\}$ is a filter base on E for a filter $\mathfrak{F}(B)$ called the *filter of sections of* B. The cone K in E is *generating* if $E = K - K$; it is easily seen that K is generating if and only if E is directed $(\leqq)$. A subset B of E *exhausts* the cone K if for each $x \in K$ there is a $\lambda > 0$ and a $b \in B$ such that $x \leqq \lambda b$. An element $e \in E$ is an *order unit* if K is generating and $\{e\}$ exhausts K.

Let B be a subset of an ordered vector space E, then B has a *supremum* (resp. *infinum*) in E if there exists an element $x \in E$ such that

(a) $b \leqq x$ (resp. $b \geqq x$) for all $b \in B$.

(b) $b \leqq y$ (resp. $b \geqq y$) for all $b \in B$ implies $x \leqq y$ (resp. $x \geqq y$).

We denote the supremum of B by $\sup B$ and the infimum of B by $\inf B$. E is said to be a *vector lattice* if $\sup(x, y) \in E$ whenever $x, y \in E$. The basic operations in a vector lattice are defined by $x^+ = \sup(x, \theta)$, $x^- = (-x)^+$, and $|x| = \sup(x, -x)$ for each $x \in E$. An account of the basic properties and relations for vector lattices can be found in BIRKHOFF [1] and BOURBAKI [3].

A subset B of a vector lattice E is *order complete* if for each directed $(\leqq)$ subset $X \subset B$, majorized in E, $\sup X$ exists and is an element of B. If E is order complete as a subset of itself, E is called an *order complete vector lattice*. A linear subspace M of a vector lattice E is a *sublattice* (resp. *ideal*) of E if $x \in M$ implies $x^+ \in M$ (resp. if $x \in M$ and $|y| \leqq |x|$ imply $y \in M$). If E is an order complete vector lattice and M is an ideal in E, then M is a *band* in E if M is an order complete subset of E.

---

[1]) The term "partial order" (resp. "partially ordered vector space") for order (resp. ordered vector space) is also in current use.

An ordered vector space E is *almost archimedean* if $-\lambda y \leq x \leq \lambda y$ for some $y \in E$ and all $\lambda > 0$ implies that $x = \theta$. E has *property* (D) if $[\theta, x] + [\theta, y] = [\theta, x + y]$ holds for all $x, y \in K$. Every vector lattice has property (D).

Let E_1 and E_2 be ordered vector spaces with positive cones K_1 and K_2 respectively, and let u be a linear map on E_1 into E_2. Then u is *positive* (resp. *order bounded*) if $u(K_1) \subset K_2$ (resp. the image of every order bounded set in E_1 is an order bounded set in E_2).

The set K^* of all positive linear forms on an ordered vector space E is a cone in the algebraic dual E^* of E; if the linear hull $K^* - K^*$ of K^* is dense in E^* for $\sigma(E^*, E)$, we say that E is *regularly ordered* ([14]). If E is regularly ordered, has property (D), and K is generating, then E is a (D)*-space* ([16]). The vector space of all order bounded linear forms on E, equipped with the order induced by E^* is denoted by E^b. $K^* - K^*$ is an ordered linear subspace of E^b that is denoted by E^+. If E has property (D), then $E^b = E^+$; if, in addition, the cone K in E is generating, E^b is an order complete vector lattice with the lattice operations defined by

$$f^+(x) = \sup_{z \in [\theta, x]} f(z) \quad |f|(x) = \sup_{z, w \in K; z + w = x} f(z - w) \quad (\sup A)(x) = \sup_{f \in A} f(x)$$

where A is a majorized subset of E^b, $f \in E^b$, and $x \in K$. A (D)-space is said to be of *minimal type* if the canonical mapping of E into $E^{++} = (E^+)^+$ preserves the supremums, when they exist, of subsets of E.

Let B be a subset of an ordered vector space E (resp. a vector lattice E). We define the *full hull* $[B]$ (resp. the *solid hull* (B) of B by $[B] = \bigcup_{x, y \in B} [x, y] = (B + K) \cap (B - K)$ (resp. $(B) = \{z \in E : |z| \leq |x| \text{ for some } x \in B\}$). If $B = [B]$ (resp. $B = (B)$), then B is said to be *full* (resp. *solid*). If $\mathfrak{F}$ is a filter on E, then $[\mathfrak{F}]$ (resp. $(\mathfrak{F})$) denotes the filter on E with base $\{[F] : F \in \mathfrak{F}\}$ (resp. $\{(F) : F \in \mathfrak{F}\}$).

A topological vector space $E(\mathfrak{T})$ which is an ordered vector space is called an *ordered topological vector space*. In addition, if $\mathfrak{T}$ is a Hausdorff locally convex topology, then $E(\mathfrak{T})$ is an *ordered locally convex space*[2]). The cone K in an ordered topological vector space $E(\mathfrak{T})$ is *normal* (for $\mathfrak{T}$) if $\lim \mathfrak{F} = \theta$ implies $\lim [\mathfrak{F}] = \theta$ for each filter $\mathfrak{F}$ on E. Thus if $\mathfrak{U}$ denotes the neighborhood filter of θ in $E(\mathfrak{T})$, K is normal for $\mathfrak{T}$ if and only if $[\mathfrak{U}] = \mathfrak{U}$. If $E(\mathfrak{T})$ is an ordered locally convex space, then K is normal for $\mathfrak{T}$ if and only if there is a generating system $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ of semi-norms for $\mathfrak{T}$ with the property $p_\alpha(x + y) \geq p_\alpha(x)$ for all $x, y \in K$ and each $\alpha \in A$ ([14]; 1.1). Let $\mathfrak{S}$ be a class of bounded subsets of $E(\mathfrak{T})$, then K is an $\mathfrak{S}$*-cone* (resp. *strict* $\mathfrak{S}$*-cone*) if the class $\{\overline{(S \cap K) - (S \cap K)} : S \in \mathfrak{S}\}$ (resp. $\{(S \cap K) - (S \cap K) : S \in \mathfrak{S}\}$) is a fundamental system for $\mathfrak{S}$. When K is an $\mathfrak{S}$-cone (resp. strict $\mathfrak{S}$-cone) for the class $\mathfrak{S}$ of all bounded subsets of $E(\mathfrak{T})$, we say that K is a $\mathfrak{b}$*-cone* (resp. *strict* $\mathfrak{b}$*-cone*).

---

[2]) Throughout this paper, a locally convex space $E(\mathfrak{T})$ is defined to be a real vector space E equipped with a Hausdorff locally convex topology $\mathfrak{T}$.

Let $E(\mathfrak{T})$ be a topological vector space which is a vector lattice, then $E(\mathfrak{T})$ is a *topological vector lattice* if $\lim\mathfrak{F} = \theta$ implies $\lim(\mathfrak{F}) = \theta$ for each filter $\mathfrak{F}$ on E. Thus if $\mathfrak{U}$ denotes the neighborhood filter of θ in $E(\mathfrak{T})$, $E(\mathfrak{T})$ is a topological vector lattice if and only if $(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$. $E(\mathfrak{T})$ is a topological vector lattice if and only if its cone is normal and the lattice operations are continuous (cf. [12], Th. 8.1). Since the convex hull of a solid set is solid, an ordered locally convex space which is also a topological vector lattice has a $\mathfrak{T}$-neighborhood basis of θ consisting of convex solid sets; in this case we call $E(\mathfrak{T})$ a *locally convex lattice*. A *Fréchet lattice* (resp. *Banach lattice*) is a locally convex lattice which is a Fréchet space (resp. which is a Banach space whose unit ball is solid). A topological vector space which is a vector lattice is *locally order complete* if there is a neighborhood basis of θ consisting of solid, order complete sets. An ordered topological vector space is *boundedly order complete* if every topologically bounded directed $(\leq)$ subset has a supremum.

Let E be an ordered vector space, then the *order topology* $\mathfrak{T}_0$ on E is the finest locally convex topology on E for which every order interval is a bounded set ($\mathfrak{T}_0$ is called the "order bound topology $\mathfrak{T}_b$" in [12]). A neighborhood basis of θ for $\mathfrak{T}_0$ is given by the class of all convex circled subsets of E that absorb all order bounded sets in E. Let E be almost archimedean with an order unit e, then the gauge p_e of $[-e, e]$ is a norm on E generating $\mathfrak{T}_0$ and $\mathfrak{T}_0$ is the finest locally convex topology on E for which K is normal. If E is almost archimedean and H exhausts K, then $E_a =$ Linear Hull $[-a, a]$ $(a \in H)$ has a as an order unit. Thus the order topology $\mathfrak{T}_0^{(a)}$ on E_a is normable. It is shown in [14], Th. 4.4 that $E(\mathfrak{T}_0) = \lim\limits_{\to H} E_a(\mathfrak{T}_0^{(a)})$ and that if $\mathfrak{T}_0$ is Hausdorff, then $\mathfrak{T}_0$ is a bornological topology finer than any locally convex topology for which K is normal. It follows from this that a linear form on E is continuous for $\mathfrak{T}_0$ if and only if it is order bounded, that is, $E(\mathfrak{T}_0)' = E^b$. It follows from [14], (4.9) that if $E(\mathfrak{T})$ is a vector lattice equipped with a Hausdorff locally convex topology $\mathfrak{T}$, then $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0$ if and only if $\mathfrak{T}$ is the finest locally convex topology on E for which K is normal.

Let $\langle E, F\rangle$ be a real dual system and let K be a proper cone in E. Then the *dual cone* K' of K in F is defined by $K' = -K^0$ where K^0 denotes the polar of K for $\langle E, F\rangle$. When $F = E^*$, K' coincides with K^*. The dual nature of normal cones and $\mathfrak{S}$-cones is exhibited by the following theorem due to Schaefer ([14], Th. (1.5)). If K' is an $\mathfrak{S}$-cone in F, then K is normal in E for the $\mathfrak{S}$-topology on E. If K is normal in E for an $\mathfrak{S}$-topology consistent with $\langle E, F\rangle$, then K' is a strict $\mathfrak{S}$-cone.

Let $E(\mathfrak{T})$ be a locally convex lattice, then K is a closed normal strict $\mathfrak{b}$-cone ([16], 2.b). The dual E' of $E(\mathfrak{T})$ is a locally convex lattice for the strong topology $\beta(E', E)$ ([6], 1.18). From this it is easy to conclude that E' is an ideal in E^+. Thus, in particular, E' is an order complete vector lattice.

I. The topology $o(F, E)$

Throughout this chapter, $\langle E, F\rangle$ will denote a dual system over the real field, K will denote a cone in E, and K' the dual cone of K in F. We shall suppose that E (resp. F) is ordered with the positive cone K (resp. K').

Let $\mathfrak{S}_0$ be the class of all order bounded subsets of E and let us consider the topology on F of uniform convergence on the sets of $\mathfrak{S}_0$. From the general theory of $\mathfrak{S}$-topologies, it follows that the $\mathfrak{S}_0$-topology on F is compatible with the linear structure of F if and only if each element of F, considered as a linear form on E, is order bounded (cf. [2], Chapter III, § 3, Prop. 1). When this condition is satisfied, that is, when $F \subset E^b$, we shall denote the $\mathfrak{S}_0$-topology on F by $o(F, E)$. This condition is not very restrictive; for example, if E is a ordered locally convex space with a weakly normal cone and $F = E'$, then $F \subset E^b$.

If the cone K in E is generating, then the class $\mathfrak{S}_0$ is directed ($\leq$) by inclusion so that the class $\{S^0\}_{S \in \mathfrak{S}_0}$ is a θ-neighborhood basis for the $\mathfrak{S}_0$-topology. Moreover, the class $\{[-x, x]\}_{x \in K}$ is a fundamental system for $\mathfrak{S}_0$.

Proposition 1.1: *If K is generating, then K is a strict $\mathfrak{S}_0$-cone and K' is normal for $o(F, E)$.*

Proof. We have already noted that the class $\{[-x, x]\}_{x \in K}$ is an $\mathfrak{S}_0$-fundamental system. If $z \in [-x, x]$ then $z = \frac{1}{2}(z + x) - \frac{1}{2}(x - z) \in [\theta, x] - [\theta, x]$. Hence, since $K \cap [-x, x] = [\theta, x]$, the first assertion is proved.

Since K is a strict $\mathfrak{S}_0$-cone in E, the family of semi-norms

$$y \to p_x(y) = \sup_{z \in [\theta, x]} |\langle z, y\rangle| \qquad (x \in K)$$

generates the topology $o(F, E)$. These semi-norms are clearly monotone on K'; hence K' is normal for $o(F, E)$.

The topology $o(F, E)$ is not in general consistent with the dual system $\langle E, F\rangle$. By the Mackey theorem (cf. [2], Chapt. 4, § 2, Th. 2), $o(F, E)$ is consistent with $\langle E, F\rangle$ if and only if the order intervals in E are $\sigma(E, F)$-relatively compact. This is not the case, for example, if $F = E(\mathfrak{T}_0)'$ and E is almost archimedean, has an order unit, and is not reflexive for the order topology $\mathfrak{T}_0$. Example: Let E be the vector space (m) of bounded real sequences ordered by the cone K of sequences in (m) whose terms are all non-negative). However, since we have assumed that $F \subset E^b$, it follows that the order intervals in E are $\sigma(E, F)$-bounded. Hence if E is a semi-reflexive locally convex space, then $o(E', E)$ is consistent with the dual system $\langle E, E'\rangle$.

Theorem 1.2: *If E is a full subspace of F^*, then $o(F, E)$ is consistent with $\langle E, F\rangle$.*

Proof. Since each order interval in E is $\sigma(E, F)$-bounded, it is relatively compact in F^* for $\sigma(F^*, F)$. But E is a full subspace of F^* and $(K')^*$ is $\sigma(F^*, F)$-closed, hence each order interval in E is $\sigma(F^*, F)$-compact in F^*. Since $\sigma(F^*, F)$ induces $\sigma(E, F)$ on E, we conclude that each order interval in E is $\sigma(E, F)$-compact, that is, $o(F, E)$ is consistent with $\langle E, F\rangle$.

Corollary 1: Let E be a locally convex space with a closed generating cone K and let E' be a full subspace of E^*. Then $o(E, E')$ is consistent with the dual system $\langle E, E'\rangle$.

Proof. Since K is generating, $E \subset (E')^b$, hence the $\mathfrak{S}_0$-topology on E is compatible with the linear structure of E. K is closed; therefore $K = K^{00}$. The consistency of $o(E, E')$ now follows from (1.2).

Corollary 2: If E is an almost archimedean ordered vector space with an order unit and E is a full subspace of E^{++}, then E is reflexive for $\mathfrak{T}_0$.

Proof. Since E is almost archimedean and has an order unit e, the order topology $\mathfrak{T}_0$ on E is normable and K is $\mathfrak{T}_0$-normal (cf. Introduction). Therefore $E(\mathfrak{T}_0)' = E^+$. From the fact that E is a full subspace of E^{++} we conclude from (1.2) and the subsequent Remarks that $o(E^+, E)$ is consistent with $\langle E, E^+\rangle$. But this implies that the unit ball $[-e, e]$ for $\mathfrak{T}_0$ is $\sigma(E, E^+)$-relatively compact by the Mackey theorem. Thus $E(\mathfrak{T}_0)$ is a reflexive normable space which completes the proof.

Remarks: If K is generating and E is a full subspace of F^+, then it is clear that E is a full subspace of F^*.

In the next section we shall show that if E^b is a vector lattice and F is a sublattice on E^b, then the lattice operations in F are continuous for $o(F, E)$. If, in addition, $o(F, E)$ is consistent with $\langle E, F\rangle$, then it follows that E is a full subspace of F^*. Thus, if F is a sublattice of E^b, $o(F, E)$ is consistent with $\langle E, F\rangle$ if and only if E is a full subspace of F^*.

Combining Corollary 2 with the corollary to (14.2) in [16], we obtain the following result: If E is a (D)-space with an order unit and E is a full subspace of E^{++}, then E is an order complete vector lattice of minimal type.

We now turn to the consideration of some of the special properties that $o(F, E)$ has when E is known to possess certain additional order properties.

Proposition 1.3: *Suppose that K is generating and closed for $\sigma(E, F)$. Then $o(F, E)$ is normable (resp. metrizable) if and only if E has an order unit (resp. K has a countable exhausting subset). If K has a quasi-interior point, then the topology $o(F, E)$ can be defined by a family of norms*[3]).

Proof. The sufficiency of the conditions of the first assertion is clear from the definition of $o(F, E)$. If there is a norm generating $o(F, E)$, then the unit ball in F contains $[-x_0, x_0]^o$ for some $x_0 \in K$. Thus if $x \in E$, we have $\{x\}^o \supset \supset \frac{1}{\lambda}[-x_0, x_0]^o = [-\lambda x_0, \lambda x_0]^o$ since $o(F, E)$ is finer than $\sigma(F, E)$. Hence $x \in [-\lambda x_0, \lambda x_0]$ since K is closed for $\sigma(E, F)$, that is, x_0 is an order unit. If $o(F, E)$ is metrizable, there exists a countable set $\{x_n\} \subset K$ such that $\{[-x_n, x_n]^o\}_{n \in N}$ is an $o(F, E)$-neighborhood basis of θ. The fact that $\{x_n\}$ exhausts K can be established by a proof similar to the one given in the normed case.

If x_0 is a quasi-interior point of K, then $[-x_0, x_0]$ is a convex, circled subset of E whose linear hull is $\sigma(F, E)$-dense in E. It follows that the gauge p_0 of $[-x_0, x_0]^o$ is a norm on F. Now if K has a quasi-interior point, then the class of quasi-interior points exhausts K ([16], pg. 134). Thus the class $\{[-x, x]\}_{x \in H}$ where H is the set of quasi-interior points of K is an $\mathfrak{S}_0$-fundamental system in E. Consequently, the gauges of these sets are norms generating $o(F, E)$.

Proposition 1.4: *Let $\{\langle E_\iota, F_\iota\rangle\}_{\iota \in I}$ be a family of dual systems over the real field, let each E_ι be equipped with a generating cone K_ι, and let $F_\iota \subset E_\iota^b$. If*

[3]) $x \in K$ is a quasi-interior point of K if the linear hull of $[\theta, x]$ is $\sigma(E, F)$-dense in E ([16], Def. 12).

$E = \bigoplus_{\iota \in I} E_\iota$ and $F = \prod_{\iota \in I} F_\iota$, then $o(F, E)$ is the product topology of the $o(F_\iota, E_\iota)$ $(\iota \in I)$.

Proof. The bilinear form $(x, y) \to \sum_{\iota \in I} \langle x_\iota, y_\iota \rangle$ puts E and F in duality. Since each K_ι is generating, the cone $K = \bigoplus_{\iota \in I} K_\iota$ in E also has this property. Therefore a fundamental system of order bounded sets in E is given by the class $\left\{ \prod_{\iota \in H} [-x_\iota, x_\iota] \times \prod_{\iota \notin H} (\theta_\iota) : H \text{ finite};\ x_\iota \in K_\iota \right\}$. Consequently, since $F_\iota \subset E_\iota^b$ $(\iota \in I)$, the definition of the canonical bilinear form on $\langle E, F \rangle$ yields immediately that $F \subset E^b$. Thus the $\mathfrak{S}_0$-topology on F is compatible with the linear structure of F.

Let $[-x, x] = \prod_{\iota \in H} [-x_\iota, x_\iota] \times \prod_{\iota \notin H} (\theta_\iota)$ be a given order interval in E, then $[-x, x]^\circ = \prod_{\iota \in H} [-x_\iota, x_\iota]^\circ \times \prod_{\iota \notin H} F_\iota$. Hence since $\{[-x_\iota, x_\iota]^\circ\}_{x_\iota \in K_\iota}$ is a neighborhood basis of θ_ι in F_ι for $o(F_\iota, E_\iota)$, it follows that $o(F, E)$ is the product topology of the $o(F_\iota, E_\iota)$ $(\iota \in I)$.

Proposition 1.5: *Let $\{\langle E_\iota, F_\iota \rangle\}_{\iota \in I}$ be a family of dual systems over the real field, let each E_ι be equipped with a $\sigma(E_\iota, F_\iota)$-closed generating cone K_ι, and let $F_\iota \subset E_\iota^b$. Then if $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ and $F = \bigoplus_{\iota \in I} F_\iota$, the topology $o(F, E)$ is coarser than the locally convex sum topology of the $o(F_\iota, E_\iota)$ $(\iota \in I)$. When the locally convex sum topology of the $o(F_\iota, E_\iota)$ is consistent with $\langle E, F \rangle$, it coincides with $o(F, E)$.*

Proof. The cone $K = \prod_{\iota \in I} K_\iota$ clearly generates E and the class $\left\{ \prod_{\iota \in I} [-x_\iota, x_\iota] : x_\iota \in K_\iota \right\}$ forms a fundamental system of order bounded sets in E. Hence the fact that $F \subset E^b$ follows as it did in the proof of (1.4). Consequently, the $\mathfrak{S}_0$-topology on F is compatible with the linear structure of F.

Set $C^\iota = [-x_\iota, x_\iota] \times \prod_{\varkappa \neq \iota} E_\varkappa$ $(\iota \in I)$, then C^ι is a $\sigma(E, F)$-closed convex subset of E containing θ and $\prod_{\iota \in I} [-x_\iota, x_\iota] = \bigcap_{\iota \in I} C^\iota$. If $[-x, x] = \prod_{\iota \in I} [-x_\iota, x_\iota]$ is a given order interval in E, then $[-x, x]^\circ = \left(\bigcap_{\iota \in I} C^\iota \right)^\circ = \sigma(F, E)$-closed convex circled hull $\left(\bigcup_{\iota \in I} C^{\iota \circ} \right)$. But $C^{\iota \circ}$ is an $o(F_\iota, E_\iota)$-neighborhood of θ_ι in F_ι, hence $[-x, x]^\circ$ is a neighborhood of θ for the locally convex sum topology of the $o(F_\iota, E_\iota)$. This completes the proof of the first assertion.

Now let V be a closed convex θ-neighborhood for the locally convex sum topology, then $V \cap E_\iota \supset [-x_\iota, x_\iota]^\circ$ $(\iota \in I)$. The canonical injection of F_ι into F carries $[-x_\iota, x_\iota]^\circ$ into $\left([-x_\iota, x_\iota] \times \prod_{\varkappa \neq \iota} E_\varkappa \right)^\circ$. Therefore since the locally convex sum topology is consistent and since V is closed and convex we have $V \supset \sigma(F, E)$-closed convex hull $\bigcup_{\iota \in I} \left([-x_\iota, x_\iota] \times \prod_{\varkappa \neq \iota} E_\varkappa \right)^\circ$

$$= \left(\bigcap_{\iota \in I} [-x_\iota, x_\iota] \times \prod_{\varkappa \neq \iota} E_\varkappa \right)^\circ = \left(\prod_{\iota \in I} [-x_\iota, x_\iota] \right)^\circ .$$

Therefore V is an $o(F, E)$-neighborhood of θ which completes the proof.

Remarks. Let $\langle E, F\rangle$ be a dual system over the real field and let N be a linear subspace of F. If E is an ordered vector space, then each order interval in N^o (for the order induced by E) is a subset of an order interval in E. Therefore the quotient topology on F/N of the $\mathfrak{S}_0$-topology on F is finer than the $\mathfrak{S}_0$-topology on F/N.

These two topologies do not coincide in general as the following example shows. Let E be the vector space $C[0, 1]$ of continuous real-valued functions on the unit interval ordered by the cone K of functions in $C[0, 1]$ that are non-negative throughout the unit interval and suppose that E is equipped with the topology generated by the norm $f \to \|f\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} \{|f(t)|\}$ then $F = E' = BV(0, 1)$. Define N to be the linear subspace of F spanned by the element α defined by

$$\alpha(0) = 0 \quad \alpha(t) = 1 \quad \text{for} \quad 0 < t \leq 1 .$$

Then $N^o = \{f \in E : f(0) = 0\}$. Since $C(0, 1)$ has an order unit, it follows that $o(F, E)$ is normable. Hence the quotient topology of $o(F, E)$ on F/N is normable. However, the cone in N^o is closed but does not contain an order unit, consequently $o(F/N, N^o)$ is not normable by (1.3). Hence the quotient topology on F/N of $o(F, E)$ is strictly finer than $o(F/N, N^o)$ in this case.

Since the canonical image of each order interval in E is contained in an order interval in E/N^o, the topology of $o(N, E/N^o)$ is finer than the topology induced on N by $o(F, E)$.

II. The continuity of the lattice operations

In this section we shall assume that E is a vector lattice and that K' is generating in F. In this case, $E \subset F^b$ and, since K' is generating, the class $\{[-y, y]^o\}_{y \in K'}$ is a θ-neighborhood basis in E for $o(E, F)$.

Theorem 2.1: *If $\mathfrak{T}$ is a topology on E that is finer than $\sigma(E, F)$ and if the lattice operations are continuous for $\mathfrak{T}$, then $o(E, F)$ is coarser than $\mathfrak{T}$. If K is $\sigma(E, F)$-closed, F^b is a lattice, and E is a sublattice of F^b, then the lattice operations in E are continuous for $o(E, F)$.*

Proof. Let $\mathfrak{T}$ be a topology on E finer than $\sigma(E, F)$ for which the lattice operations are continuous and let $[-y_0, y_0]^o$ ($y_0 \in K'$) be a given $o(E, F)$-neighborhood of θ. Since y_0 is a $\mathfrak{T}$-continuous linear form on E, $U = \{x \in E : \langle x, y_0\rangle \leq 1\}$ is a $\mathfrak{T}$-neighborhood of θ. The lattice operations in E are $\mathfrak{T}$-continuous, hence there is a $\mathfrak{T}$-neighborhood V of θ such that $|x| \in U$ for all $x \in V$. Then if $y \in [-y_0, y_0]$ and $x \in V$ we have $\langle x, y\rangle = \langle x^+, y\rangle - - \langle x^-, y\rangle \leq \langle x^+, y_0\rangle + \langle x^-, y_0\rangle = \langle |x|, y_0\rangle \leq 1$ since $|x| \in U$. Therefore $V \subset [-y_0, y_0]^o$, that is, $o(E, F)$ is coarser than $\mathfrak{T}$.

Since K' is generating and $K^{\infty} = K$, the cone K is normal for $o(E, F)$ by (1.1). Hence, to prove the second assertion, it suffices to show the continuity of $g : x \to x^+$ at θ. Let $[-y_0, y_0]^o$ be a given $o(E, F)$-neighborhood of θ and let $\mathfrak{F}$ be a filter on E converging to θ for $o(E, F)$. Then $G \subset [-y_0, y_0]^o$ for some $G \in \mathfrak{F}$ and, since E is a sublattice of F^b, we have $\langle x^+, y\rangle \leq \langle x^+, y_0\rangle = \sup_{z \in [0, y_0]} \langle x, z\rangle \leq$

$\leq \sup\limits_{z \in [-y_0, y_0]} \langle x, z \rangle \leq 1$ for all $x \in G$ and all $y \in [-y_0, y_0]$, that is, $G^+ \subset [-y_0, y_0]^\circ$. Hence the filter $\mathfrak{F}^+$ with base $\{g(G) : G \in \mathfrak{F}\}$ converges to θ for $o(E, F)$, which completes the proof.

Corollary 1: If there exists an order interval in F which is not $\sigma(F, E)$-compact, then there does not exist a topology on E consistent with $\langle E, F \rangle$ for which the lattice operation are continuous.

Corollary 2: If E is a locally convex vector lattice, then $o(E, E')$ is consistent with $\langle E, E' \rangle$.

Proofs. The first corollary follows from (2.1) and the Mackey theorem (cf. [2] Chapt. IV, § 2, Th. 2) while the second corollary is a consequence of (2.1) and the fact that $o(E, E')$ is finer than $\sigma(E, E')$ in general.

Remark. If E is a sublattice of F^b and K is $\sigma(E, F)$-closed, then it follows from (1.1) and (2.1) that E is a locally convex lattice for $o(E, F)$. Therefore K is a strict $\mathfrak{b}$-cone and K' is normal for $\beta(F, E)$.

If E is a regularly ordered vector lattice, then $E(\mathfrak{T}_0)$ is a locally convex lattice (cf. [12], Theorem 8.5). Moreover, we have already remarked in the Introduction that if $E(\mathfrak{T})$ is a vector lattice equipped with a Hausdorff locally convex topology, then $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0$ if and only if $\mathfrak{T}$ is the finest locally convex topology for which the cone is normal. These two statements imply that if E is a regularly ordered vector lattice, then the order topology on E can be characterized as being the finest topology on E for which E is a locally convex lattice.

Proposition 2.2: *Let E be a regularly ordered vector lattice. Then each of the following conditions implies that $o(E, E^+)$ is the only topology finer than $\sigma(E, E^+)$ for which E is a locally convex lattice*

(a) *Each $\sigma(E^+, E)$-relatively compact subset of E^+ is order bounded.*

(b) *E^+ has an order unit.*

(c) *K^* has a countable exhausting subset.*

Proof. Since E is a locally convex lattice for $\mathfrak{T}_0$, K is closed and $E(\mathfrak{T}_0)' = E^+$. It follows from (1.2) Corollary that $o(E, E^+)$ is consistent with the dual system $\langle E, E^+ \rangle$. Each of the conditions of the hypothesis implies that $o(E, E^+) = \tau(E, E^+)$ hence, since $\mathfrak{T}_0 = \tau(E, E^+)$, we conclude that $\mathfrak{T}_0 = o(E, E^+)$. The assertion now follows from (2.1) and the observations immediately preceding this proposition.

Remark. We conclude from Proposition (1.3) and the proof of (2.2) that the order topology $\mathfrak{T}_0$ on a regularly ordered vector lattice E is normable if E^+ has an order unit and that $\mathfrak{T}_0$ is metrizable if K^* has a countable exhausting subset.

Proposition 2.3: *If the lattice operations in E are continuous for $\sigma(E, F)$, then each order interval in F is of finite dimension.*

Proof. If the lattice operations in E are $\sigma(E, F)$-continuous, then $\sigma(E, F) = o(E, F)$ by (2.1). Thus each order interval in F is equicontinuous for $\sigma(E, F)$ and consequently it is of finite dimension.

Corollary: If the lattice operations in E are $\sigma(E, F)$-continuous and F has an order unit, then E (and hence F) is finite dimensional.

Proof. If e is an order unit in F, then $F =$ Linear Hull $[-e, e]$. Hence since $[-e, e]$ is finite dimensional, it follows that F, and consequently E, is finite dimensional.

Theorem 2.4: *Let E be a normed vector lattice. Then the lattice operations in E are weakly continuous if and only if E is finite dimensional.*

Proof. Suppose that the lattice operations in E are weakly continuous but that E is not finite dimensional. Choose $y_1 \in K'$ such that $\|y_1\| = 1$ (where $y \to \|y\|$ denotes a norm generating the strong topology on E'). Then $[-y_1, y_1]$ is finite dimensional, consequently, $E' \neq$ Linear Hull $[-y_1, y_1]$. After y_{k-1} has been chosen, choose $y_k \in K'$ with $\|y_k\| = 1$ and $y_k \notin$ Linear Hull $\bigcup_{i=1}^{k-1} [-y_i, y_i]$. If $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$ $(\lambda_i > 0)$, the sequence $\left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i\right\}$ is a Cauchy sequence in E' for $\beta(E', E)$, hence $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i = y \in K'$. Since Linear Hull $[-y, y]$ contains $[-y_i, y_i]$ for all i, the interval $[-y, y]$ is not finite dimensional. But this contradicts (2.3), hence E must be finite dimensional. Since the converse is obvious, the proof is complete.

Remark. The method used in the proof of Corollary 2 applies more generally: If E is a vector lattice and if there exists a topology on F for which F is a Fréchet space with K' closed, then the lattice operations in E are $\sigma(E, F)$-continuous if and only if E is finite dimensional.

III. Completeness and bands

In the first part of this section we shall investigate the relations between the topological completeness of F for $o(F, E)$ and the order properties of E and F. We shall assume that K generates E.

Proposition 3.1: *Suppose that F is complete for $o(F, E)$. Then if A is a directed $(\leq)$ subset of F, A has a supremum in F if and only if the filter $\mathfrak{F}(A)$ of sections of A is $\sigma(F, E)$-bounded. If F is a vector lattice, then F is order complete.*

Proof. Suppose A has a supremum in F, then $\mathfrak{F}(A)$ contains an order interval. Since K is generating, it easily follows that each order interval in F is $\sigma(F, E)$-bounded, hence $\mathfrak{F}(A)$ is $\sigma(F, E)$-bounded.

Conversely, suppose that $\mathfrak{F}(A)$ is $\sigma(F, E)$-bounded. Since each finite subset of E is order bounded, $o(F, E)$ is finer than $\sigma(F, E)$, therefore K' is $o(F, E)$-closed. Hence, in view of the completeness of F for $o(F, E)$, it suffices to show that $\mathfrak{F}(A)$ is a Cauchy filter in F for $o(F, E)$. Since each section of A is minorized, we can assume without loss in generality that $\mathfrak{F}(A)$ contains a $\sigma(F, E)$-bounded positive section S. Let $[-x_0, x_0]^{\circ}$ be a given $o(F, E)$-neighborhood of θ in F. Then if $\lambda_0 = \sup_{y \in S} \langle x_0, y\rangle$, choose $y_0 \in S$ so that $\lambda_0 - \langle x_0, y\rangle \leq \frac{1}{2}$

for all $y \in S_{y_0} = \{y \in A : y \geqq y_0\}$. If $y_1, y_2 \in S_{y_0}$ and $z \in [-x_0, x_0]$, we have

$$|\langle z, y_1 - y_2\rangle| \leqq |\langle z, y_1 - y_0\rangle| + |\langle z, y_0 - y_2\rangle| \leqq \langle x_0, y_1 - y_0\rangle + \\ + \langle x_0, y_2 - y_0\rangle \leqq \lambda_0 - \langle x_0, y_0\rangle + \lambda_0 - \langle x_0, y_0\rangle \leqq 1 .$$

Hence $y_1 - y_2 \in [-x_0, x_0]^\circ$, that is, $S_{y_0} - S_{y_0} \subset [-x_0, x_0]^\circ$. Thus $\mathfrak{F}(A)$ is a Cauchy filter for $o(F, E)$ which proves the first assertion.

If F is a vector lattice and A is a majorized directed ($\leqq$) subset of F, then $\mathfrak{F}(A)$ contains an order interval. Since each order interval in F is $\sigma(F, E)$-bounded, it follows from the first assertion in (3.1) that A has a supremum in F. Therefore F is an order complete vector lattice.

Example. Consider the space $C[0, 1]$ of continuous real valued functions on the unit interval ordered by the cone K of non-negative functions in $C[0, 1]$ and equipped with the topology generated by the norm

$$\|x\| = \sup\{|x(t)| : 0 \leqq t \leqq 1\} .$$

Since $C[0, 1]$ is a locally convex lattice, it follows from (2.1) Corollary 2 that $o(E, E')$ is consistent with the dual system $\langle E, E'\rangle$. However, $C[0, 1]$ is not an order complete vector lattice, hence this space is not topologically complete for $o(E, E')$. Thus $o(E, E')$ is strictly coarser than the given topology on E.

Remarks. If F is complete for $o(F, E)$, then F is boundedly order complete for $\sigma(F, E)$ by (3.1).

Suppose that E is a vector lattice, then we know that E^b is an order complete vector lattice (cf. Introduction) and that $|f|$ for $f \in E^b$ is defined by $|f|(x) = \sup\limits_{y \in [-x, x]} \langle y, f\rangle$ for each $x \in K$. If F is a sublattice of E^b, then the $o(F, E)$-neighborhood basis $\{[-x, x]^\circ\}_{x \in K}$ of θ consists of solid sets. If F is complete for $o(F, E)$, then each $[-x, x]^\circ$ is order complete; for let A be a directed ($\leqq$) subset of $[-x, x]^\circ$ that is majorized in F. Then $\mathfrak{F}(A)$ is $\sigma(F, E)$-bounded since it contains an order interval, therefore $\mathfrak{F}(A)$ converges to $\sup A$ for $o(F, E)$ (cf. proof of 3.1). But $[-x; x]^\circ$ is $o(F, E)$-closed, hence $\sup A \in [-x, x]^\circ$ which proves the assertion. We conclude that, in this case, F is locally order complete for $o(F, E)$[4]).

We shall now turn to the consideration of bands in an order complete vector lattice and some of their relations to $o(F, E)$. In addition to our general assumption that $F \subset E^b$, we shall assume that E is a vector lattice throughout the remainder of this section.

The first proposition contains a characterization of a band in an order complete vector lattice which is essentially a generalization of a result due to Gordon [6] concerning what he called the Riesz space weak* topology. He defined this topology on the dual E' of a locally convex vector lattice E by the generating system of semi-norms

$$p_{x_0}(y) = |y|(x_0) \qquad (x_0 \in K) .$$

[4]) This result can be found in [18] (Theorem 4) for the case when F is a locally convex lattice and $E = F'$. The proof given above represents only an adaptation of his proof to our more general framework.

However, by the definition of the lattice operations in E' we have

$$|y|\,(x_0) = \sup_{z \in [-x_0, x_0]} \langle z, y \rangle$$

From this it is clear that the Riesz space weak* topology is $o(F, E)$ in the special case when E is a locally convex lattice and $F = E'$.

Lemma: *The closure of an ideal in a locally solid vector lattice is an ideal.*

Proof. Let E be a locally solid vector lattice and let H be an ideal in E. If $x \in \overline{H}$ and $|y| \leqq |x|$, choose a net $\{x_\alpha\}$ in E such that $x_\alpha \to x$, that is, $x = x_\alpha + u_\alpha$ where $u_\alpha \to \theta$. Then $|x| \leqq |x_\alpha| + |u_\alpha|$ and $|u_\alpha| \to \theta$ since the lattice operations in E are continuous. Since $\theta \leqq y^+ \leqq |x|$, there exist nets $\{y_\alpha\}$ and $\{v_\alpha\}$ with $y^+ = y_\alpha + v_\alpha$ and $\theta \leqq y_\alpha \leqq |x_\alpha|$, $\theta \leqq v_\alpha \leqq |u_\alpha|$. By the normality of the cone, we conclude that $v_\alpha \to \theta$, that is $y_\alpha \to y^+$. But H is solid, hence $\{y_\alpha\} \subset H$ and thus $y^+ \in \overline{H}$. In a similar manner it follows that $y^- \in \overline{H}$, hence $y \in \overline{H}$.

Proposition 3.2: *Let F be a sublattice of E^b which is order complete, then F is locally order complete for $o(F, E)$. B is a band in F if and only if B is an $o(F, E)$-closed ideal in F.*

Proof. We shall first show that if A is a majorized directed $(\leqq)$ subset of F, then $\mathfrak{F}(A)$ converges to $y_0 = \sup A$ for $o(F, E)$. Let $y_0 + [-x_0, x_0]^\circ$ $(x_0 \in K)$ be a given $o(F, E)$-neighborhood of y_0. Since $\langle x_0, y_0 \rangle = \sup_{y \in A} \langle x_0, y \rangle$, we can choose a $y_1 \in A$ such that $\langle x_0, y_0 - y_1 \rangle \leqq 1$. Then if $x \in [-x_0, x_0]$ and $y \in S_{y_1}$ we have $\langle x, y_0 - y \rangle \leqq \langle x_0, y_0 - y \rangle \leqq \langle x_0, y_0 - y_1 \rangle \leqq 1$; hence $S_{y_1} \subset y_0 + [-x_0, x_0]^\circ$. Therefore, $\mathfrak{F}(A)$ converges to $\sup A$ for $o(F, E)$. The fact that F is locally order complete for $o(F, E)$ now follows as it did in the Remarks after (3.1).

Suppose B is an $o(F, E)$-closed ideal in F and let A be a directed $(\leqq)$ subset of B that is majorized in F. Then $\sup A \in \overline{A}$ for $o(F, E)$ since $\mathfrak{F}(A)$ converges to $\sup A$ for $o(F, E)$. Hence $\sup A \in B$, that is, B is a band in F. Conversely, suppose B is a band in F, then B is certainly an ideal in F. If P denotes the projection of F onto B, then P is $o(F, E)$-continuous since $o(F, E)$ is locally solid. But $o(F, E)$ is Hausdorff and $B = (I - P)^{-1}(\theta)$, hence B is $o(F, E)$-closed.

Corollary: Let F be an order complete sublattice of E^b and let H be an ideal in F, then the closure $\overline{H}$ of H for $o(F, E)$ is identical to the band generated by H in F.

Proof. Since $\overline{H}$ is an $o(F, E)$-closed ideal by the lemma preceding (3.2), it follows from (3.2) that $\overline{H}$ is a band in F. Therefore $\overline{H}$ contains the band H'' generated by H. But H'' is a band in F hence H'' is closed for $o(F, E)$ by (3.2). Therefore $H'' = \overline{H}$.

Theorem 3.3: *Let F be an ideal in E^b, then the $o(F, E)$-completion of F is the band in E^b generated by F.*

Proof. We shall first show that E^b is complete for $o(E^b, E)$. E^b is locally order complete for $o(E^b, E)$ by (3.2). We assert that E^b is boundedly order complete for this topology. For let A be an $o(E^b, E)$-bounded directed $(\leqq)$

subset of E. Then A is $\sigma(E^b, E)$-bounded so that for each $x_0 \in K$, $\sup\limits_{y \in A} \langle x_0, y \rangle$ exists. Therefore $\sup A$ exists in E^b which proves our assertion. We conclude from Theorem 1 of [18] and Theorem 4.2 of [11] that E^b is complete for $o(E^b, E)$.

Since $\langle E, F \rangle$ is a dual system and $F \subset E^b$, $o(E^b, E)$ induces $o(F, E)$ on F. Hence the completion of F for $o(F, E)$ is the $o(E^b, B)$-closure of F in E^b. In view of (3.2) Corollary, the $o(E^b, E)$-closure of F in E^b is the band in E^b generated by F. This completes the proof.

Example. Consider the space (c_0) of all real null sequences, ordered by the cone K of sequences in (c_0) with non-negative terms and equipped with the topology generated by the norm $\|x\| = \sup\limits_i |x_i|$. (c_0) is an order complete Banach lattice whose dual can be identified with the space l^1 of real sequences $y = (y_i)$ for which $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |y_i| < +\infty$. The dual cone H of K consists of those sequences in l^1 which have non-negative terms. It is well known that l^1 is a Banach lattice for this order and the topology generated by the norm $\|y\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |y_i|$, and that the dual of l^1 for this topology can be identified with the space (m) of bounded real sequences. Thus $(l^1)^b = (m)$ ([12], (5.5) Corollary). It can easily be seen that the dual cone of H in (m) consists of those sequences with non-negative terms and that (c_0) is an ideal in (m).

(c_0) is not a band in (m). For if $\{x_n\}$ is the sequence in (c_0) defined by

$$x_{ni} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \text{ is even or if } i \geqq 2n \\ 1 & \text{if } i \text{ is odd and if } i < 2n \end{cases}$$

then $\{x_n\}$ has the supremum x_0, given by

$$x_{0i} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \text{ is even} \\ 1 & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases}$$

in (m) but $x \notin (c_0)$. Thus (c_0) is not complete for $o(c_0, l^1)$ by (3.3). If $z \in (m)$ and $\inf(|x|, |z|) = \theta$ for all $x \in (c_0)$, then $z = \theta$. Hence the band in (m) generated by (c_0) coincides with (m) (cf. [3], p. 25, Theorem 1). We conclude from (3.3) that the completion of (c_0) for $o(c_0, l^1)$ can be identified with (m).

If E is an order complete vector lattice and $\mathfrak{F}$ is a filter on E which contains an order bounded set, then $\mathfrak{F}$ *order converges* to $x \in E$ if $\sup\limits_{B \in \mathfrak{B}} \{\inf B\} = x = \inf\limits_{B \in \mathfrak{B}} \{\sup B\}$ where $\mathfrak{B}$ denotes the class of order bounded subsets of $\mathfrak{F}$ (cf. [3], Chapt. 2, § 1, Exercise 9). We shall conclude this section with a relation between order convergence and $o(F, E)$-convergence for filters whose proof involves completeness considerations for $o(F, E)$.

Proposition 3.4: *Let F be a sublattice of E^b which is an order complete vector lattice, then every order convergent filter in F converges to its order limit for $o(F, E)$.*

Proof. We shall first show that if F is complete for $o(F, E)$, then every order convergent filter on F converges for $o(F, E)$. Let $\mathfrak{F}$ be an order convergent filter on F; without loss in generality we can assume that $\mathfrak{F}$ order converges to θ, that is, $\inf_{B \in \mathfrak{B}} \{\sup B\} = \theta = \sup_{B \in \mathfrak{B}} \{\inf B\}$ (where $\mathfrak{B}$ denotes the class of order bounded sets in $\mathfrak{F}$). The set $\{\sup B\}_{B \in B}$ (resp. the set $\{\inf B\}_{B \in B}$) is directed ($\geq$) (resp. directed ($\leq$)) by the inclusion ordering on $\mathfrak{B}$. As we noted in the proof of (3.1), the filter $\mathfrak{S}_s$ (resp. the filter $\mathfrak{S}_I$) of sections of this set converges to θ in F for $o(F, E)$. Hence there is a $B_0 \in \mathfrak{B}$ such that $\inf B_0 \in U$ and $\sup B_0 \in U$, where U is a given full neighborhood of θ for $o(F, E)$. But then $B_0 \subset U$, hence $\mathfrak{F}$ converges to θ for $o(F, E)$.

Now suppose that F is not necessarily complete for $o(F, E)$ and let $\mathfrak{F}$ be an order convergent filter on F. Then $\mathfrak{F}$ is a base for an order convergent filter in E^b, hence since E^b is complete for $o(E^b, E)$, $\mathfrak{F}$ converges for $o(E^b, E)$. But $o(E^b, E)$ induces $o(F, E)$ on F, hence $\mathfrak{F}$ converges for $o(F, E)$ which completes the proof.

IV. Linear mappings

In this section we shall consider the relation between order boundedness and continuity for linear mappings. These considerations will be applied to the study of the order properties of vector spaces of linear maps which are continuous for certain topologies. We shall assume that E_1 and E_2 are ordered with the positive cones K_1 and K_2 respectively.

Theorem 4.1: *Let $\langle E_1, F_1\rangle$, $\langle E_2, F_2\rangle$ be dual systems over the real field let K_1' and K_2' be generating cones in F_1 and F_2 respectively, let $E_1 \subset F_1^b$ and $E_2 \subset F_2^b$, and let u be a weakly continuous linear mapping of E_1 into E_2. Then u is continuous for $o(E_1, F_1)$ and $o(E_2, F_2)$ if and only if the adjoint u' of u is order bounded. Each positive weakly continuous linear mapping of E_1 into E_2 is continuous for $o(E_1, F_1)$ and $o(E_2, F_2)$.*

Proof. It is clear from the hypothesis that the $\mathfrak{S}_0$-topologies on E_1 and E_2 are compatible with the linear structure of these spaces and that the class $\{[-x, x]^\circ\}_{x \in K_1}$ (resp. the class $\{[-y, y]^\circ\}_{y \in K_2'}$) is a θ-neighborhood basis for $o(E_1, F_1)$ resp. $o(E_2, F_2)$.

If u is continuous for $o(E_1, F_1)$ and $o(E_2, F_2)$ and if $[-y, y]$ $(y \in K_2')$ is a given order interval in F_2, then there is an $x \in K_1'$ such that $u([-x, x]^\circ) \subset \subset [-y, y]^\circ$. Since K_1' and K_2' are weakly closed, the intervals $[-x, x]$ and $[-y, y]$ are weakly closed convex sets containing θ. Hence $u'([-y, y]) \subset \subset [-x, x]$, that is, u' is order bounded.

Conversely, suppose that u' is order bounded and let $[-y, y]^\circ$ $(y \in K_2')$ be a given $o(E_2, F_2)$-neighborhood of θ. Then there is an $x \in K_1'$ such that $u'([-y, y]) \subset [-x, x]$. Hence $u([-x, x]^\circ) \subset [-y, y]^\circ$, that is, u is continuous for $o(E_1, F_1)$ and $o(E_2, F_2)$.

If u is positive and weakly continuous, then u' exists and is positive. Since each positive linear mapping is order bounded, it follows from the first assertion that u is continuous for $o(E_1, F_1)$ and $o(E_2, F_2)$.

Proposition 4.2: *Let E_1 and E_2 be locally convex vector lattices and let every positive linear form on E_2' be $\tau(E_2', E_2)$-continuous. Then the following assertions are equivalent:*

(a) *The class $\mathfrak{L}_w(E_1, E_2)$ of weakly continuous linear mappings of E_1 into E_2 is a vector lattice (for the order determined by the cone $\mathfrak{K}_w$ of positive weakly continuous linear mappings of E_1 into E_2).*

(b) *Each weakly continuous linear mapping of E_1 into E_2 is continuous for $o(E_1, E_1')$ and $o(E_2, E_2')$.*

If, in addition, E_2 is locally order complete, then condition (b) is equivalent to the assertion that $\mathfrak{L}_w(E_1, E_2)$ is a locally convex lattice for the topology of bounded convergence.

Proof. Since E_1 and E_2 are locally convex lattices, it follows that E_1' and E_2' are order complete vector lattices (cf. [6], 1.10) and that $E_1 \subset (E_1')^b$, $E_2 \subset (E_2')^b$.

Suppose that condition (a) is satisfied and that u is a weakly continuous linear mapping of E_1 into E_2. Then $u = u^+ - u^-$ where u^+, $u^- \in \mathfrak{L}_w$. Thus Theorem (4.1) implies that u^+ and u^- are continuous for $o(E_1, E_1')$ and $o(E_2, E_2')$, hence u is continuous for these topologies.

Conversely, assume that condition (b) is satisfied and let $u \in \mathfrak{L}_w(E_1, E_2)$. Then u is continuous for $o(E_1, E_1')$ and $o(E_2, E_2')$, hence u' is order bounded by (4.1). Since E_1' and E_2' are order complete vector lattices, $v(y) = \sup\{u'(z) : \theta \leqq z \leqq y\}$ defines a positive linear map v of E_2' into E_1' (cf. [1], p. 245, Theorem 7). If $x \in K_1$, then $\langle v^* x, y\rangle = \langle x, vy\rangle \geqq 0$ for all $y \in K_2'$, hence $v^* x$ is a positive linear form on E_2'. Therefore, $v^* x \in E_2$ since $v^* x$ is a $\tau(E_2', E_2)$-continuous linear form, and we conclude that $v^*(E_1) \subset E_2$ since K_1 is generating. Thus the restriction v' of v^* to E_1 is in $\mathfrak{L}_w(E_1, E_2)$. Furthermore, v' is easily seen to be the supremum of u and θ, consequently $\mathfrak{L}_w(E_1, E_2)$ is a vector lattice.

To complete the proof it suffices to show that if condition (b) is satisfied and E_2 is locally order complete, then $\mathfrak{L}_w(E_1, E_2)$ is a locally solid vector lattice for the topology of bounded convergence. Since E_1 and E_2 are locally convex lattices, it follows that K_1 is a $\mathfrak{b}$-cone and that K_2 is weakly normal. Therefore, the cone $\mathfrak{K}_w$ in $\mathfrak{L}_w(E_1, E_2)$ is normal for the topology of bounded convergence ([15], Theorem 8.3). Consequently, the proof will be complete if we can show that the mapping $u \to u^+$ is continuous at θ for this topology. Let $T(S, V) = \{u \in \mathfrak{L}_w(E_1, E_2) : u(S) \subset V\}$ be a given neighborhood of θ for the topology of bounded convergence (where S is a bounded set in E_1 and V is a θ-neighborhood in E_2). Choose a circled order complete θ-neighborhood W in E_2 such that $W + W \subset V$. The solid hull (S) of S is a bounded set in E_1 since E_1 is a locally convex lattice. If $u \in T((S), W)$, then for each $x \in S$ we have $u^+(x) = u^+(x^+) - u^+(x^-) = \sup\{u(z) : \theta \leq z \leq x^+\} - \sup\{u(w) : \theta \leq w \leq x^-\} \in$ $\in W - W \subset V$ since W is order complete and u is order bounded. Thus $u^+ \in T(S, V)$ which completes the proof.

If E_1 and E_2 are locally convex lattices, then $\mathfrak{L}(E_1, E_2)$ (resp. $\mathfrak{L}_0(E_1, E_2)$) denotes the vector space of all linear mappings of E_1 into E_2 that are continuous

for the given topologies on E_1 and E_2 (resp. for the topologies $o(E_1, E_1')$ and $o(E_2, E_2')$).

Corollary 1: Let E_1 and E_2 be locally convex vector lattices such that every positive linear form on E_2' is $\tau(E_2', E_2)$-continuous and such that $o(E_1, E_1') = \tau(E_1, E_1')$. Then $\mathfrak{L}(E_1, E_2)$ is a vector lattice. If E_2 is locally order complete, then $\mathfrak{L}(E_1, E_2)$ is a locally convex lattice for the topology of bounded convergence. If E_1' is of minimal type, then $\mathfrak{L}(E_1, E_2)$ is an order complete vector lattice.

Proof. Since E_1 and E_2 are locally convex lattices, $o(E_1, E_1')$ and $o(E_2, E_2')$ are consistent topologies by (2.1) Corollary 2. The fact that $o(E_1, E_1') = \tau(E_1, E_1')$ implies that the classes $\mathfrak{L}(E_1, E_2)$, $\mathfrak{L}_w(E_1, E_2)$, $\mathfrak{L}_0(E_1, E_2)$ all coincide. The first two assertions now follow from (4.2).

Suppose that E_1' is of minimal type and that A is a majorized directed ($\leqq$) subset of $\mathfrak{K}_w$. Set $w(y) = \sup\{u'(y) : u \in A\}$ for each $y \in K_2'$; then it is clear that $w(y_1 + y_2) \leqq w(y_1) + w(y_2)$ for $y_1, y_2 \in K_2'$. On the other hand, since E_1' is minimal we have $f[w(y)] = \sup\{f[u'(y)] : u \in A\}$ for each positive linear form f on E_1'. Hence if $\varepsilon > 0$ is given, there exist $u_1, u_2 \in A$ such that

$$f[u_1'(y_1)] \geqq \sup\{f[u'(y_1)] : u \in A\} - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$f[u_2'(y_2)] \geqq \sup\{f[u'(y_2)] : u \in A\} - \frac{\varepsilon}{2}$$

Choose $u_3 \in A$ such that $u_3 \geqq u_1$ and $u_3 \geqq u_2$, then

$$f[u_3'(y_1 + y_2)] \geqq \sup\{f[u'(y_1)] : u \in A\} + \sup\{f[u'(y_2)] : u \in A\} - \varepsilon$$

for each fixed positive linear form f on E_1'. Thus $\{u'(y_1 + y_2) : u \in A\}$ converges to $w(y_1) + w(y_2)$ for $\sigma(E_1', E_1'^{+})$: Since $\sigma(E_1', E_1'^{+})$ is finer than $\sigma(E_1', E_1)$, the cone K_1' is closed for $\sigma(E_1', E_1'^{+})$. Therefore, $\sup\{u'(y_1 + y_2) : u \in A\} = w(y_1) + + w(y_2)$ (cf. [3], p. 26, Proposition 6) and we conclude that $y \to w(y)$ defines an additive function on K_2'. Since w is clearly non-negatively homogeneous and $w(y) \geqq \theta$ for all $y \in K_2'$, this function can be uniquely extended to a positive linear mapping $y \to w(y)$ on E_2' into E_1'. The fact that the adjoint w' of w exists follows as it did for v in the proof of (4.2). Furthermore, w' can easily be seen to be the supremum of A in $\mathfrak{L}(E_1, E_2)$ which completes the proof.

Corollary 2: Let E_1 and E_2 be locally convex lattices, let E_1' have an order unit, let E_2 be reflexive, and let E_2' be metrizable for the strong topology. Then $\mathfrak{L}(E_1, E_2)$ is a locally convex lattice for the topology of bounded convergence.

Proof. The reflexivity of E_2 implies that $\beta(E_2', E_2) = \tau(E_2', E_2)$ and consequently, that E_2' is complete and metrizable for $\tau(E_2', E_2)$. Since K_2 is a normal cone in E_2, K_2' is $\tau(E_2', E_2)$-closed and generating in E_2'. Hence every positive linear form on E_2' is $\tau(E_2', E_2)$-continuous ([12], 5.5 Corollary). The assumption that E_1' has an order unit implies that $o(E_1, E_1') = \tau(E_1, E_1')$ by (1.3) since $o(E_1, E_1')$ is necessarily consistent with $\langle E_1, E_1' \rangle$ by (2.1) Corollary 2. In view of the corollary to Theorem 3 in [18], E_2 is locally order complete. The desired result now follows from Corollary 1.

V. Convergence topologies

A general method for defining a topology on a set in terms of the convergence of a given class of filters has been discussed by N. BOURBAKI (cf. [4], Chapter 1, sec. 7). We shall begin this section by pointing out a different approach to the definition of this topology.

Let E be a set, then a *convergence class* $\Lambda(E)$ for E is a class of ordered pairs $(\mathfrak{F}, x)$ where $\mathfrak{F}$ is a filter on E and $x \in E$. We shall always assume that $\Lambda(E)$ satisfies the following conditions:

(C1) For each $x \in E$, $(\mathfrak{U}, x) \in \Lambda(E)$ where $\mathfrak{U}$ is the ultrafilter with base $\{x\}$.

(C2) If $(\mathfrak{F}, x) \in \Lambda(E)$ and $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F}$, then $(\mathfrak{G}, x) \in \Lambda(E)$.

Let $\mathfrak{P}(E)$ denote the class of all subsets of E, then for each $A \in \mathfrak{P}(E)$ we define the set $A_{(\eta)} \in \mathfrak{P}(E)$ as follows:

(a) Set $A_{(0)} = A$.

(b) If η is an ordinal number which is not a limit number, define $A_{(\eta)}$ to be the set of all $x \in E$ such that there is an $(\mathfrak{F}, x) \in \Lambda(E)$ for which the trace of $\mathfrak{F}$ on $A_{(\eta-1)}$ is a filter.

(c) If η is a limit number, set $A_{(\eta)} = \bigcup_{\mu<\eta} A_{(\mu)}$.

By virtue of condition (C1) we have $A \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. These inclusions cannot all be proper; for example, if η is an ordinal number associated with some well ordering of $\mathfrak{P}(E)$, then $A_{(\eta)} = A_{(\eta+1)}$. Let η_A be the smallest ordinal η for which $A_{(\eta)} = A_{(\eta+1)}$. Then it is clear that $A_{(\eta)} = A_{(\eta+1)}$ for all $\eta \geqq \eta_A$.

Proposition 5.1: *The mapping $A \to \overline{A} = A_{(\eta_A)}$ of $\mathfrak{P}(E)$ into itself is a closure operation. The resulting topology $\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}$ is the finest topology $\mathfrak{T}$ on E for which $(\mathfrak{F}, x) \in \Lambda(E)$ implies that $\mathfrak{F}$ is $\mathfrak{T}$-convergent to x.*

Proof. It is clear that $\overline{\theta} = \theta$ and that $A \subset \overline{A}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ for each $A \in \mathfrak{P}(E)$. Let $A, B \in \mathfrak{P}(E)$, then we must show that $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. We assert that $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. For if $(\mathfrak{F}, x) \in \Lambda(E)$ and the trace of $\mathfrak{F}$ on $\overline{A} \cup \overline{B}$ is a filter, then either the trace of $\mathfrak{F}$ on $\overline{A}$ or the trace of $\mathfrak{F}$ on $\overline{B}$ is a filter. Consequently, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ which proves the desired inclusion. Since $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ and $\overline{A}, \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, we obtain the relation $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Suppose that $(\mathfrak{F}, x) \in \Lambda(E)$ but that $\mathfrak{F}$ does not converge to x for $\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}$, then there is a filter $\mathfrak{G}$ finer than $\mathfrak{F}$ such that $x \notin \bigcap_{G \in \mathfrak{G}} \overline{G}$. By condition (C2) $(\mathfrak{G}, x) \in \Lambda(E)$ hence $x \in \overline{G}$ for each $G \in \mathfrak{G}$, that is $x \in \bigcap_{G \in \mathfrak{G}} \overline{G}$. This contradiction proves that if $(\mathfrak{F}, x) \in \Lambda(E)$ then $\mathfrak{F}$ is $\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}$-convergent to x.

Let $\mathfrak{T}$ be any topology on E for which $(\mathfrak{F}, x) \in \Lambda(E)$ implies that $\mathfrak{F}$ is $\mathfrak{T}$-convergent to x. Let A be a $\mathfrak{T}$-closed subset of E and let $(\mathfrak{F}, x) \in \Lambda(E)$ be such that the trace of $\mathfrak{F}$ on A is a filter. Then since $\mathfrak{F}$ is $\mathfrak{T}$-convergent to x, it follows that $x \in \overline{A} = A$ (for $\mathfrak{T}$). Therefore A is $\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}$-closed, thus $\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}$ is finer than $\mathfrak{T}$ which completes the proof.

Remarks. Proposition (5.1) makes it clear that the topology $\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}$ coincides with the topology introduced by BOURBAKI that we referred to at the beginning of this section.

Note that a set B is open (resp. closed) for $\mathfrak{T}_{A(E)}$ if and only if $x \in B$ implies that $B \in \mathfrak{F}$ for all filters $\mathfrak{F}$ on E for which $(\mathfrak{F}, x) \in A(E)$ (resp. if and only if $x \in B$ whenever $(\mathfrak{F}, x) \in A(E)$ and the trace of $\mathfrak{F}$ on B is a filter).

Let E and F be sets and let $A(E)$ and $A(F)$ be convergence classes associated with E and F. If $\mathfrak{F}$ is a filter on E and f is a mapping on E into F, then the symbol $\mathfrak{F}(f)$ will denote the filter on F with the base $\{f(A) : A \in \mathfrak{F}\}$.

Proposition 5.2: *Let f be a mapping on E into F such that $(\mathfrak{F}, x) \in A(E)$ implies that $(\mathfrak{F}(f), f(x)) \in A(F)$, then f is continuous for $\mathfrak{T}_{A(E)}$ and $\mathfrak{T}_{A(F)}$.*

Proof. Let O be a $\mathfrak{T}_{A(E)}$-open subset of F and let $w \in f^{-1}(O)$. By hypothesis, if $(\mathfrak{F}, w) \in A(E)$, then $(\mathfrak{F}(f), f(w)) \in A(F)$; hence since $f(w) \in O$, we know that $O \in \mathfrak{F}(f)$. Therefore, there is an $A \in \mathfrak{F}$ such that $f(A) \subset O$, that is, $A \subset f^{-1}(O)$. We conclude that $f^{-1}(O)$ is open for $\mathfrak{T}_{A(E)}$, hence f is continuous for $\mathfrak{T}_{A(E)}$ and $\mathfrak{T}_{A(F)}$.

Let E and F be sets and let $A(E)$, $A(F)$, $A(E \times F)$ denote convergence classes associated with $E, F, E \times F$, respectively, subject to (C1), (C2), and the following conditions:

(C3) If $(\mathfrak{H}, x) \in A(E \times F)$, then $(\mathfrak{H}(p), p(x)) \in A(E)$ and $(\mathfrak{H}(q), q(x)) \in A(F)$ where p (resp q) denotes the projection of $E \times F$ onto E (resp. F).

(C4) If $(\mathfrak{F}, y) \in A(E)$ and $(\mathfrak{G}, z) \in A(F)$, then $(\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}, x) \in A(E \times F)$ where $x = (y, z)$.

The symbol $A_0(E)$ (resp. $A_0(F)$) will denote the convergence class $\{(\mathfrak{U}_x, x)\}_{x \in E}$ (resp. $\{(\mathfrak{U}_y, y)\}_{y \in F}$) where $\mathfrak{U}_x$ (resp. $\mathfrak{U}_y$) denotes the ultrafilter with base $\{x\}$ (resp. $\{y\}$). It is clear that $\mathfrak{T}_{A_0(E)}$ (resp. $\mathfrak{T}_{A_0(F)}$) coincides with the discrete topology on E (resp. F).

Proposition 5.3: *$\mathfrak{T}_{A(E \times F)}$ is finer than $\mathfrak{T}_{A(E)} \times \mathfrak{T}_{A(E)}$ on $E \times F$ and coarser than both $\mathfrak{T}_{A(E)} \times \mathfrak{T}_{A_0(F)}$ and $\mathfrak{T}_{A_0(E)} \times \mathfrak{T}_{A(F)}$.*

Proof. Let $(\mathfrak{H}, x) \in A(E \times F)$, then by condition (C3), $(\mathfrak{H}(p), p(x)) \in A(E)$ and $(\mathfrak{H}(q), q(x)) \in A(F)$. It follows from (5.1) that $\mathfrak{H}(p)$ converges to $p(x)$ for $\mathfrak{T}_{A(E)}$ and that $\mathfrak{H}(q)$ converges to $q(x)$ for $\mathfrak{T}_{A(F)}$. We conclude that $\mathfrak{H}$ converges to x for $\mathfrak{T}_{A(E)} \times \mathfrak{T}_{A(F)}$. Therefore $\mathfrak{T}_{A(E \times F)}$ is finer than $\mathfrak{T}_{A(E)} \times \mathfrak{T}_{A(F)}$ by (5.1).

Let U be a $\mathfrak{T}_{A(E \times F)}$-open subset of $E \times F$ and let $(x_0, y_0) \in U$. Consider the set $E \times \{y_0\} = \{(x, y_0) : x \in E\}$ equipped with the topology $\mathfrak{T}_{A(E \times (y_0))}$ where $A(E \times \{y_0\}) = \{(\mathfrak{F} \times \{y_0\}, (x, y_0)) : (\mathfrak{F}, x) \in A(E)\}$. Define $V = U \cap (E \times \{y_0\})$, then we assert that V is an open set in $E \times \{y_0\}$. For if $(x, y_0) \in V$ and $(\mathfrak{F} \times \{y_0\}, (x, y_0)) \in A(E \times \{y_0\})$, then $\mathfrak{F} \times \{y_0\}$ is a filter base in $E \times F$ for the filter $\mathfrak{F} \times \mathfrak{U}_{y_0}$ and $(\mathfrak{F} \times \mathfrak{U}_{y_0}, (x, y_0)) \in A(E \times F)$. Therefore, $U \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{U}_{y_0}$, that is, $V \in \mathfrak{F} \times \{y_0\}$ which proves the assertion. It can easily be seen from (5.2) that E is homeomorphic to $E \times \{y_0\}$ with respect to the correspondence $x \to (x, y_0)$. It follows that V is a $\mathfrak{T}_{A(E)} \times \mathfrak{T}_{A_0(F)}$-open set containing (x_0, y_0) which is contained in U. Therefore U is open for $\mathfrak{T}_{A(E)} \times \mathfrak{T}_{A_0(F)}$ which completes the proof.

Suppose that E is a vector space over the real field R and let $A(E)$ and $A(E \times E)$ (resp. $A(E)$, $A(R)$, $A(R \times E)$) be convergence classes for which conditions (C1)—(C4) are satisfied. We shall assume that $\mathfrak{T}_{A(R)}$ coincides with the unique Hausdorff compatible topology on R. The first and second coordinate

projections of $E \times E$ (or $R \times E$) will be denoted by p and q, respectively. Let f (resp. g) be the mapping of $E \times E$ (resp. $R \times E$) into E defined by $f(y, z) = y + z$ (resp. $g(\lambda, z) = \lambda z$). If $(\mathfrak{H}, x) \in \Lambda(E \times E)$ (resp. $(\mathfrak{H}, x) \in \Lambda(R \times E)$) then $\mathfrak{H} \geqq (\mathfrak{H}(p) \times \mathfrak{H}(q))$ and $(\mathfrak{H}(q), q(x)) \in \Lambda(E)$, $(\mathfrak{H}(p), p(x)) \in \Lambda(E)$ (resp. $(\mathfrak{H}(p), p(x)) \in \Lambda(R)$) by condition (C3). Suppose that these convergence classes also satisfy the following condition:

(C5) If $(\mathfrak{H}, x) \in \Lambda(E \times E)$, then $([\mathfrak{H}(p) \times \mathfrak{H}(q)](f), x_1 + x_2) \in \Lambda(E)$ and if $(\mathfrak{K}, x) \in \Lambda(R \times E)$, then $([\mathfrak{K}(p) \times \mathfrak{K}(q)](g), \lambda z) \in \Lambda(E)$ where $x_1 = p(x)$, $x_2 = q(x)$ for $E \times E$ and $\lambda = p(x)$, $z = q(x)$ for $R \times E$.

It follows from condition (C2) that $(\mathfrak{H}(f), x_1 + x_2) \in \Lambda(E)$ and that $(\mathfrak{K}(g), \lambda z) \in \Lambda(E)$. Therefore (5.2) implies that f is continuous for $\mathfrak{T}_{\Lambda(E \times E)}$ and $\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}$, and that g is continuous for $\mathfrak{T}_{\Lambda(R \times E)}$ and $\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}$. Hence since $\mathfrak{T}_{\Lambda(E \times E)}$ is coarser than the product topology of $\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}$ and $\mathfrak{T}_{\Lambda_2(E)}$, and since $\mathfrak{T}_{\Lambda(R \times E)}$ is coarser than $\mathfrak{T}_{\Lambda(R)} \times \mathfrak{T}_{\Lambda_2(E)}$ and $\mathfrak{T}_{\Lambda_2(R)} \times \mathfrak{T}_{\Lambda(E)}$, the linear operations in $E(\mathfrak{T}_{\Lambda(E)})$ are continuous in each variable separately. Thus we have proved the following result.

Proposition 5.4: *If E is a vector space for which the associated convergence classes satisfy* (C1)—(C5), *then the linear operations are separately continuous.*

In section 6, we shall show, by means of an example, that $\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}$ is not a locally convex topology in general. However, there is a locally convex topology that can be associated with $\Lambda(E)$ in a natural way. For if we define $\mathfrak{W}$ to be the class of all convex, radial, circled subsets V of E such that $V \in \mathfrak{F}$ whenever $(\mathfrak{F}, \theta) \in \Lambda(E)$, then $\mathfrak{W}$ is a θ-neighborhood basis for a locally convex topology $[\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}]$. To see this, it suffices to show that if $V \in \mathfrak{W}$, then $\frac{1}{2} V \in \mathfrak{W}$. Assume to the contrary that there is an $(\mathfrak{F}, \theta) \in \Lambda(E)$ such that $\frac{1}{2} V \notin \mathfrak{F}$. Then $\{C(\frac{1}{2} V) \cap A\}_{A \in \mathfrak{F}}$ is a filter base for a filter $\mathfrak{G}$ on E which is finer than $\mathfrak{F}$ so that $(\mathfrak{G}, \theta) \in \Lambda(E)$ by (C2). Since $(\mathfrak{U}_2, 2) \in \Lambda(R)$ by (C1), it follows from (C4) that $(\mathfrak{U}_2 \times \mathfrak{G}, [2, \theta]) \in \Lambda(R \times E)$. Therefore we conclude from (C5) that $([\mathfrak{U}_2 \times \mathfrak{G}](g), 2\theta) = (2\mathfrak{G}, \theta) \in \Lambda(E)$[5]. Since there is an $A \in \mathfrak{G}$ such that $\frac{1}{2} V \cap A = \theta$, it follows that $2A \cap V = \theta$. Therefore $V \notin 2\mathfrak{G}$ which contradicts the definition of V.

Proposition (5.5): $[\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}]$ *is the finest locally convex topology $\mathfrak{T}$ on E for which $(\mathfrak{F}, x) \in \Lambda(E)$ implies that $\mathfrak{F}$ is $\mathfrak{T}$-convergent to x.*

Proof. Suppose $(\mathfrak{F}, x) \in \Lambda(E)$, then since $(\mathfrak{U}_{-x}, -x) \in \Lambda(E)$ by (C1), it follows from (C4) that $([\mathfrak{U}_{-x} \times \mathfrak{F}], [-x, x]) \in \Lambda(E \times E)$, Thus $([\mathfrak{U}_{-x} \times \mathfrak{F}](f), -x + x) = (\mathfrak{F} - x, \theta) \in \Lambda(E)$[5]), that is, $x + V \in \mathfrak{F}$. Therefore $\mathfrak{F}$ converges to x for $[\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}]$.

Suppose that $\mathfrak{T}$ is any other locally convex topology on E for which $(\mathfrak{F}, x) \in \Lambda(E)$ implies that $\mathfrak{F}$ is $\mathfrak{T}$-convergent to x. Then if V is a convex, circled $\mathfrak{T}$-neighborhood of θ and $(\mathfrak{F}, \theta) \in \Lambda(E)$, then $V \in \mathfrak{F}$. Thus $V \in \mathfrak{W}$ which implies that $\mathfrak{T} \leq [\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}]$.

---

5) Given a filter $\mathfrak{F}$ on a vector space E, the filter with base $\{\lambda A : A \in \mathfrak{F}\}$ (resp. $\{A + x_0 : A \in \mathfrak{F}\}$) will be denoted by $\lambda \mathfrak{F}$ (resp. $\mathfrak{F} + x_0$).

Suppose that E, F are vector spaces and that $\Lambda(E)$, $\Lambda(F)$ are convergence classes on E and F respectively, which satisfy (C1)—(C5), then the following analog to Proposition (5.2) holds for $[\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}]$ and $[\mathfrak{T}_{\Lambda(F)}]$.

Proposition (5.6): *If f is a linear mapping on E into F such that $(\mathfrak{F}, \theta) \in \Lambda(E)$ implies that $(\mathfrak{F}(f), \theta) \in \Lambda(F)$, then f is continuous for $[\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}]$ and $[\mathfrak{T}_{\Lambda(F)}]$.*

Proof. Suppose that V is a convex, circled neighborhood of θ for $[\mathfrak{T}_{\Lambda(F)}]$, then $f^{-1}(V)$ is a convex radial, circled subset of E since f is linear. Moreover, if $(\mathfrak{F}, \theta) \in \Lambda(E)$, then there is an $A \in \mathfrak{F}$ such that $f(A) \subset V$. Therefore $A \subset f^{-1}(V)$, that is, $f^{-1}(V) \in \mathfrak{F}$. It follows that $f^{-1}(V)$ is a neighborhood of θ for $[\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}]$, hence f is continuous for $[\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}]$ and $[\mathfrak{T}_{\Lambda(F)}]$.

We shall now consider some particular convergence classes which are of interest in the theory of ordered vector spaces. Our first application deals with the convergence class determined by order convergence in an order complete vector lattice (cf. remarks preceding 3.4).

It is easily verified that if $\mathfrak{F}$ is a filter on an order complete vector lattice E which order converges to $x \in E$, then every filter $\mathfrak{G}$ finer than $\mathfrak{F}$ also order converges to x. Moreover, for each $x \in E$, the ultrafilter $\mathfrak{U}_x$ with base $\{x\}$ order converges to x. Thus the class $\Lambda(E) = \{(\mathfrak{F}, x)\}$ of all pairs $(\mathfrak{F}, x)$ where $\mathfrak{F}$ is a filter that order converges to x satisfies conditions (C1) and (C2).

The fact that order convergence on E, $E \times E$, $R \times E$ satisfies conditions (C3)—(C5) can be concluded from the definition of the order structure in product spaces. The resulting topologies $\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}$ and $[\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}]$ for this choice of $\Lambda(E)$ will be denoted by $\mathfrak{T}_1$ and $[\mathfrak{T}_1]$ respectively. It follows from Proposition 5.1 that $\mathfrak{T}_1$ coincides with the topology $\mathfrak{T}_0(E)$ introduced in [3] (cf. Chapter II, § 1, Exercise 10).

Proposition 5.5: *The lattice operations are continuous in $E(\mathfrak{T}_1)$.*

Proof. By virtue of Proposition (5.2) it suffices to show that the filter $\mathfrak{F}^+$ with the base $\{A^+ : A \in \mathfrak{F}\}$ where $A^+ = \{x^+ : x \in A\}$ order converges to x_0^+ whenever $\mathfrak{F}$ is a filter that order converges to $x_0 \in E$. By making use of the infinite distributive laws (cf. [1], p. 231) we obtain the following results: If $\mathfrak{F}$ order converges to x_0 then $\sup_{A\in\mathfrak{F}} \{\inf A^+\} = \sup_{A\in\mathfrak{F}} \{(\inf A) \cup \theta\} = \sup_{A\in\mathfrak{F}} \{\inf A\} \cup \theta = x_0^+$ and similarly $\inf_{A\in\mathfrak{F}} \{\sup A^+\} = x_0^+$. Thus $\mathfrak{F}^+$ order converges to x_0^+ which completes the proof.

As a second application we shall consider the convergence class determined by "relative uniform star convergence" on a vector lattice E (cf. [1], p. 243).

Let $\{x_n\}$ be a sequence in a vector lattice E, then $\{x_n\}$ converges *relatively uniformly to $x \in E$* if there is a $u \in E$ and a sequence $\lambda_n \downarrow 0$ such that $|x_n - x| \leq \lambda_n u$. A sequence $\{x_n\} \subset E$ is *relatively uniformly star convergent to $x \in E$* if every subsequence contains a subsequence that is relatively uniformly convergent to x.

Let $\Lambda(E)$ be the class of all pairs $(\mathfrak{F}, x)$ where $x \in E$ and $\mathfrak{F}$ is any filter finer than the filter of sections of some sequence $\{x_n\}$ which is relatively uniformly star convergent to x. Obviously, (C1) and (C2) are satisfied. As in the case of order convergence, the fact that the convergence classes determined

by relative uniform star convergence satisfy (C3)—(C5) follows from the definition of order in a product space. For this choice of $\Lambda(E)$, we shall denote the topologies $\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}$ and $[\mathfrak{T}_{\Lambda(E)}]$ by $\mathfrak{T}_*$ and $[\mathfrak{T}_*]$.

Proposition 5.6: *The lattice operations are continuous in $E(\mathfrak{T}_*)$.*

Proof. In view of Proposition (5.2) it suffices to show that if $\{x_n\}$ is relatively uniformly star convergent to x_0 then $\{x_n^+\}$ is relatively uniformly star convergent to x_0^+. Let $\{y_k^+\}$ be a given subsequence of $\{x_n^+\}$ and let us choose a subsequence $\{y_{k_j}\}$ of the corresponding subsequence $\{y_k\}$ of $\{x_n\}$ such that $\{y_{k_j}\}$ converges relatively uniformly to x_0. Then there exist $u \in E$ and $\lambda_j \downarrow 0$ such that $|y_{k_j} - x_0| \leq \lambda_j u$. But since $|y_{k_j}^+ - x_0^+| \leq |y_{k_j} - x_0|$ it follows that $\{y_{k_j}^+\}$ converges relatively uniformly to x_0^+.

VI. Relations between $\mathfrak{T}_0$, $o(E, E^+)$ and the convergence topologies

Proposition 6.1: *Let E be an order complete vector lattice.*

(a) $[\mathfrak{T}_1]$ *is coarser than* $\mathfrak{T}_0$ *on* E.

(b) *If E has an order unit, then $\mathfrak{T}_1$ is coarser than $\mathfrak{T}_0$ on E.*

(c) *If E is of minimal type, then $\mathfrak{T}_1$ is finer than $\mathfrak{T}_0$ on E.*

Proof. Since E is order complete, it is almost archimedean (cf. [3], Chapter II, § 1, Exercise 5). If H is an exhausting subset of K in E, then $E_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} n[-a, a]$ is a sublattice of E which is order complete ($a \in H$). As we noted in the Introduction, the filter base $\mathfrak{U} = \left\{\left[-\frac{1}{n}a, \frac{1}{n}a\right]\right\}_{n \in N}$ constitutes a θ-neighborhood basis for the order topology $\mathfrak{T}_0^{(a)}$ on E_a, hence, since $\mathfrak{U}$ order converges to θ in E_a, it follows from (5.1) and (5.5) that $\mathfrak{T}_0^{(a)}$ is finer than either of the topologies $\mathfrak{T}_1$ or $[\mathfrak{T}_1]$ on $E_a (a \in H)$. In particular, if E has an order unit e, then $E_e = E$ and consequently, $\mathfrak{T}_1$ is coarser than $\mathfrak{T}_0$ on E.

If $\mathfrak{F}$ is a filter that order converges to θ in E_a and f_a is the canonical embedding of E_a into E, it follows that $\mathfrak{F}(f_a)$ order converges to θ in E since E_a is order complete as a sublattice of E. Thus f_a is continuous for $[\mathfrak{T}_1]$ on E_a and $[\mathfrak{T}_1]$ on E by Proposition (5.6). In view of the first part of the proof, f_a is continuous for $\mathfrak{T}_0^{(a)}$ and $[\mathfrak{T}_1]$ on E. Hence, since $E(\mathfrak{T}_0) = \lim_{\rightarrow H} E_a(\mathfrak{T}_0^{(a)})$, it follows from the definition of the inductive limit topology that $[\mathfrak{T}_1] \leq \mathfrak{T}_0$ on E.

To prove (c) we note that if E is of minimal type, then it follows that every order convergent filter converges for $\mathfrak{T}_0$ (cf. [16], Theorem 14.1). Hence (5.1) implies that $\mathfrak{T}_1$ is finer than $\mathfrak{T}_0$ in this case.

Remark. If E is an order complete vector lattice of minimal type and E has an order unit, then $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_0 = [\mathfrak{T}_1]$ by (6.1).

Example. $\mathfrak{T}_1$ and $\mathfrak{T}_0$ do not coincide in general as the following example indicates. Consider the space $B(0, 1)$ of bounded real functions on the unit interval ordered by the cone K of non-negative functions in $B(0, 1)$ and equipped with the topology generated by the norm $\|x\| = \sup\{|x(t)| : 0 \leq t \leq 1\}$. $B(0, 1)$ is a Banach lattice, hence the order topology coincides with the norm topology (cf. footnote on p. 222). The sequence $\{x_n\}$ in $B(0, 1)$ defined by

$$x_n(t) = \sqrt[n]{t} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

order converges to

$$x_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t = 0 \\ 1 & \text{for } 0 < t \leq 1, \end{cases}$$

consequently $x_n \to x_0$ for $\mathfrak{T}_1$. But $\{x_n\}$ is not norm convergent to x_0, hence since $B(0, 1)$ has an order unit, we conclude that $\mathfrak{T}_0$ is strictly finer that $\mathfrak{T}_1$ on $B(0,1)$.

Proposition 6.2: *Let $E(\mathfrak{T})$ be a topological vector lattice (resp. a topological vector lattice with a locally convex topology $\mathfrak{T}$), then $\mathfrak{T}_*$ (resp. $[\mathfrak{T}_*]$) is finer than $\mathfrak{T}$.*

Proof. Suppose that $\{x_n\}$ is a sequence which is relatively uniformly star convergent to θ but that $\{x_n\}$ is not convergent to θ for $\mathfrak{T}$. Then there is a subsequence $\{y_n\}$ of $\{x_n\}$ that contains no subsequence convergent to θ for $\mathfrak{T}$. It follows that there is a solid $\mathfrak{T}$-neighborhood U of θ such that for some subsequence $\{z_n\}$ of $\{y_n\}$ we have $\{z_n\}$ relatively uniformly convergent to θ but $z_n \notin U$ for all n. Choose $y \in E$ and $\lambda_n \downarrow 0$ such that $|z_n| \leq \lambda_n y$ for all n. By the radiality of U there is a $\lambda_0 > 0$ such that $\lambda_0 y \in U$. Choose n_0 so that $\lambda_n \leq \lambda_0$ for all $n \geq n_0$, then $|z_n| \leq \lambda_n y \in U$ for all $n \geq n_0$. Since U is solid, it follows that $z_n \in U$ for $n \geq n_0$ contradicting the choice of $\{z_n\}$. Thus $\{x_n\}$ converges to θ for $\mathfrak{T}$. The result now follows from (5.1) and (5.5).

The following lemma which is used in the proof of Proposition (6.3) involves a construction that is due to G. T. Roberts [13].

Lemma: *Let E be a vector lattice, then if $\{x_n\}$ is a sequence which is not relatively uniformly star convergent to θ, there is a radial solid set U in E such that $x_n \notin U$ for infinitely many n.*

Proof. Suppose that $\{x_n\}$ is not relatively uniformly star convergent to θ, then there is a subsequence $\{y_n\}$ ($y_n \neq \theta$ for all n) that contains no subsequence which relatively uniformly converges to θ. Let $y \geq \theta$, then if for each $\lambda > 0$ there existed a $y_{n(\lambda)} \in \{y_n\}$ such that $|y_{n(\lambda)}| \leq \lambda y$, then we could construct a subsequence $\{y_{n(j)}\}$ of $\{y_n\}$ that relatively uniformly converges to θ. Hence for each $y \geq \theta$ there is a $\lambda_y > 0$ such that $|y_n| \geq \lambda_y y$ for all n. Set $U = \bigcup_{y \in K} \lambda_y V(y)$ where $V(y)$ denotes the solid hull of $\{y\}$. Then U is a radial solid set and $y_n \notin U$ for all n.

Proposition 6.3: *If E is an almost archimedean vector lattice, then $[\mathfrak{T}_*] = \mathfrak{T}_0$ on E. $E(\mathfrak{T}_0)' = E(\mathfrak{T}_*)'$ and, if E has an order unit, then $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}_*$.*

Proof. E is a topological vector lattice for $\mathfrak{T}_0$, hence $\mathfrak{T}_*$ and $[\mathfrak{T}_*]$ are finer than $\mathfrak{T}_0$. If H is an exhausting subset of K and $E_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} n[-a, a]$ ($a \in H$), then E_a is a regularly ordered ideal in E with an order unit a. Suppose that $\{x_n\}$ is a sequence in E_a which is not relatively uniformly star convergent to θ, then by the lemma preceding (6.3), there is a radial solid set $U^{(a)}$ in E_a such that $x_n \notin U^{(a)}$ for infinitely many n. Since $U^{(a)}$ is radial in E_a, there is a $\lambda > 0$ such that $[-\lambda a, \lambda a] \subset U^{(a)}$. But $[-\lambda a, \lambda a]$ is a $\mathfrak{T}_0^{(a)}$-neighborhood of θ in E_a (cf. Introduction), hence $\{x_n\}$ does not converge to θ for $\mathfrak{T}_0^{(a)}$. Thus $\mathfrak{T}_0^{(a)}$-convergence implies relative uniform star convergence for sequences in E_a. Consequently, since $\mathfrak{T}_0^{(a)}$ has a countable neighborhood basis of θ, it follows

that $\mathfrak{T}_0^{(a)}$ is finer than both $[\mathfrak{T}_*]$ and $\mathfrak{T}_*$ on E_a. Combining this fact with the first statement of the proof, we obtain $\mathfrak{T}_0^{(a)} = \mathfrak{T}_*$ on E_a. In particular, if E has an order unit e, then $E_e = E$, hence $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}_*$ on E.

Since the embedding mappings f_a of E_a into $E\,(a \in H)$ are essentially identity maps, it follows that each f_a satisfies the condition of Proposition (5.6). Thus each f_a is continuous for $\mathfrak{T}_0^{(a)}$ and $[\mathfrak{T}_*]$. Since $E(\mathfrak{T}_0) = \lim\limits_{\to H} E_a(\mathfrak{T}_0^{(a)})$ and since $[\mathfrak{T}_*]$ is locally convex, we conclude that $[\mathfrak{T}_*] \leq \mathfrak{T}_0$ on E. In view of the first statement in the proof, $[\mathfrak{T}_*] = \mathfrak{T}_0$ on E.

Since $\mathfrak{T}_*$ is finer than $\mathfrak{T}_0$ on E, it follows that $E(\mathfrak{T}_0)' \subset E(\mathfrak{T}_*)'$. Let $f \in E(\mathfrak{T}_*)'$ and suppose that $f \notin E^b = E^+$. Then there is an order interval $[-x, x]\ (x \in K)$ and a sequence $x_n \in [-x, x]$ such that $|f(x_n)| > n$. The sequence $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$ converges relatively uniformly to θ since E is almost archimedean, hence $\left\{\frac{x_n}{n}\right\} \to \theta$ for $\mathfrak{T}_*$. But $f\left(\frac{x_n}{n}\right) > 1$ which contradicts the fact that $f \in E(\mathfrak{T}_*)'$. Hence, $E(\mathfrak{T}_*)' = E^b = E(\mathfrak{T}_0)'$ which completes the proof of the second assertion.

Proposition 6.4: *If E is an order complete sublattice of E^b then $\mathfrak{T}_1$ and $[\mathfrak{T}_1]$ are both finer than $o(E, E^+)$.*

Proof. This is an immediate consequence of (3.4), (5.1), and (5.5).

Proposition 6.5: *If $E(\mathfrak{T}_0)$ is a locally convex space with a closed normal generating cone, then each of the following conditions implies that $\mathfrak{T}_0 = o(E, E^+)$.*

(a) *Each $\sigma(E^+, E)$-relatively compact subset of E^+ is order bounded.*

(b) *E^+ has an order unit.*

(c) *K^* has a countable exhausting subset.*

Proof. This assertion has already been verified as a part of the proof of (2.2).

Theorem 6.5: *Let $E(\mathfrak{T})$ be a complete metrizable topological vector lattice, then $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_*$. If $\mathfrak{T}$ is a locally convex topology (resp. $E(\mathfrak{T})$ is reflexive; resp. $E(\mathfrak{T})$ is reflexive and E has an order unit) then $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_* = [\mathfrak{T}_*] = \mathfrak{T}_0$ (resp. $\mathfrak{T}$ is coarser than $\mathfrak{T}_1$; resp. the topologies $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_*$, $[\mathfrak{T}_*]$, $\mathfrak{T}_1$, $[\mathfrak{T}_1]$, $\mathfrak{T}_0$ all coincide).*

Proof. We know that $\mathfrak{T}_*$ is finer than $\mathfrak{T}$ by (6.2). Suppose that $\{x_n\}$ converges to θ for $\mathfrak{T}$ and let $\{y_n\}$ be a given subsequence of $\{x_n\}$. Let $\{V_n\}_{n \in N}$ be a $\mathfrak{T}$-neighborhood basis of θ such that $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ for all n. Since $\{|y_n|\} \to \theta$ for $\mathfrak{T}$, there is a subsequence $\{z_n\}$ of $\{y_n\}$ such that $n|z_n| \in V_n$ for all n. Then $\left\{\sum\limits_{n=1}^{m} n|z_n|\right\}_{n \in N}$ is a Cauchy sequence since

$$\sum_{n=k}^{k+h} n|z_n| \in V_k + V_{k+1} + \cdots + V_{k+h} \subset V_{k-1}\,.$$

Hence there is a $v \in E$ such that $v = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n|z_n|$. Since $|z_n| \leq \frac{1}{n} v$, it follows that $\{z_n\}$ converges relatively uniformly to θ. Thus $\{x_n\}$ is relatively uniformly star convergent to θ. It follows that $\mathfrak{T}$ is finer than $\mathfrak{T}_*$ since $\mathfrak{T}$ is a metrizable topology. Hence $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_*$ which proves the first statement in the proposition.

If $\mathfrak{T}$ is a locally convex topology, then it is known that $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0$ [*]). If $E(\mathfrak{T})$ is reflexive, then E is an order complete vector lattice of minimal type ([16], 14.2 Corollary). Hence (6.1) implies that $\mathfrak{T}$ is coarser than $\mathfrak{T}_1$. If, in addition, E has an order unit, it follows from (6.1) that $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1$.

Example. Consider the vector space L_p $(0 < p < 1)$ of equivalence classes, modulo null functions, of all real valued Lebesgue measurable functions f on the unit interval such that $\int_0^1 |f|^p \, d\mu < +\infty$. L_p is a complete metrizable topological vector lattice for the order determined by the cone $K = \{f \in L_p : f(t) \geqq 0$ almost everywhere on $0 \leqq t \leqq 1\}$ and the topology $\mathfrak{T}$ generated by the θ-neighborhood basis

$$U_n = \left\{ f \in L_p : \left(\int_0^1 |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leqq 1/n \right\}.$$

Therefore, Theorem (6.5) implies that $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_*$; consequently $\mathfrak{T}_*$ is not locally convex in this case since it is known that $\mathfrak{T}$ is not locally convex (cf. [5]).

Namioka has shown that there does not exist a non-zero positive linear form on L_p (cf. [11], p. 26), hence $(L_p)^+ = \{\theta\}$. It follows that the order topology $\mathfrak{T}_0$ on L_p is not Hausdorff and we conclude from (6.2) and the above considerations that $\mathfrak{T}_*$ is strictly finer than $\mathfrak{T}_0$ on L_p.

References

[1] Birkhoff, G.: Lattice theory, revised edition. Am. Math. Soc. Colloquium Publications. **25**, Am. Math. Soc. New York 1948.

[2] Bourbaki, N.: Eléments de mathématique, Livre V. Espaces vectoriels topologiques. Act. Sci. et Ind., nos. 1189, 1229. Paris: Hermann et Cie. 1953, 1955.

[3] Bourbaki, N.: Eléments de mathématique, Livre VI, Intégration. Act. Sci. et Ind., no. 1175. Paris: Hermann et Cie. 1952.

[4] Bourbaki, N.: Eléments de mathématique, Livre III, Topologie Générale. Act. Sci. et Ind., no. 858—1142. Paris: Hermann et Cie. 1951.

[5] Day, M. M.: The spaces L^p with $0 < p < 1$. Bull. Am. Math. Soc. **46**, 816—823 (1940).

[6] Gordon, H.: Topologies and projections on Riesz spaces. Trans. Am. Math. Soc. **94**, 529—551 (1960).

[7] Köthe, G.: Topologische lineare Räume. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1960.

[8] Krein, M. G.: Propriétés fondamentales des ensembles coniques normaux dans l'espace de Banach. Doklady Akad. Nauk S.S.S.R. **28**, 13—17 (1940).

[9] Krein, M. G., and J. Grosberg: Sur la décomposition des fonctionelles en composantes positives. Doklady Akad. Nauk S.S.S.R. **25**, 723—726 (1939).

[10] Krein, M. G., and M. A. Rutman: Lineare Operatoren, die einen Kegel im Banachschen Raum invariant lassen. Uspechi Mat. Nauk **3**, No. 1 (23), 3—95 (1948); Am. Math. Soc. Transl. No. 26, Am. Math. Soc.

[*]) This result can be found in [17] (see Chapter VI, proposition 6.6). However, since these notes have not been published, we shall now give a proof of this result: Since $E(\mathfrak{T})$ is a locally convex lattice, K is a closed strict $\mathfrak{b}$-cone. Therefore every positive linear form on E is continuous (cf. [14], 2.8). By the normality of K we have $E' = K^* - K^* = E(\mathfrak{T}_0)'$. Hence since $\mathfrak{T} = \tau(E, E')$, it follows that $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0$.

[11] Nakano, N.: Linear topologies on semi-ordered linear spaces. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, 12, 87—104 (1953).
[12] Namioka, I.: Partially ordered linear topological spaces. Mem. Am. Mem. Am. Math. Soc. No. 24, Am. Math. Soc. 1957.
[13] Roberts, G. T.: Topologies in vector lattices. Proc. Cambridge Phil. Soc. 48, 533—546 (1952).
[14] Schaefer, H. H.: Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume. Math. Ann. 135, 115—141 (1958).
[15] Schaefer, H. H.: Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume. II. Math. Ann. 138, 259—286 (1959).
[16] Schaefer, H. H.: Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume. III. Math. Ann. 141, 113—142 (1960).
[17] Schaefer, H. H.: Locally convex vector spaces (mimeographed notes). Washington State University, 1960.
[18] Schaefer, H. H.: On the completeness of topological vector lattices. Michigan Math. J. 7, 303—309 (1960).

(Received March 14, 1961)

Körner, O.
Math. Annalen 144, 224—238 (1961)

Über das Waringsche Problem in algebraischen Zahlkörpern

Von

Otto Körner in Marburg

Im folgenden sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade n über dem Körper der rationalen Zahlen, k eine natürliche Zahl $\geqq 3$ und J_k der Unterring von K, der erzeugt wird von allen k-ten Potenzen ganzer Zahlen aus K. Mit $G(k)$ werde die kleinste unter allen natürlichen Zahlen s bezeichnet, die folgende Eigenschaft besitzen:

Zu s gibt es zwei positive, nur von K, k und s abhängige Konstanten c' und c'' derart, daß für jede totalpositive Zahl ν aus J_k mit $N(\nu) \geqq c'$ die diophantische Gleichung

$$\nu = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_s^k$$

in total nicht-negativen ganzen Zahlen λ_j aus K mit

$$N(\lambda_j)^k \leqq c'' N(\nu) \qquad (j = 1, \ldots, s)$$

lösbar ist.

Siegel gelang die erste erfolgreiche Behandlung des Waringschen Problems in algebraischen Zahlkörpern [5], [6]. Mit Ergebnissen und Methoden von Siegel und Vinogradov [8] bewies Tatuzawa [7] die Abschätzung

$$G(k) \leqq 8nk(k+n)\,.$$

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, dieses Resultat zu verschärfen zu folgendem:

Hauptsatz. *Es gilt*

$$G(k) < nk\left(3\log k + 3\log\left(\frac{n^2+1}{2}\right) + 11\right).$$

Diese Schranke für $G(k)$ ist, was die Größenordnung in k anbelangt, so gut wie die beste, die man im Fall des rationalen Zahlkörpers ($n = 1$) kennt [2]. Zum Beweis des Hauptsatzes ziehen wir außer den von Tatuzawa verwendeten Siegelschen und Vinogradovschen Methoden noch ein anderes Verfahren von Vinogradov [8] heran, das Abschätzungen von trigonometrischen Summen über Primzahlpotenzen betrifft (s. Satz 3). Außerdem ist von Bedeutung, daß es uns gelingt, Tatuzawas Resultat [7, Theorem 1] über die singuläre Reihe zu verbessern (s. Satz 1).

Seien $K^{(l)}$ ($l = 1, \ldots, r_1$) die r_1 reellen und $K^{(l)}, K^{(l+r_2)}$ ($l = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2$) die r_2 Paare von komplexen konjugierten Körpern zu K, so daß $n = r_1 + 2r_2$. Für eine Zahl γ aus K bedeute $\gamma^{(l)}$ die zu ihr konjugierte in $K^{(l)}$ ($l = 1, \ldots, n$). Bezeichne Ξ die Menge aller n-tupel $\xi = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)})$ von komplexen Zahlen

mit: $\xi^{(l)}$ reell $(l = 1, \ldots, r_1)$, $\xi^{(l)}, \xi^{(l+r_2)}$ zueinander konjugiert komplex $(l = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2)$. In Ξ werde eine Addition, eine Multiplikation und eine Multiplikation zwischen reellen Zahlen (Skalaren) r und Elementen aus Ξ erklärt durch:

$$(\xi_1 + \xi_2)^{(l)} = \xi_1^{(l)} + \xi_2^{(l)}, \quad (\xi_1 \xi_2)^{(l)} = \xi_1^{(l)} \xi_2^{(l)}, \quad (r\xi)^{(l)} = r\xi^{(l)} \quad (l = 1, \ldots, n).$$

Dabei bezeichnen wir immer Elemente aus Ξ mit kleinen griechischen und die Skalare mit lateinischen Buchstaben. K betten wir in Ξ ein, indem wir einer Zahl aus K das n-tupel ihrer Konjugierten zuordnen. Auf Ξ definieren wir die Funktionen

$$S(\xi) = \sum_{l=1}^{n} \xi^{(l)}, \quad E(\xi) = e^{2\pi i S(\xi)}, \quad \|\xi\| = \operatorname{Max}(|\xi^{(1)}|, \ldots, |\xi^{(n)}|),$$

und wir schreiben

$$\xi \prec R,$$

wenn $\xi^{(l)} \geqq 0$ $(l = 1, \ldots, r_1)$ und $\|\xi\| \leqq R$ mit einer positiven reellen Zahl R gilt. Eine Zahl γ aus K heißt totalpositiv bzw. total nicht-negativ, wenn $\gamma^{(l)} > 0$ bzw. $\gamma^{(l)} \geqq 0$ $(l = 1, \ldots, r_1)$ ist. Sind B und C komplexwertige Funktionen gewisser Variablen in einem bestimmten Bereich und dort $C \geqq 0$, so bedeute

$$B = O(C) \text{ oder auch } B \ll C,$$

daß $|B| \leqq cC$ mit einer Konstanten c im angegebenen Variabilitätsbereich erfüllt ist. Durchweg sei T eine positive reelle Zahl. Unsere späteren Aussagen beziehen sich meistens auf genügend großes T, worauf wir nicht immer besonders hinweisen. In die O-Konstanten können gewisse Parameter eingehen, die aber immer von T unabhängig sein sollen. Unter Δ verstehen wir eine positive reelle Größe, die beliebig klein, aber unabhängig von T gewählt werden kann. Sie braucht nicht an jeder Stelle denselben reellen Wert zu bezeichnen. $c_1, c_2, \ldots$ bedeuten positive, nur von K, k und s abhängige Konstanten.

§ 1. Zahlentheoretische Hilfssätze

Hilfssatz 1. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von K, das die rationale Primzahl p teilt. Ist* $\mathfrak{p}^e \| p$ *und* $p^b \| k$, so sei

$$l_0 = \begin{cases} 1 & \text{für } b = 0, \\ \left[\dfrac{e}{p-1}\right] + be + 1 & \text{für } b > 0 \end{cases}$$

gesetzt[1]). *Ferner sei α eine ganze Körperzahl. Wenn die Kongruenz*

$$\xi^k \equiv \alpha \bmod \mathfrak{p}^{l_0}$$

mit einer ganzen, zu $\mathfrak{p}$ teilerfremden Körperzahl ξ lösbar ist, so hat auch für jedes $l \geqq l_0$ die Kongruenz

$$\xi^k \equiv \alpha \bmod \mathfrak{p}^l$$

eine ganze Lösung ξ.

---

[1]) Wie üblich bedeute $\mathfrak{p}^e \| p$, daß $\mathfrak{p}^e \mid p$, $\mathfrak{p}^{e+1} \nmid p$, und es sei $[x]$ die größte ganzrationale Zahl $\leqq x$ (x reell).

Hilfssatz 1 wurde von Tatuzawa [7, Lemma 6] bewiesen.

Sei p eine rationale Primzahl. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heiße endliche abelsche p-Gruppe der Basislänge d, wenn ihre Ordnung eine Potenz von p ist und $\mathfrak{G}$ eine d-gliedrige Basis besitzt. (d ist nach dem Hauptsatz für endliche abelsche Gruppen durch $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt.)

Hilfssatz 2. *Sei $\mathfrak{G}$ eine endliche abelsche p-Gruppe der Basislänge d und $x_1, \ldots, x_f$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$. Dann ist $f \geqq d$ und unter den x_j kann man d Elemente auswählen, die ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ bilden*[2].

Beweis: Sei p^g die Ordnung von $\mathfrak{G}$ ($g \geqq 1$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit). Ist $y_1, \ldots, y_d$ eine Basis von $\mathfrak{G}$, so gilt (in additiver Schreibweise):

$$x_j = \sum_{l=1}^{d} a_{jl} y_l \qquad (j = 1, \ldots, f)$$

mit ganzrationalen Zahlen a_{jl}. Da $x_1, \ldots, x_f$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ ist, hat das System von Kongruenzen

$$\sum_{j=1}^{f} a_{jl} n_j \equiv m_l \bmod p \qquad (l = 1, \ldots, d)$$

zu beliebig vorgegebenen ganzrationalen Zahlen m_l ($l = 1, \ldots, d$) immer eine Lösung in ganzrationalen n_j ($j = 1, \ldots, f$). Folglich ist $d \leqq f$, und die Matrix $A = (a_{jl})$ hat $\bmod p$ den Rang d. Somit gibt es eine d-reihige quadratische Teilmatrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{j_1 1} & \cdots & a_{j_1 d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j_d 1} & \cdots & a_{j_d d} \end{pmatrix}$$

von A, deren Determinante $\not\equiv 0 \bmod p$ ist. Demzufolge existiert eine Matrix mit ganzrationalen Elementen, die zu $A_1 \bmod p^g$ invers ist, woraus folgt, daß die d Elemente

$$x_{j_\varrho} = \sum_{l=1}^{d} a_{j_\varrho l}\, y_l \qquad (\varrho = 1, \ldots, d)$$

ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ bilden.

Hilfssatz 3. *Sei l eine natürliche Zahl und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von K. Es gibt eine natürliche Zahl $d \leqq n$ und ganze Körperzahlen η_j ($j = 1, \ldots, d$) derart, daß alle Zahlen ν aus J_k $\bmod \mathfrak{p}^l$ in der Form*

$$\nu \equiv a_1 \eta_1^k + \cdots + a_d \eta_d^k \bmod \mathfrak{p}^l$$

mit positiven ganzrationalen Koeffizienten a_j ($j = 1, \ldots, d$) dargestellt werden können.

Beweis: Auf Grund der für alle ganzen Körperzahlen γ gültigen Identität

$$k!\,\gamma = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-1-l} \binom{k-1}{l} ((\gamma + l)^k - l^k)$$

[2]) Diese Aussage ist ein Spezialfall des sogenannten *Basissatzes* von Burnside [9, Seite 105], der sich auf beliebige (nicht notwendig abelsche) endliche p-Gruppen bezieht. Der Vollständigkeit halber geben wir hier einen einfachen Beweis für den abelschen Fall.

ist J_k eine Ordnung, besitzt also als additive abelsche Gruppe eine n-gliedrige Basis. Folglich ist $J_k \bmod \mathfrak{p}^l$ eine endliche abelsche p-Gruppe mit einer Basislänge $d \leqq n$, wobei p die in $\mathfrak{p}$ enthaltene rationale Primzahl sei. Da J_k von den k-ten Potenzen ganzer Zahlen erzeugt wird, gibt es endlich viele ganze Körperzahlen $\xi_1, \ldots, \xi_f$ derart, daß $\xi_1^k, \ldots, \xi_f^k$ ein Erzeugendensystem von $J_k \bmod \mathfrak{p}^l$ ist. Hieraus folgt nach Hilfssatz 2 die Behauptung von Hilfssatz 3.

Sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal von K und ν eine ganze Körperzahl. Mit $M_s(\nu, \mathfrak{a})$ bezeichnen wir die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$\lambda_1^k + \cdots + \lambda_s^k \equiv \nu \bmod \mathfrak{a},$$

wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ unabhängig voneinander ein vollständiges Restsystem $\bmod \mathfrak{a}$ durchlaufen.

Hilfssatz 4. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von K und p die rationale Primzahl mit $\mathfrak{p}|p$. Ist $\mathfrak{p}^e \| p$, $p^b \| k$, so werde $l_0 = (b+2)e$ gesetzt. Für $l \geqq l_0$, $s \geqq 4nk$* und $\nu \in J_k$ *gilt dann*

$$M_s(\nu, \mathfrak{p}^l) \geqq N(\mathfrak{p})^{(l-l_0)(s-1)}.$$

Beweis [7, Lemma 7]: Bekanntlich [8, Seite 50] ist für jede natürliche Zahl x die Kongruenz

$$y_1^k + \cdots + y_r^k \equiv x \bmod p^{l_1}$$

mit natürlichen Zahlen y_j $(j = 1, \ldots, r)$, $p \nmid y_1$ lösbar, wenn nur $l_1 \geqq b + 2$ und $r \geqq 4k$ ist. Hieraus folgt nach Hilfssatz 3, daß für jede Zahl ν aus J_k die Kongruenz

$$\nu \equiv \zeta_1^k + \cdots + \zeta_{rd}^k \bmod \mathfrak{p}^{e l_1}$$

mit ganzen Körperzahlen ζ_j $(j = 1, \ldots, rd)$ lösbar ist, wobei $\mathfrak{p} \nmid \zeta_1$ und $d \leqq n$. Somit besitzt die Kongruenz

$$\nu \equiv \zeta_1^k + \cdots + \zeta_s^k \bmod \mathfrak{p}^{l_0} \tag{1}$$

für $s \geqq 4kn$ mindestens eine Lösung mit $1|\zeta_j$ $(j = 1, \ldots, s)$ und $\mathfrak{p} \nmid \zeta_1$. Sei π eine Körperzahl mit $\mathfrak{p}\|\pi$ und

$$\xi_r = \zeta_r + \pi^{l_0}\lambda \quad (r = 2, \ldots, s),$$

wobei λ ein vollständiges Restsystem $\bmod \mathfrak{p}^{l-l_0}$ durchlaufe $(l \geqq l_0)$. Aus (1) ersehen wir, daß

$$\nu - \zeta_2^k - \cdots - \zeta_s^k$$

ein zu $\mathfrak{p}$ teilerfremder k-ter Potenzrest $\bmod \mathfrak{p}^{l_0}$ ist. Nach Hilfssatz 1 ist dann

$$\nu - \xi_2^k - \cdots - \xi_s^k$$

ein zu $\mathfrak{p}$ teilerfremder k-ter Potenzrest mod $\mathfrak{p}^l$. Da die Anzahl der $\bmod \mathfrak{p}^l$ verschiedenen $(s-1)$-tupel $(\xi_2, \ldots, \xi_s)$ gleich $N(\mathfrak{p})^{(l-l_0)(s-1)}$ ist, ist somit Hilfssatz 4 bewiesen.

Sei $\mathfrak{d}$ die Differente von K. Ist γ eine Körperzahl und $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal von K, so bedeute $\gamma \to \mathfrak{a}$, daß $\mathfrak{a}$ der Nenner von $\gamma\mathfrak{d}$ ist, d. h. $\mathfrak{a} = (1, \gamma\mathfrak{d})^{-1}$. Die zum Waringschen Problem in K gehörige singuläre Reihe $\mathfrak{S}_{s,k}(\nu)$ ist für natür-

liche Zahlen s, k ($s > 2k$) und ganze Körperzahlen ν erklärt durch:

$$\mathfrak{S}_{s,k}(\nu) = \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s} \sum_{\gamma} E(-\nu\gamma)\Big(\sum_{\lambda} E(\lambda^k \gamma)\Big)^s .$$

Dabei läuft $\mathfrak{a}$ über alle ganzen Ideale $\mathfrak{a} \neq 0$ von K, und zu gegebenem $\mathfrak{a}$ läuft γ über alle Körperzahlen γ eines vollständigen Restsystems mod $\mathfrak{d}^{-1}$ mit $\gamma \to \mathfrak{a}$, sowie λ über alle ganzen Körperzahlen eines vollständigen Restsystems mod $\mathfrak{a}$. In derselben Weise wie TATUZAWA Theorem 1 mit Lemma 7 in [7] ableitete, zeigt man nun mit Hilfssatz 4 die Gültigkeit von

Satz 1. *Ist $s \geqq 4nk$ ($k \geqq 3$) und ν aus J_k, so gilt mit positiven Konstanten c_1 und c_2:*

$$c_1 < \mathfrak{S}_{s,k}(\nu) < c_2 .$$

Für spätere Anwendungen notieren wir den

Hilfssatz 5. *Sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal $\neq 0$ von K, ν eine ganze, zu $\mathfrak{a}$ teilerfremde Körperzahl und $M(\nu, \mathfrak{a})$ die Anzahl der Lösungen ξ der Kongruenz*

(2) $$\xi^k \equiv \nu \bmod \mathfrak{a} ,$$

wenn ξ ein verkürztes Restsystem mod $\mathfrak{a}$ durchläuft. Dann gilt

$$0 \leqq M(\nu, \mathfrak{a}) \leqq N(\mathfrak{a})^{\frac{c_3}{\log\log(N(\mathfrak{a})+2)}}$$

mit einer positiven, nur von K und k abhängigen Konstanten c_3.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß (2) lösbar ist. In diesem Fall setzen wir kurz $M(\nu, \mathfrak{a}) = M(\mathfrak{a})$, da ja hier aus gruppentheoretischen Gründen die Abhängigkeit von ν fortfällt. Nun gilt

(3) $$M(\mathfrak{a}) = \prod_{j=1}^{m} M(\mathfrak{p}_j^{\mu_j}), \quad \text{wobei } \mathfrak{a} = \prod_{j=1}^{m} \mathfrak{p}_j^{\mu_j}$$

die Primfaktorzerlegung von $\mathfrak{a}$ sei. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von K mit $N(\mathfrak{p}) = p^f$ (p rationale Primzahl), $\mathfrak{p}^e \| p$, $p^b \| k$ und $l_0 = (b+2)e$. Die multiplikative Gruppe $\mathfrak{G}_l$ der teilerfremden Restklassen mod $\mathfrak{p}^l$ (l natürliche Zahl) ist direktes Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung $\varphi(\mathfrak{p})$ und einer abelschen Gruppe der Ordnung $p^{f(l-1)}$. Folglich besitzt $\mathfrak{G}_l$ eine d-gliedrige Basis mit $d \leqq 1 + f(l-1)$. Hieraus folgt

(4) $$M(\mathfrak{p}^l) \leqq k^{1+f(l-1)} \leqq k^{nl} \qquad (l \geqq 1) .$$

Bezeichne r_l die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{G}_l$, die k-te Potenzen ganzer Körperzahlen enthalten. Aus der Theorie der endlichen abelschen Gruppen ergibt sich

(5) $$r_l M(\mathfrak{p}^l) = \varphi(\mathfrak{p}^l) \qquad (l \geqq 1)$$

Ist $l > l_0$, so besteht jedes Element aus $\mathfrak{G}_{l_0}$, das k-te Potenzen ganzer Zahlen enthält, aus genau $N(\mathfrak{p}^{l-l_0})$ verschiedenen Restklassen mod $\mathfrak{p}^l$, die nach Hilfssatz 1 ebenfalls von k-ten Potenzen ganzer Körperzahlen repräsentiert werden können; also

(6) $$r_l = N(\mathfrak{p}^{l-l_0}) r_{l_0} \qquad (l \geqq l_0) .$$

Aus (5) und (6) folgt

(7) $$M(\mathfrak{p}^l) = M(\mathfrak{p}^{l_0}) \qquad (l \geqq l_0) ,$$

und aus (3), (4) und (7) dann

$$M(\mathfrak{a}) \leqq \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} k^{n l_0} \leqq k^{n^2\left(\frac{\log k}{\log 2}+2\right)m} \leqq N(\mathfrak{a})^{\frac{c_6}{\log\log(N(\mathfrak{a})+2)}},$$

wobei die bekannte Abschätzung

$$m = \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} 1 \ll \log N(\mathfrak{a})\,(\log\log(N(\mathfrak{a})+2))^{-1}$$

verwendet wurde.

§ 2. Verallgemeinerte Farey-Zerschneidung

Folgende Abkürzungen werden wir benutzen:

$$t = T^{1-a},\ h = T^{k-1+a} \text{ mit } 0 < a \leqq \frac{1}{4},\ T_0 = \sqrt{T},$$

$$t_0 = T_0^b,\ h_0 = T_0^k t_0^{n-1} \log t_0 \text{ mit } b = \frac{n}{n^2+1}.$$

Dabei sei der Parameter a von T unabhängig. Ferner sei $\tau_1, \ldots, \tau_n$ eine fest gewählte Basis des Rings der ganzen Zahlen in K und $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ die zu ihr komplementäre Basis von $\mathfrak{d}^{-1}$, d. h.

$$S(\tau_j \varrho_l) = \begin{cases} 1 \text{ für } j = l \\ 0 \text{ für } j \neq l \end{cases} \qquad (j, l = 1, \ldots, n).$$

Ist X der n-dimensionale euklidische Raum und U der Einheitswürfel in X, d. h. die Menge aller Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $0 \leqq x_j < 1$ $(j = 1, \ldots, n)$, so bezeichnen wir mit Γ die Menge aller Körperzahlen γ mit

$$\gamma = x_1\varrho_1 + \cdots + x_n\varrho_n,\ (x_1, \ldots, x_n) \in U,\ x_j \text{ rational } (j = 1, \ldots, n)$$

und $N(\mathfrak{a}) \leqq t^n$, wobei $\gamma \to \mathfrak{a}$. Wir setzen

$$\xi = x_1\varrho_1 + \cdots + x_n\varrho_n \text{ bzw. } \eta = y_1\tau_1 + \cdots + y_n\tau_n$$

in Abhängigkeit von den reellen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_n$ und gebrauchen die Abkürzungen

$$dx = dx_1 \cdots dx_n,\ dy = dy_1 \cdots dy_r.$$

Zu jedem γ aus Γ definieren wir B_γ als die Menge aller Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $(x_1, \ldots, x_n) \in U$, $\prod_{l=1}^{n} \operatorname{Max}(h|\xi^{(l)} - \gamma_0^{(l)}|, t^{-1}) \leqq N(\mathfrak{a})^{-1}$ für irgendein $\gamma_0 \equiv \gamma \bmod \mathfrak{d}^{-1}$, wobei $\gamma \to \mathfrak{a}$. Schließlich setzen wir $H = U - \sum_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ und nennen das Tripel (Γ, B_γ, H) die zu den Parametern t und h gehörige U-Zerschneidung[3]). Bezeichne D den absoluten Betrag der Diskriminante von K. Die folgenden zwei Hilfssätze wurden von Siegel [6, Lemma 5 und Seite 338–339] bewiesen.

Hilfssatz 6. *Wenn $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, so ist $B_{\gamma_1} \cap B_{\gamma_2} = 0$.*

---

[3]) Diese verallgemeinerte Farey-Zerschneidung wurde erstmals von Siegel [5] eingeführt.

Hilfssatz 7. *Für $\mu < 1$ und $s > k + 1$ werde*

$$J(\mu) = \int_X \Phi_1(\xi)\, E(-\mu\xi)\, dx, \quad \Phi_1(\xi) = \Big(\int_{\eta<1} E(\eta^k \xi)\, dy\Big)^s$$

gesetzt. Dann gilt

$$J(\mu) = D^{1/2(1-s)} \prod_{l=1}^{r_1} F(\mu^{(l)}) \prod_{m=r_1+1}^{r_1+r_2} H(\mu^{(m)})$$

mit

$$F(\mu^{(l)}) = \frac{\Gamma^s\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)} (\mu^{(l)})^{\frac{s}{k}-1}$$

und

$$H(\mu^{(m)}) = k^{-1} \int \prod_{r=1}^{s} \Big(k^{-1} u_r^{\frac{1}{k}-1}\Big)\, du_1 \ldots du_{s-1}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{s-1},$$

wobei das letzte Integral über das Gebiet

$$0 < u_r < 1\ (1 \leqq r \leqq s), \quad -\pi < \varphi_r < \pi\ (1 \leqq r \leqq s-1),$$

$$u_s = |\mu^{(m)} - (u_1^{1/2} e^{i\varphi_1} + \cdots + u_{s-1}^{1/2} e^{i\varphi_{s-1}})|^2$$

erstreckt wird.

Satz 2. *Sei $L(\xi) = \sum_{1|\lambda<T} E(\lambda^k \xi)$, $\xi \in \Xi$ und ν eine totalpositive ganze Körperzahl mit $\nu < T^k$. Für $s \geqq \frac{1}{a} n k + 1$ gilt dann*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{B_\gamma} L^s(\xi)\, E(-\nu\xi)\, dx = \mathfrak{S}_{s,k}(\nu)\, J(\mu)\, T^{n(s-k)} + O(T^{n(s-k)-a}),$$

wobei $\mu = T^{-k}\nu$ gesetzt ist.

Satz 2 wurde von Tatuzawa [7, Theorem 2] aus Siegelschen Ergebnissen abgeleitet.

§ 3. Abschätzung einer trigonometrischen Summe

Für eine reelle Zahl x sei $\{x\} = x - [x]$ bzw. $= x - [x] - 1$ gesetzt, falls $x - [x] \leqq 1/2$ bzw. falls $x - [x] > 1/2$ gilt. Ist ξ aus Ξ, so gibt es ganzrationale Zahlen a_j $(j = 1, \ldots, n)$ mit

$$S(\xi\tau_j) = a_j + d_j, \quad d_j = \{S(\xi\tau_j)\} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Wir definieren:

$$\vartheta = \vartheta(\xi) = \sum_{j=1}^{n} a_j \varrho_j, \quad \zeta = \zeta(\xi) = \sum_{j=1}^{n} d_j \varrho_j.$$

Nach Konstruktion ist

$$(8) \qquad \xi = \vartheta + \zeta, \quad \mathfrak{d}^{-1} | \vartheta.$$

Hilfssatz 8. *Für $\xi \in \Xi$ gilt*

$$\sum_{1|\lambda<T} E(\lambda\xi) \ll T^{n-1} \operatorname{Min}(T, \|\zeta\|^{-1})$$

mit $\zeta = \zeta(\xi)$.

Beweis: Nach bekannten Überlegungen [6, Seite 332] gilt

$$\sum_{1|\lambda\prec T} E(\lambda\xi) \ll T^{n-1} \operatorname*{Min}_{j=1,\ldots,n} (T, |E(\xi\tau_j)-1|^{-1})$$
$$\ll T^{n-1} \operatorname{Min}(T, |d_1|^{-1}, \ldots, |d_n|^{-1}),$$

wobei $d_j = \{S(\xi\tau_j)\}$ $(j = 1, \ldots, n)$ sei. Hieraus folgt mit der Abschätzung

$$\|\zeta\| \ll \operatorname{Max}(|d_1|, \ldots, |d_n|)$$

die Behauptung von Hilfssatz 8.

Hilfssatz 9. *Sei $\mathfrak{f}$ ein ganzes oder gebrochenes Ideal $\neq 0$ von K. Ferner seien A_q $(q = 1, \ldots, n)$ positive reelle Zahlen mit $A_q = A_{q+r_2}$ $(q = r_1+1, \ldots, r_1+r_2)$ und α_q, β_q $(q = r_1+1, \ldots, r_1+r_2)$ reelle Zahlen mit $0 < \alpha_q - \beta_q \leqq 2\pi$ $(q = r_1+1, \ldots, r_1+r_2)$. Bezeichnet man mit $Z(\mathfrak{f}, A, \alpha, \beta)$ die Anzahl der Zahlen ν aus $\mathfrak{f}$ mit*

$$|\nu^{(q)}| \leqq A_q \qquad (q = 1, \ldots, n),$$
$$\beta_q \leqq \arg \nu^{(q)} \leqq \alpha_q \qquad (q = r_1+1, \ldots, r_1+r_2),$$

so gilt

$$Z(\mathfrak{f}, A, \alpha, \beta) = \frac{2^{r_1}}{\sqrt{D}\,N(\mathfrak{f})} \prod_{q=1}^{n} A_q \prod_{q=r_1+1}^{r_1+r_2} (\alpha_q - \beta_q)$$
$$+ O(1 + (A_1 \cdots A_n N(\mathfrak{f})^{-1})^{1-1/n})$$

mit nur von K abhängiger O-Konstante.

Dieser Hilfssatz ist wohlbekannt. Einen ausführlichen Beweis hierfür findet man z. B. bei Mitsui [4, Lemma 3.2].

Bezeichne $(\mathring{\Gamma}, \mathring{B}_\gamma, \mathring{H})$ die zu den Parametern t_0, h_0 gehörige U-Zerschneidung.

Hilfssatz 10. *Ist $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathring{H}$, so existieren Zahlen α und β in K mit folgenden Eigenschaften:*

$$1|\alpha, \quad \mathfrak{d}^{-1}|\beta,$$

$$\|\alpha\xi - \beta\| < h_0^{-1}, \quad t_0 < \|\alpha\| \leqq h_0, \tag{9}$$

$$\operatorname{Max}(h_0|\alpha^{(l)}\xi^{(l)} - \beta^{(l)}|, |\alpha^{(l)}|) \geqq D^{-1/2} \qquad (l = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

$$N((\alpha, \beta\mathfrak{d})) \leqq D^{1/2}. \tag{11}$$

Hilfssatz 10 wurde von Siegel [6, Lemma 6] für die Parameter t und h bewiesen; er gilt aber auch für die Werte t_0, h_0, wie man leicht sieht.

Eine Zahl ω aus K heiße Primzahl von K, wenn das von ihr erzeugte Hauptideal (ω) ein Primideal von K ist. Sei c eine positive, von T unabhängige, reelle Zahl und $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(T_0, c)$ die Menge aller totalpositiven Primzahlen ω von K mit

$$\frac{c}{2} T_0 \leqq |\omega^{(l)}| \leqq c T_0 \qquad (l = 1, \ldots, n), \tag{12}$$

$$|\arg \omega^{(l)}| \leqq \frac{\pi}{4k} \qquad (l = r_1+1, \ldots, r_1+r_2), \tag{13}$$

und sei $P(T_0, c)$ die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{P}$. Nach [3, Seite 35] ist

$$1 \ll P(T_0, c)\, T_0^{-n} \log T_0 \ll 1. \tag{14}$$

Wegen (12) und (13) gilt für jedes Paar ω, ω_0 von Zahlen aus $\mathfrak{P}$:

(15) $$|(\omega^{(l)})^k - (\omega_0^{(l)})^k| \geqq \left(\frac{c}{2} T_0\right)^{k-1} |\omega^{(l)} - \omega_0^{(l)}| \qquad (l = 1, \ldots, n)\,.$$

Hilfssatz 11. *Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathring{H}$ und α, β ein hierzu gemäß Hilfssatz 10 existierendes Paar von Körperzahlen. Seien $g_1, \ldots, g_n$ ganzrationale Zahlen, $\Phi^{(l)}$ $(l = 1, \ldots, n)$ positive reelle Zahlen mit $\Phi^{(l)} = \Phi^{(l+r_2)}$ $(l = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2)$ und ω_0 eine Zahl aus $\mathfrak{P}(T_0, c)$. Bezeichnet man mit $Z(g, \Phi)$ die Anzahl aller ω aus $\mathfrak{P}$ mit*

(16) $$|\zeta^{(l)}| \leqq \Phi^{(l)} \qquad (l = 1, \ldots, n)\,,$$

(17) $$\begin{aligned} g_l &\leqq 4D^{1/n}|\alpha^{(l)}| \operatorname{Re}\zeta^{(l)} < g_l + 1 \qquad (l = 1, \ldots, r_1 + r_2)\,,\\ g_l &\leqq 4D^{1/n}|\alpha^{(l)}| \operatorname{Im}\zeta^{(l)} < g_l + 1 \qquad (l = r_1 + r_2 + 1, \ldots, n)\,, \end{aligned}$$

wobei $\zeta = \zeta(\xi(\omega^k - \omega_0^k))$ sei[4]*, so gilt*

$$Z(g, \Phi) \ll |N(\alpha)|^{\Delta} \Big(1 + \prod_{l \in J_1} (h_0 \Phi^{(l)} T_0^{1-k}) \prod_{l \in J_2} (T_0 |\alpha^{(l)}|^{-1})\Big)\,.$$

Hierbei bezeichne J_1 die Menge der Indizes l $(1 \leqq l \leqq n)$ mit $|\alpha^{(l)}| < D^{-1/2}$ und J_2 die Menge der restlichen Indizes.

Beweis: Die Anzahl der verschiedenen ω aus $\mathfrak{P}$ mit $(\omega, \alpha) \neq 1$ ist

(18) $$\ll \log|N(\alpha)| \ll |N(\alpha)|^{\Delta}\,;$$

denn $(\omega, \alpha) \neq 1$ bedeutet $\omega|\alpha$, und da die Anzahl der Primidealteiler von α höchstens $O(\log|N(\alpha)|)$ ist, jeder solcher Primteiler aber wegen (12) nur von $O(1)$ verschiedenen ω aus $\mathfrak{P}$ erzeugt werden kann, ist (18) evident. Bezeichne $\mathfrak{B}$ die Menge aller ω aus $\mathfrak{P}$, die (16), (17) und $(\omega, \alpha) = 1$ erfüllen. Seien ω, ω_1 zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{B}$. Setzt man

$$\delta = \alpha\xi - \beta\,,\ \zeta_1 = \zeta(\xi(\omega_1^k - \omega_0^k))\,,\ \vartheta = \vartheta(\xi(\omega^k - \omega_0^k))\,,$$
$$\vartheta_1 = \vartheta(\xi(\omega_1^k - \omega_0^k)) \text{ und } \varrho = \alpha(\vartheta - \vartheta_1) - \beta(\omega^k - \omega_1^k)\,,$$

so erhält man nach (8):

(19) $$\varrho = \delta(\omega^k - \omega_1^k) - \alpha(\zeta - \zeta_1)$$

und nach (17):

(20) $$\|\alpha(\zeta - \zeta_1)\| < \frac{1}{2} D^{-1/n},$$

und aus (9) und (12) folgt für genügend großes T:

$$\|\delta(\omega^k - \omega_1^k)\| < h_0^{-1} 2 (c T_0)^k < \frac{1}{2} D^{-1/n},$$

woraus sich mit (19) und (20) ergibt: $|N(\varrho)| < D^{-1}$, also $\varrho = 0$, da $\mathfrak{d}^{-1}|\varrho$. Somit ist

(21) $$\delta(\omega^k - \omega_1^k) = \alpha(\zeta - \zeta_1)\,,$$

(22) $$\beta(\omega^k - \omega_1^k) = \alpha(\vartheta - \vartheta_1)\,.$$

[4]) Re bzw. Im bedeute Real- bzw. Imaginärteil.

Aus (22) folgt, daß α ein Teiler von $(\omega^k - \omega_1^k)\,\beta\mathfrak{b}$ ist, also

$$\omega^k \equiv \omega_1^k \bmod \mathfrak{a} \tag{23}$$

mit $\mathfrak{a} = \alpha(\alpha, \beta\mathfrak{b})^{-1}$. Sei $v = |N(\alpha)|\, N(\mathfrak{a})^{-1}$. Nach (11) ist

$$1 \leq v \leq D^{1/2}. \tag{24}$$

Ferner gilt nach (15), (21), (24), (16) und (10):

$$\left|\frac{v(\omega^{(l)} - \omega_1^{(l)})}{\alpha^{(l)}}\right| \leq v\left(\frac{c}{2}\,T_0\right)^{1-k} \left|\frac{\zeta^{(l)} - \zeta_1^{(l)}}{\delta^{(l)}}\right| \ll h_0 \Phi^{(l)} T_0^{1-k} \qquad (l \in J_1) \tag{25}$$

und nach (12) und (24):

$$\left|\frac{v(\omega^{(l)} - \omega_1^{(l)})}{\alpha^{(l)}}\right| \ll T_0 |\alpha^{(l)}|^{-1} \qquad (l = 1, \ldots, n)\,. \tag{26}$$

Ist $\omega \equiv \omega_1 \bmod \mathfrak{a}$, so ist $v(\omega - \omega_1)\alpha^{-1}$ ganz. Nach (25), (26) und Hilfssatz 9 ist deshalb die Anzahl der ω aus $\mathfrak{B}$, die zusammen in einer Restklasse mod $\mathfrak{a}$ liegen, höchstens

$$O\Bigl(1 + \prod_{l \in J_1} (h_0 \Phi^{(l)} T_0^{1-k}) \prod_{l \in J_2} (T_0 |\alpha^{(l)}|^{-1})\Bigr)\,. \tag{27}$$

Bei festem ω_1 aus $\mathfrak{B}$ ist die Anzahl der Lösungen ω von (23) nach Hilfssatz 5 und (24):

$$\ll N(\mathfrak{a})^{\frac{c_9}{\log\log(N(\mathfrak{a})+2)}} \ll |N(\alpha)|^{\Delta}, \tag{28}$$

wenn ω ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{a}$ durchläuft. Aus (18), (23), (27) und (28) folgt die Behauptung von Hilfssatz 11.

Hilfssatz 12. *Bezeichne $\mathfrak{Q}(s, T)$ die Menge aller Körperzahlen μ, die dargestellt werden können in der Form*

$$\mu = \sigma_1^k + \cdots + \sigma_s^k\,,$$

wobei $\sigma_j (j = 1, \ldots, s)$ eine total nicht-negative ganze Zahl aus K mit $\sigma_j \prec T$ sei. Für die Anzahl $Q(s, T)$ aller Zahlen μ aus $\mathfrak{Q}(s, T)$ gilt

$$T^{nk\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^l\right)} \ll Q(s, T)$$

mit $l = \left[\frac{s}{n}\right]$.

Dies ist Lemma 17 von Tatuzawa [7].

Für alle $\xi \in \Xi$ definieren wir die Summe

$$R(\xi) = \sum_{\mu \in \mathfrak{Q}(s, T_0)} \sum_{\omega \in \mathfrak{P}(T_0, c)} E(\mu\omega^k\xi)\,.$$

Satz 3. *Ist $(x_1, \ldots, x_n) \in H$, so gilt*

$$R(\xi) \ll \sqrt{Q(s, T_0)\, T_0^{nk+2n+\Delta-b}}\,. \tag{29}$$

Beweis: Wir treffen eine Fallunterscheidung.

Fall I: $(x_1, \ldots, x_n) \in H \cap \mathring{H}$.

Nach der Schwarzschen Ungleichung und Hilfssatz 8 ist

$$(30)\quad \begin{aligned}|R(\xi)|^2 &\leqq Q(s, T_0) \sum_{\omega, \omega_0 \in \mathfrak{P}} \Big| \sum_{1|\mu < s T_0^k} E(\mu(\omega^k - \omega_0^k)\xi)\Big| \\ &\ll Q(s, T_0)\, T_0^{(n-1)k} \sum_{\omega_0 \in \mathfrak{P}} R(\xi, \omega_0),\end{aligned}$$

wobei

$$R(\xi, \omega_0) = \sum_{\omega \in \mathfrak{P}} \operatorname{Min}(T_0^k, \|\zeta\|^{-1}) \text{ mit } \zeta = \zeta(\xi(\omega^k - \omega_0^k))$$

sei. Nun ist

$$(31)\quad R(\xi, \omega_0) \leqq \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{P}\\ \|\zeta\| > T_0^{b-k}}} T_0^{k-b} + \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{P}\\ \|\zeta\| \leqq T_0^{b-k}}} T_0^k = S_1 + S_2 .$$

Nach (14) ist

$$(32)\quad S_1 \leqq P(T_0, c)\, T_0^{k-b} \ll T_0^{n+k-b}.$$

Auf S_2 wenden wir Hilfssatz 11 mit $\Phi^{(l)} = T_0^{b-k}$ ($l = 1, \ldots, n$) an. Die Anzahl Z_1 aller verschiedenen n-tupel $g = (g_1, \ldots, g_n)$ ganzrationaler Zahlen, die für unseren Fall in Frage kommen, ist nach (16) und (17) höchstens

$$O\Big(\prod_{l \in J_2} (|\alpha^{(l)}|\, T_0^{b-k} + 1)\Big).$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} S_2 &\leqq Z_1 \operatorname{Max}_g Z(g, T_0^{b-k})\, T_0^k \\ &\ll \prod_{l \in J_2} (|\alpha^{(l)}|\, T_0^{b-k} + 1)\, |N(\alpha)|^{\Delta} \Big(1 + \prod_{l \in J_1} (h_0 \Phi^{(l)} T_0^{1-k}) \prod_{l \in J_2} (T_0 |\alpha^{(l)}|^{-1})\Big)\, T_0^k. \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit (9):

$$(33)\quad \begin{aligned} S_2 &\ll T_0^{k+\Delta'} \Big((h_0 T_0^{b-k})^n + \prod_{l \in J_1} (h_0 T_0^{b+1-2k}) \prod_{l \in J_2} (T_0^{1+b-k} + T_0 |\alpha^{(l)}|^{-1})\Big) \\ &\ll T_0^{k+\Delta} (T_0^{n\cdot b} + T_0^n \|\alpha\|^{-1}) \ll T_0^{k+n+\Delta-b}. \end{aligned}$$

Aus (31), (32) und (33) folgt

$$R(\xi, \omega_0) \ll T_0^{k+n+\Delta-b},$$

und hieraus mit (30) und (14) die Abschätzung (29).

Fall II: $(x_1, \ldots, x_n) \in H \cap \mathring{B}_\gamma$ für ein $\gamma \in \mathring{\Gamma}$.

Nach Definition von $\mathring{B}_\gamma$ gibt es ein $\gamma_0 \in K$ mit $\gamma_0 \equiv \gamma \bmod \mathfrak{d}^{-1}$, $\gamma_0 \to \mathfrak{a}$, $N(\mathfrak{a}) \leqq t_0^n$ und

$$(34)\quad \|\xi - \gamma_0\| \leqq h_0^{-1} t_0^{n-1} N(\mathfrak{a})^{-1}.$$

Wegen $t_0 \leqq t$ ist $(x_1, \ldots, x_n) \notin B_\gamma$; folglich gilt

$$(35)\quad \|\xi - \gamma_0\| > h^{-1} N(\mathfrak{a})^{-1/n}.$$

Setzt man $\psi = \xi - \gamma_0$, so erhält man

$$R(\xi) = \sum_{\sigma \bmod \mathfrak{a}} R_\sigma(\xi), \text{ wobei}$$

$$(36)\quad R_\sigma(\xi) = \sum_{\mu \in \mathfrak{Q}(s, T_0)} E(\mu \sigma^k \gamma_0) \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{P}\\ \omega \equiv \sigma \bmod \mathfrak{a}}} E(\mu \omega^k \psi)$$

sei. Nach der Schwarzschen Ungleichung und Hilfssatz 8 ist

$$
(37)\qquad \begin{aligned}
|R_\sigma(\xi)|^2 &\leqq Q(s, T_0) \sum_{\substack{\omega,\, \omega_0 \in \mathfrak{P} \\ \omega \equiv \omega_0 \equiv \sigma \bmod \mathfrak{a}}} \Big| \sum_{1|\mu < s T_0^k} E(\mu(\omega^k - \omega_0^k)\,\psi) \Big| \\
&\ll Q(s, T_0)\, T_0^{(n-1)k} \sum_{\substack{\omega_0 \in \mathfrak{P} \\ \omega_0 \equiv \sigma \bmod \mathfrak{a}}} R^*(\xi, \omega_0)\,,
\end{aligned}
$$

wobei

$$
R^*(\xi, \omega_0) = \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{P} \\ \omega \equiv \omega_0 \bmod \mathfrak{a}}} \operatorname{Min}(T_0^k, \|\zeta\|^{-1}) \text{ mit } \zeta = \zeta(\psi(\omega^k - \omega_0^k))
$$

sei. Nach (34) und (12) ist

$$
|S(\psi(\omega^k - \omega_0^k)\tau_j)| \ll h_0^{-1} t_0^{n-1} T_0^k \to 0 \qquad (T \to \infty\,;\; j = 1, \ldots, n)\,,
$$

woraus für genügend großes T mit (8) folgt:

$$
(38)\qquad \psi(\omega^k - \omega_0^k) = \zeta\,.
$$

Sei $\mathfrak{P}_1$ die Menge aller ω aus $\mathfrak{P}$ mit $\omega \equiv \omega_0 \bmod \mathfrak{a}$ und

$$
\operatorname*{Min}_{l = 1, \ldots, n} |\omega^{(l)} - \omega_0^{(l)}| \geqq N(\mathfrak{a})^{1/n},
$$

und sei $\mathfrak{P}_2$ die Menge aller ω aus $\mathfrak{P}$ mit $\omega \equiv \omega_0 \bmod \mathfrak{a}$, $\omega \notin \mathfrak{P}_1$. Ist $\omega \in \mathfrak{P}_1$, so ist nach (38), (35) und (15):

$$
(39)\qquad \|\zeta\|^{-1} \ll h N(\mathfrak{a})^{1/n}\, T_0^{1-k} N(\mathfrak{a})^{-1/n} = T_0^{k-1+2a}.
$$

Nach Hilfssatz 9 ist die Anzahl aller ω aus $\mathfrak{P}_1$:

$$
(40)\qquad \ll 1 + T_0^n N(\mathfrak{a})^{-1} \ll T_0^n N(\mathfrak{a})^{-1}
$$

und die Anzahl aller ω aus $\mathfrak{P}_2$:

$$
(41)\qquad \ll 1 + T_0^{n-1} N(\mathfrak{a})^{-1+1/n} \ll T_0^{n-1+b} N(\mathfrak{a})^{-1}.
$$

Aus (39), (40) und (41) folgt:

$$
(42)\qquad \begin{aligned}
R^*(\xi, \omega_0) &\leqq \sum_{\omega \in \mathfrak{P}_1} T_0^{k-1+2a} + \sum_{\omega \in \mathfrak{P}_2} T_0^k \\
&\ll T_0^n N(\mathfrak{a})^{-1} T_0^{k-1+2a} + T_0^{n-1+b} N(\mathfrak{a})^{-1} T_0^k \ll T_0^{k+n-b} N(\mathfrak{a})^{-1}.
\end{aligned}
$$

Aus (37) und (42) erhalten wir mit Hilfssatz 9:

$$
|R_\sigma(\xi)|^2 \ll Q(s, T_0)\, T_0^{nk+2n-b} N(\mathfrak{a})^{-2},
$$

und hieraus ergibt sich mit (36) die Abschätzung (29), q. e. d.

§ 4. Beweis des Hauptsatzes

Sei ν eine totalpositive Zahl aus J_k und

$$
A = \sqrt[n]{N(\nu)}
$$

gesetzt. Mit einer totalpositiven Einheit ε definieren wir

$$
\nu_0 = \varepsilon^k \nu\,.
$$

Wie aus der Theorie der Einheiten ersichtlich ist [1], kann man ε zu vorgegebenem $\Delta\,(0 < \Delta < {}^1/_2)$ so wählen, daß

$$(43)\qquad \begin{aligned} c_4\Delta^{-2r_2}A &< \nu_0^{(l)} < c_5\Delta^{-2r_2}A \qquad (l = 1, \ldots, r_1)\,, \\ c_4\Delta^{r_1}A &< |\nu_0^{(l)}| < c_5\Delta^{r_1}A \qquad (l = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2) \end{aligned}$$

mit passenden, von Δ unabhängigen Konstanten c_4, c_5 gilt. Wir setzen

$$(44)\qquad \begin{gathered} s_0 = n\left[2 + \frac{\log\dfrac{b}{3nk}}{\log\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)}\right],\quad s_1 = n\left[1 + \frac{\log\dfrac{b}{6nk}}{\log\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)}\right], \\ T_1 = \left(\frac{c_4\Delta^{r_1}A}{2(s_0 + 2s_1)}\right)^{1/k},\quad T = \left(\frac{c_5 A}{\Delta^{2r_2}}\right)^{1/k},\quad T_0 = \sqrt{T}\,. \end{gathered}$$

Ist

$$(45)\qquad \varrho = \nu_0 - \sigma_1 - \sigma_2 - \mu\omega^k,$$

wobei $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{Q}(s_1, T_1)$, $\mu \in \mathfrak{Q}(s_0, T_0)$ und $\omega \in \mathfrak{P}(T_0, c)$ mit

$$c = (\Delta^n c_4(2c_5)^{-1}(s_0 + 2s_1)^{-1})^{1/k} = T_1 T_0^{-2}$$

sei, so folgt aus (43) und (44):

$$(46)\qquad \begin{aligned} \frac{c_4}{2}\Delta^{-2r_2}A &< \varrho^{(l)} < c_5\Delta^{-2r_2}A \qquad (l = 1, \ldots, r_1)\,, \\ \frac{c_4}{2}\Delta^{r_1}A &< |\varrho^{(l)}| < \left(c_5 + \frac{c_4}{2}\right)\Delta^{r_1}A \quad (l = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2)\,. \end{aligned}$$

Wir definieren für $\xi \in \Xi$:

$$L(\xi) = \sum_{1 \leqq \lambda < T} E(\lambda^k\xi)\,,\quad V(\xi) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{Q}(s_1, T_1)} E(\sigma\xi)\,,$$

$$R(\xi) = \sum_{\mu \in \mathfrak{Q}(s_0, T_0)}\ \sum_{\omega \in \mathfrak{P}(T_0, c)} E(\mu\omega^k\xi)\,.$$

Nun wählen wir $s = 4nk + 1$, $a = {}^1/_4$ und erschließen aus Satz 2:

$$(47)\qquad \begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{B_\gamma} L^s(\xi)\,V^2(\xi)\,R(\xi)\,E(-\nu\varepsilon^k\xi)\,dx &= \sum_{\varrho}\ \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{B_\gamma} L^s(\xi)\,E(-\varrho\xi)\,dx \\ &= \sum_{\varrho} (\mathfrak{S}_{s,k}(\varrho)\,J(\mu)\,T^{n(s-k)} + O(T^{n(s-k)-a}))\,. \end{aligned}$$

Hierbei wird die Summation jeweils erstreckt über alle (nicht notwendig verschiedenen) ϱ der Gestalt (45), wobei σ_1, σ_2, μ bzw. ω unabhängig voneinander über alle Elemente aus $\mathfrak{Q}(s_1, T_1)$, $\mathfrak{Q}(s_1, T_1)$, $\mathfrak{Q}(s_0, T_0)$ bzw. $\mathfrak{P}(T_0, c)$ laufen, und es ist $\mu = T^{-k}\varrho$ gesetzt. Nach (44) und (46) ist

$$\begin{aligned} \frac{c_4}{2c_5} &< \mu^{(l)} < 1 \qquad (l = 1, \ldots, r_1)\,, \\ |\mu^{(l)}| &< \left(1 + \frac{c_4}{2c_5}\right)\Delta^n \qquad (l = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2) \end{aligned}$$

und damit nach Hilfssatz 7:

$$J(\mu) = D^{1/2(1-s)} \prod_{l=1}^{r_1} F(\mu^{(l)}) \prod_{m=r_1+1}^{r_1+r_2} H(\mu^{(m)})$$

mit

$$F(\mu^{(l)}) = \frac{\Gamma^s\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)} (\mu^{(l)})^{\frac{s}{k}-1} > c_6\,,$$

$$H(\mu^{(m)}) \to H(0) > c_7 \qquad (\Delta \to 0)\,.$$

Wenn wir also Δ genügend klein und unabhängig von T wählen, erhalten wir

$$J(\mu) > c_8\,. \tag{48}$$

Aus (47), (48) und Satz 1 folgt für genügend großes T:

(49)

$$\operatorname{Re} \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{B_\gamma} L^s(\xi) V^2(\xi) R(\xi) E(-\nu\varepsilon^k \xi)\, dx > c_9 T^{n(s-k)} Q^2(s_1, T_1) Q(s_0, T_0) P(T_0, c)\,.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \int_H L^s(\xi) V^2(\xi) R(\xi) E(-\nu\varepsilon^k \xi)\, dx &\ll \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in H} |L^s(\xi) R(\xi)| \int_U |V(\xi)|^2 dx \\ &= \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in H} |L^s(\xi) R(\xi)|\, Q(s_1, T_1)\,. \end{aligned} \tag{50}$$

Aus Satz 3, Hilfssatz 12 und (14) resultiert für $(x_1, \ldots, x_n) \in H$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} R(\xi) &\ll Q(s_1, T_1)\, Q(s_0, T_0)\, P(T_0, c)\, T^{-nk + nk\left(1-\frac{1}{k}\right)^{l_1} + \frac{nk}{4}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{l_0} + \Delta - \frac{b}{4}} \\ &\ll Q(s_1, T_1)\, Q(s_0, T_0)\, P(T_0, c)\, T^{-nk - \frac{b}{24k}}\,, \end{aligned} \tag{51}$$

wobei $l_1 = \left[\frac{s_1}{n}\right]$, $l_0 = \left[\frac{s_0}{n}\right]$ und beispielsweise $\Delta = \frac{b}{24k}$ sei. Mit der trivialen Abschätzung $L^s(\xi) \ll T^{ns}$ erhalten wir aus (50) und (51):

$$\int_H L^s(\xi) V^2(\xi) R(\xi) E(-\nu\varepsilon^k \xi)\, dx \ll T^{n(s-k)} Q^2(s_1, T_1) Q(s_0, T_0) P(T_0, c)\, T^{-\frac{b}{24k}}$$

und hieraus mit (49) für $N(\nu) > c_{10}$:

$$\int_U L^s(\xi) V^2(\xi) R(\xi) E(-\nu\varepsilon^k \xi)\, dx > 0\,.$$

Dies bedeutet: Es gibt total nicht-negative ganze Körperzahlen λ_j $(j = 1, \ldots, s)$, $\sigma_p (p = 1, \ldots, 2s_1)$, $\tau_q (q = 1, \ldots, s_0)$ derart, daß

$$\nu\varepsilon^k = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j^k + \sum_{p=1}^{2s_1} \sigma_p^k + \sum_{q=1}^{s_0} \tau_q^k$$

mit

$$N(\lambda_j) \leq T^n = c_{11} N(\nu)^{1/k},$$

$$N(\sigma_p) \leq T_1^n = c_{12} N(\nu)^{1/k},$$

$$N(\tau_q) \leq T_0^n c^n T_0^n = c_{12} N(\nu)^{1/k}.$$

Also ist

$$G(k) \leqq s + 2s_1 + s_0 = 4nk + 1 + 2n\left[1 + \frac{\log\frac{b}{6nk}}{\log\left(1-\frac{1}{k}\right)}\right] + n\left[2 + \frac{\log\frac{b}{3nk}}{\log\left(1-\frac{1}{k}\right)}\right]$$

$$< 4nk + 1 + 4n + 2n(k - {}^1/_2)\left(\log k + \log\left(\frac{n^2+1}{2}\right) + \log 12\right)$$

$$+ n(k - {}^1/_2)\left(\log k + \log\left(\frac{n^2+1}{2}\right) + \log 6\right) < nk\left(3\log k + 3\log\left(\frac{n^2+1}{2}\right) + 11\right).$$

Hierbei wurden die Abschätzungen [8, Seite 68]:

$$-\log\left(1-\frac{1}{k}\right) > k^{-1}\left(1-\frac{1}{2k}\right)^{-1} = \left(k-\frac{1}{2}\right)^{-1},$$

$$6,7 < 2\log 12 + \log 6 < 6,8$$

benutzt. Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Literatur

[1] Hecke, E.: Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig 1954, Akadem. Verlagsges.
[2] Hua, L. K.: Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie. Enzykl. d. Math. Wiss. Bd. I 2, Heft 13, Teil I (1959).
[3] Mitsui, T.: Generalized prime number theorem. Japanese J. Math. **26**, 1—42 (1956).
[4] Mitsui, T.: On the Goldbach problem in an algebraic number field I. J. Math. Soc. Japan **12**, 290—324 (1960).
[5] Siegel, C. L.: Generalization of Waring's problem to algebraic number fields. Am. J. Math. **66**, 122—136 (1944).
[6] Siegel, C. L.: Sums of m-th powers of algebraic integers. Ann. Math. **46**, 313—339 (1945).
[7] Tatuzawa, T.: On the Waring problem in an algebraic number field. J. Math. Soc. Japan **10**, 322—341 (1958).
[8] Vinogradov, I.: The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. London: Interscience publishers. O. J.
[9] Zassenhaus, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie. Bd. I. Leipzig und Berlin 1937.

(Eingegangen am 15. März 1961)

Bosbach, B.
Math. Annalen 144, 239—252 (1961)

Arithmetische Halbgruppen

Von

Bruno Bosbach in Köln

Einleitung

In zwei früheren Arbeiten [1], [2], deren Inhalt bekannt sei und die wir hier mit I, II zitieren wollen, wurden *Holoide*, *Verbände* und *Ringe* charakterisiert, in denen sich jedes a in gewisser Weise eindeutig in *(Halb-) Primelemente* zerlegen läßt. Eine Frage, die sich an diese Untersuchungen anschließt, ist folgende: „*Welche Bedingungen sind notwendig und hinreichend dafür, daß sich in einem Holoid, einem Verband oder einem Ring jedes a in der Weise halbeindeutig in (Halb-) Primelemente zerlegen läßt, daß je zwei unverkürzbare (Halb-) Primfaktorzerlegungen desselben a dieselben Faktoren besitzen, (wenn auch nicht in jeweils derselben Potenz)?*" Die Beantwortung dieser Frage ist das Hauptziel dieser Note. Sie wird uns Ergebnisse liefern, die allgemeiner sind als der bisher allgemeinste Zerlegungssatz, nämlich I, Satz 2. Aus der Formulierung der Frage wird weiter folgen, daß uns ihre Beantwortung ein Kriterium liefert für Holoide, Verbände und Ringe, in denen jedes a eine Primelementzerlegung besitzt. Neben dem oben erwähnten Hauptziel verfolgt diese Note als ein Nebenziel eine weitere Untersuchung der Struktur der C^*-Holoide. Ein zweites Nebenziel ist die Klärung des Zusammenhangs der in I, II und den nachfolgenden Paragraphen untersuchten Strukturen. Sie haben gemeinsam die Eigenschaft, daß sich in ihnen jedes a halbeindeutig in Halbprimelemente zerlegen läßt, weshalb wir sie als arithmetisch bezeichnen wollen. Jene Klärung gelingt, genauso wie die angestrebten Charakterisierungen, unter ausschließlicher Verwendung bekannter, in I und II entwickelter Begriffe. — Die Verträglichkeit und Unabhängigkeit der aufgestellten Systeme wird nachgewiesen.

§ 1. Allgemeinste arithmetische Holoide

In diesem Paragraphen sollen arithmetische Holoide allgemeinster Struktur untersucht werden.

Def. 1. *Wir nennen ein Holoid H (halb-) schwachkanonisch, wenn jedes $a \in H$ eine (Halb-) Primfaktorzerlegung besitzt und je zwei unverkürzbare (Halb-) Primfaktorzerlegungen desselben $a \in H$ dieselben (Halb-) Primfaktoren aufweisen, (wenn auch nicht in jeweils derselben Potenz).*

Ist $a = \prod_{\sigma=1}^{s} p_\sigma^{n_\sigma}$[1]) *eine in diesem Sinne halbeindeutig bestimmte (Halb-) Primfaktorzerlegung von* $a \in H$, *so nennen wir* $\prod_{\sigma=1}^{s} p_\sigma^{n_\sigma}$ *eine (halb-) schwachkanonische Zerlegung von* a.

Man bestätigt ohne allzu große Schwierigkeiten, daß ein Holoid H genau dann schwachkanonisch ist, wenn jedes $a \in H$ eine Primfaktorzerlegung besitzt, und wir wissen, daß in solchen Holoiden jedes Halbprimelement ein Primelement ist.

Kürzen wir (halb-) schwachkanonisch mit (hsk), bzw. (sk) ab, so ist der folgende Zusammenhang fast unmittelbar klar:

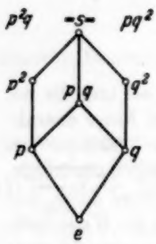

Fig. 1

(1′) $\quad$ (k) $\longrightarrow$ (hk) $\longrightarrow$ (hsk);
(k) $\longrightarrow$ (sk) $\longrightarrow$ (hsk).

Es gilt weiter:

(1″) $\quad$ (k) $\not\longleftarrow$ (hk) $\not\longleftarrow$ (hsk);
(k) $\not\longleftarrow$ (sk) $\not\longleftarrow$ (hsk).

Denn nach I, (2′), gilt (hk) $\not\longrightarrow$ (k), also auch (hsk) $\not\longrightarrow$ (sk). Fig. 1 beweist (sk) $\not\longrightarrow$ (k) und damit (hsk) $\not\longrightarrow$ (hk).

(1′) und (1″) liefern zusammen:

(1) $\quad$ (k) $\underset{\not\leftarrow}{\rightarrow}$ (hk) $\underset{\not\leftarrow}{\rightarrow}$ (hsk);
(k) $\underset{\not\leftarrow}{\rightarrow}$ (sk) $\underset{\not\leftarrow}{\rightarrow}$ (hsk).

Def. 2. *Wir nennen H ein* $A^{*'''}$*-Holoid, wenn H die Bedingungen* (A_1^*) *und* (A_2) *erfüllt, sowie die folgende:*

$(A_3^{*'''})$ *Ist p ein Halbprimelement und gilt* $p \precsim bc$ *und sind* p, c *minimalfremd, so folgt* $p \precsim b^2$[2]).

Wir nennen H ein A″*-Holoid, wenn H die Bedingungen* (A_1) *und* (A_2) *erfüllt, sowie die folgende:*

(A_3'') *Ist p ein Halbprimelement und gilt* $p \mid bc$ *und sind* p, c *minimalfremd, so folgt* $p \mid b$.

Nun gilt:

(2) *Ist H ein* $A^{*'''}$*-Holoid, so ist H halbschwachkanonisch.*

Aus (A_1^*) und (A_2) folgt die Existenz einer Halbprimfaktorzerlegung für jedes $a \in H$ gemäß I, (11). Analog II, (18), ergibt sich, daß jeder Halbprimfaktor einer unverkürzbaren Halbprimfaktorzerlegung von a ein Minimalteiler von a ist, und es folgt analog I, (12), unter Berücksichtigung von $(A_3^{*'''})$ $p \precsim \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu \rightarrow p \mid p_\mu$ für mindestens ein $\mu (1 \leq \mu \leq n)$. Der Rest ergibt sich dann nach bekannter Methode.

(3) *Ist H ein* A″*-Holoid, so ist H schwachkanonisch.*

---

1) Auch für diese Note sei vereinbart, unter Potenzprodukten nur solche mit paarweise verschiedenen Basiselementen zu verstehen.

2) Entsprechend seien $(B_3^{*'''})$ und $(C_3^{*'''})$ definiert.

Denn wegen (A_1) und (A_2) ist I, (11), erfüllt; aus (A_3'') folgt analog I, (12), $p \mid \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu \to p \mid p_\mu$ für mindestens ein $\mu (1 \leqq \mu \leqq n)$, woraus sich dann der Rest des Beweises, ebenfalls nach bekannter Methode, ergibt.

Def. 3. *Es sei H ein halbschwachkanonisches Holoid. Dann verstehen wir unter der Länge $|a|$ von $a \in H$ die Anzahl der verschiedenen Halbprimfaktoren einer (und damit jeder) halbschwachkanonischen Zerlegung von a.*

(4) *Ist H ein halbschwachkanonisches Holoid, so besitzt jedes $a \in H$ von der Länge 1 eine eindeutig bestimmte unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegung.*

Denn dies folgt unmittelbar aus Def. 1 und dem Begriff der Unverkürzbarkeit.

Def. 4. *Ist H ein Holoid und sind $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ und $\prod_{\mu=1}^{m} q_\mu$ zwei unverkürzbare Halbprimfaktorprodukte, so nennen wir $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ und $\prod_{\mu=1}^{m} q_\mu$ gleichförmig, wenn jedes p_ν ein q_μ ist und in $\prod_{\mu=1}^{m} q_\mu$ in der gleichen Häufigkeit vorkommt wie in $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ und umgekehrt jedes q_μ ein p_ν ist und in $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ in der gleichen Häufigkeit vorkommt wie in $\prod_{\mu=1}^{m} q_\mu$.*

Sind $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ und $\prod_{\mu=1}^{m} q_\mu$ gleichförmig, so schreiben wir $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu \doteq \prod_{\mu=1}^{m} q_\mu$. Die Zeichen $=$, $\leqq$, $<$ seien weiterhin auf die „Werte" der Produkte bezogen.

Es gilt in Fig. 1 $p^2 q = p q^2$, aber $p^2 q \mathrel{\dot{\neq}} p q^2$. Ferner ist hier $p^2 q \doteq p q p$, $pq \leqq s$ und $pq < pqp$. Natürlich gilt stets $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu \neq \prod_{\mu=1}^{m} q_\mu \to \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu \mathrel{\dot{\neq}} \prod_{\mu=1}^{m} q_\mu$, also auch $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu < \prod_{\mu=1}^{m} q_\mu \to \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu \mathrel{\dot{\neq}} \prod_{\mu=1}^{m} q_\mu$.

Für die weiteren Ausführungen dieses Paragraphen wollen wir ungleichförmige unverkürzbare Halbprimfaktorprodukte als verschiedene Dinge ansehen.

Def. 5. *Ist $\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}$ ein Halbprimfaktorprodukt, so nennen wir $\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}$ ein Kernprodukt von a, wenn es eine unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegung $\prod_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{n_\sigma}$ von a gibt, so daß jedes $b_\varkappa^{m_\varkappa}$ ein $a_\sigma^{n_\sigma}$, also jedes $b_\varkappa$ ein a_σ und dann hier für $m_\varkappa = n_\sigma$ ist.*

Ist $\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}$ ein Kernprodukt von a, so schreiben wir $\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa} \lhd a$.

Natürlich ist jedes Kernprodukt unverkürzbar. In Fig. 1 sind p, q, p^2, q^2, $p^2 q$ und $p q^2$ genau alle Kernprodukte von s. pq ist kein Kernprodukt von s.

Def. 6. *Wir nennen zwei Kernprodukte von a äquivalent in a, wenn sie dieselben Basiselemente besitzen. — Gilt $\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa} \lhd a$, so bezeichnen wir die Klasse der zu $\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}$ in a äquivalenten Kernprodukte mit $K_a\left(\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$.*

Man sieht sofort, daß die eingeführte Äquivalenzrelation die Forderungen der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität erfüllt. Im oben genannten Beispiel sind p und p^2 äquivalent in s, ebenso q und q^2, ebenso pq^2 und p^2q. Nicht äquivalent in s sind etwa p und q^2.

Def. 7. *Wir nennen* $\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{l_\varkappa}$ *ein minimales Element in* $K_a\left(\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$, *wenn es bezüglich* $\leqq$ *minimal ist, und bezeichnen* $\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{l_\varkappa}$ *dann auch als ein minimales Kernprodukt von* a[3]).

Als minimalen Vorgänger von $\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{l_\varkappa}$ *in* $K_a\left(\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$ *bezeichnen wir jedes minimale Element aus* $K_a\left(\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$, *das* $\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{l_\varkappa}$ *teilt.*

Im genannten Beispiel ist etwa p minimaler Vorgänger von p^2 in $K_s(p)$.

Nun können wir als Haupthilfssatz dieses Paragraphen beweisen:

(5) *Ist H ein halbschwachkanonisches Holoid, so besitzt jedes $a \in H$ höchstens endlich viele halbschwachkanonische Zerlegungen.*

Es sei a ein Element aus H, sowie $a = \prod_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{n_\sigma}$ eine unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegung von a. Dann sagen wir, die natürliche Zahl n $(1 \leqq n \leqq s)$ habe die Eigenschaft (E), wenn folgendes gilt:

(E_a) *Zu jedem* $\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa} \lhd a$ *mit* $k \leqq n$ *gibt es einen minimalen Vorgänger in* $K_a\left(\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$.

(E_b) *Es existiert eine kleinste natürliche Zahl* $m_a(n)$, *so daß alle minimalen Kernprodukte von* a, *deren Länge* $\leqq n$ *ist, Teilprodukte von* $\prod_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{m_a(n)}$ *sind.*

Dann hat zunächst 1 die Eigenschaft (E). Denn in jedem $K_a(a_\sigma^{n_\sigma})$ gibt es ein $a_\sigma^{\nu_\sigma}$ mit minimalem ν_σ, weshalb (E_a) für $n = 1$ erfüllt ist, und es hat $m_a(1) = \max(\nu_\sigma)$ $(1 \leqq \sigma \leqq s)$ die Eigenschaft (E_b), was aus (4) folgt.

Es sei gezeigt, daß $n \leqq s - 1$ die Eigenschaft (E) hat. Dann konstruieren wir zu jeder der $\binom{s}{n+1}$ Klassen $K_a\left(\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$ mit $k = n + 1$ ein $m\left(\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$ nach folgender Vorschrift: Sind $\prod_{\varkappa=2}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa^1}, \ldots, \prod_{\varkappa=2}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa^\varrho}, \ldots, \prod_{\varkappa=2}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa^r}$ die nach (E_a) existierenden und nach (E_b) höchstens endlich vielen minimalen Kernprodukte aus $K_a\left(\prod_{\varkappa=2}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$, so gibt es zu jedem ϱ $(1 \leqq \varrho \leqq r)$ ein kleinstes ϱ_1, so daß

---

[3]) Diese Bezeichnung ist zwar nicht ganz logisch, da es zu einem minimalen Kernprodukt von a durchaus noch echte Vorgänger (von kleinerer Länge) unter den Kernprodukten von a geben kann, sie erspart jedoch an einigen Stellen Umständlichkeiten.

$b_1^{\varrho_1} \prod_{\varkappa=2}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa^{\varrho}} \lhd a$ ist. Das Maximum dieser ϱ_1 sei $\varrho(1)$ und es seien entsprechend $\varrho(2), \ldots, \varrho(n+1)$ ermittelt. Dann bezeichnen wir mit $m'\left(\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$ die Zahl $\max(\varrho(\varkappa))$ $(1 \leqq \varkappa \leqq n+1)$. Das Maximum der $\binom{s}{n+1}$ vielen $m'\left(\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$ bezeichnen wir mit $m'(n+1)$ (Wir hätten diese Größe natürlich auch ermitteln können, indem wir zunächst das Maximum aller bei den verschiedenen Kernprodukten von der Länge $n+1$ drankommenden $\varrho(1)$, sodann das der $\varrho(2)$ usw. und schließlich das Maximum dieser Maxima gebildet hätten) Wir setzen nun $\max(m'(n+1),\ m_a(n)) = m(n+1)$. Ist dann $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m_\varkappa} \lhd a$ mit $n^* \leqq n+1$, so besitzt $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m_\varkappa}$ einen minimalen Vorgänger in $K_a\left(\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$, der Teilprodukt von $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m(n+1)}$ ist. Denn ist $n^* \leqq n$, so ist wegen $m_a(n) \leqq m(n+1)$ nichts zu zeigen. Ist aber $n^* = n+1$ und irgendein $m_\varkappa \geqq m(n+1)+1$, so dürfen wir $m_1 \geqq m(n+1)+1$ annehmen. Dann existiert nach Induktionsannahme zu $\prod_{\varkappa=2}^{n^*} b_\varkappa^{m_\varkappa}$ ein minimaler Vorgänger $\prod_{\varkappa=2}^{n^*} b_\varkappa^{l_\varkappa}$ in $K_a\left(\prod_{\varkappa=2}^{n^*} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$, der wegen $m_a(n) \leqq$ $\leqq m(n+1)$ Teilprodukt von $\prod_{\varkappa=2}^{n^*} b_\varkappa^{m(n+1)}$ ist, und zu diesem nach Konstruktion ein $l_1 \leqq m'(n+1) \leqq m(n+1)$, so daß $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{l_\varkappa}$ ein Kernprodukt von a, ein Teilprodukt der Länge $n+1$ von $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m(n+1)}$ und natürlich ein Vorgänger von $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m_\varkappa}$ in $K_a\left(\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$ ist. Da es nur endlich viele (unverkürzbare) Teilprodukte der Länge $n+1$ von $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m(n+1)}$ gibt, folgt weiter, daß es unter diesen ein minimales geben muß, das Kernprodukt von a und Vorgänger von $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m_\varkappa}$ ist. Ist dann etwa $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{\lambda_\varkappa}$ ein solches Produkt, so ist $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{\lambda_\varkappa}$ ein minimaler Vorgänger von $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m_\varkappa}$ in $K_a\left(\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$. Denn gäbe es ein $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{\nu_\varkappa} <$ $< \prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{\lambda_\varkappa}$ in $K_a\left(\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$, so würde nach unserer Konstruktion in dieser Klasse auch ein $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{\mu_\varkappa} < \prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{\lambda_\varkappa}$ existieren, das Teilprodukt von $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m(n+1)}$ wäre, mit Widerspruch zur Konstruktion von $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{\lambda_\varkappa}$. Somit hat $n+1$ die Eigenschaft (E_a).

Ist weiter $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{l_\varkappa}$ $(n^* \leqq n+1)$ ein minimales Element in $K_a\left(\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m_\varkappa}\right)$, so muß $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{l_\varkappa}$ ein Teilprodukt von $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{m(n+1)}$ sein. Denn wäre ein $l_\varkappa \geqq m(n+1)+1$, so müßte $n^* = n+1$ sein und wir dürften $l_1 \geqq m(n+1)+1$ annehmen und könnten nach dem oben angewandten Konstruktionsverfahren in $K_a\left(\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{l_\varkappa}\right)$ ein $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{\lambda_\varkappa}$ finden, so daß $\prod_{\varkappa=2}^{n^*} b_\varkappa^{\lambda_\varkappa} \leqq \prod_{\varkappa=2}^{n^*} b_\varkappa^{l_\varkappa}$ und $\lambda_1 \leqq m(n+1) < < l_1$, also wegen der Unverkürzbarkeit von $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{l_\varkappa}$ insgesamt $b_1^{\lambda_1} \prod_{\varkappa=2}^{n^*} b_\varkappa^{\lambda_\varkappa} \leqq \leqq b_1^{\lambda_1} \prod_{\varkappa=2}^{n^*} b_\varkappa^{l_\varkappa} < b_1^{l_1} \prod_{\varkappa=2}^{n^*} b_\varkappa^{l_\varkappa}$ wäre, mit Widerspruch zur Minimaleigenschaft von $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{l_\varkappa}$. Es ist also jedes minimale $\prod_{\varkappa=1}^{n^*} b_\varkappa^{l_\varkappa} \lhd a$ mit $n^* \leqq n+1$ ein Teilprodukt von $\prod_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{m(n+1)}$ und wir brauchen nur noch das Minimum der natürlichen Zahlen mit dieser Eigenschaft von $m(n+1)$ als $m_a(n+1)$ festzulegen, um den Existenzbeweis von $m_a(n+1)$ und damit insgesamt denjenigen von $m_a(s)$ zu vollenden.

Damit ist aber alles gezeigt. Denn in $K_a\left(\prod_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{n_\sigma}\right)$ ist jedes Element minimal und es enthält diese Klasse genau alle unverkürzbaren Halbprimfaktorzerlegungen von a.

(6) *Ist H ein Holoid, in dem jedes Element mindestens eine, aber höchstens endlich viele unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegungen besitzt, so erfüllt H die Bedingung* (A_1^*).

Ist $a = tt'$ und $t = a$, so ist $e \leqq t'$ Minimalpartner zu t in a. Es sei deshalb $t < a$. Auf Grund der Voraussetzung gibt es ein $\prod_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{m}$, so daß jede unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegung von a ein Teilprodukt von $\prod_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{m}$ ist. Ist nun etwa $t' = \prod_{\varkappa=1}^{k} t'_\varkappa$ eine Halbprimfaktorzerlegung von t', so gilt $t \prod_{\varkappa=1}^{k} t'_\varkappa = a$, und wir können durch sukzessives Streichen eine Darstellung $t \prod_{\varkappa'=1}^{k'} t'_{\varkappa'} = a$ mit $k' \geqq 1$ erhalten, in der sich kein $t'_{\varkappa'}$ mehr streichen läßt. Somit gilt: $t \prod_{\varkappa'=1}^{k'} t'_{\varkappa'} = a$, $\prod_{\varkappa'=1}^{k'} t'_{\varkappa'} \leqq t'$ und: $\prod_{\varkappa'=1}^{k'} t'_{\varkappa'}$ ist ein unverkürzbares Teilprodukt von $\prod_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{m}$. Da es nur endlich viele Halbprimfaktorprodukte mit diesen drei Eigenschaften von $\prod_{\varkappa'=1}^{k'} t'_{\varkappa'}$ gibt, können wir eines von minimalem Wert unter ihnen annehmen. Ist dann etwa $\prod_{\varrho=1}^{r} \bar{t}_\varrho$ ein solches und hat $\prod_{\varrho=1}^{r} \bar{t}_\varrho$ den Wert $\bar{t}$,

so ist $\bar{t} \leqq t'$ Minimalpartner zu t in a, denn die Annahme eines $t'' < \bar{t}$ mit $tt'' = a$ würde die Existenz eines Teilproduktes $\prod_{\lambda=1}^{l} t''_\lambda$ von $\prod_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{m}$ mit den drei erwähnten Eigenschaften und $\prod_{\lambda=1}^{l} t''_\lambda \leqq t'' < \bar{t} = \prod_{\varrho=1}^{r} \bar{t}_\varrho$ bedingen.

(7) *Ist H ein Holoid, in dem jedes Element mindestens eine, aber höchstens endlich viele unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegungen besitzt, so erfüllt H die Bedingung* (A_2).

Aus dem Beweis zu (6) folgt, daß sich jeder von e verschiedene Minimalteiler von $a \in H$ auffassen läßt als unverkürzbares Teilprodukt von $\prod_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{m}$. Hiervon gibt es aber nur endlich viele, woraus wegen der Transitivität und Antisymmetrie von $\lesssim$ die Behauptung folgt.

(8) *Ist H ein halbschwachkanonisches Holoid, so erfüllt H die Bedingung* (A_3''').

Es ist $e < p \lesssim a$ gleichbedeutend damit, daß p in jeder unverkürzbaren Halbprimfaktorzerlegung von a als Faktor vorkommt. Denn es sei $a = p \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ eine unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegung von a. Gäbe es dann ein $t < p$ mit $t \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu = a$, so ergäbe sich eine unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegung $\prod_{\varrho=1}^{r} t_\varrho \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ von a, in der wegen $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu < a$ mindestens ein t_ϱ ein p_ν wäre, woraus für mindestens ein p_ν folgen würde $p_\nu < p$, mit Widerspruch zur Unverkürzbarkeit von $p \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$. — Ist umgekehrt $e < p \lesssim a$ und p ein Minimalpartner zu t in a, so gilt $t < a$, woraus sich ergibt, daß p in mindestens einer, also dann auch in jeder unverkürzbaren Halbprimfaktorzerlegung von a als Faktor vorkommt.

Gilt nun $e \neq p \lesssim bc$ und sind p, c minimalfremd, so kann p kein Faktor der halbschwachkanonischen Zerlegungen von c sein, weshalb p ein Faktor der halbschwachkanonischen Zerlegungen von b sein muß, was nach unserer Vorbemerkung $p \lesssim b$ bedeutet. Gilt aber $e = p \lesssim bc$, so folgt $p \lesssim b$ a fortiori.

(9) *Ist H ein schwachkanonisches Holoid, so erfüllt H die Bedingung* (A_3'').

In einem schwachkanonischen Holoid ist jedes Halbprimelement ein Primelement. Der Rest folgt analog I, (30).

Zusammenfassend können wir also sagen:

(10) *Ist H ein halbschwachkanonisches Holoid, so ist H ein $A^{*'''}$-Holoid.*

(11) *Ist H ein schwachkanonisches Holoid, so ist H ein A''-Holoid.*

Aus (2) und (10), bzw. aus (3) und (11) folgt dann:

Satz 1: *Es sind die beiden Aussagen äquivalent:*

1. *H ist ein $A^{*'''}$-Holoid und* 2. *H ist halbschwachkanonisch.*

Satz 2: *Es sind die beiden Aussagen äquivalent:*

1. *H ist ein A''-Holoid und* 2. *H ist schwachkanonisch.*

§ 2. Spezielle arithmetische Holoide

Um den Zusammenhang der untersuchten arithmetischen Holoide besser erkennen zu können, aber auch, um die kanonischen Halbverbände und halbschwachkanonischen Ringe charakterisieren zu können, sollen in diesem Paragraphen zunächst die C′- und C″-Holoide untersucht werden, von denen bereits in I die Rede war. Ein C′- bzw. C″-Holoid ist natürlich ein Holoid, das die Bedingungen (C_1) und (C_2) erfüllt, sowie die Bedingung (C_3') bzw. (C_3''). Dabei soll (C_3') die der Bedingung (B_3') und (C_3'') die der Bedingung (B_3'') entsprechende sein[4]).

(12) *Ist H ein Holoid und at_1t_2 ein Produkt aus H, in dem t_2 Infimalpartner zu at_1 in $(at_1)t_2$ ist, sowie t_1 Infimalpartner zu a in at_1, so ist t_1t_2 Infimalpartner zu a in $a(t_1t_2)$.*

Denn es gilt: $at_1t_2|ab \to t_1|b \to t_1x = b \to at_1t_2|at_1x \to t_2|x \to t_2y = x \to$ $\to (t_1t_2)y = b \to t_1t_2|b$.

(13) *Ist H ein Holoid, das (C_1) erfüllt, und p ein Halbprimelement aus H, so gilt: $a < ap \leqq ab \to p \leqq b$.*

Denn wäre etwa $c < p$ und $ac = ap$, so ergäbe sich $p = pc \leqq ac$ und, da p Infimalpartner zu c in pc ist, hieraus $p \leqq a$, etwa $px = a$. Dann würde aber folgen: $ap = ac = xpc = xp = a$, mit Widerspruch zur Voraussetzung.

(14) *Ist H ein Holoid, in dem jedes $a \in H$ eine Halbprimfaktorzerlegung besitzt und in dem für jedes Halbprimelement p gilt: $a < ap \leqq ab \to p \leqq b$, so erfüllt H die Bedingung (C_1).*

Denn es gelte $t \leqq a$. Ist dann $t = a$, so ist e Infimalpartner zu t in a. Ist $t < a$ und etwa $t \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu = a$, so dürfen wir annehmen, daß sich kein p_ν streichen läßt, was bedeutet, daß jedes $p_\mu (1 \leqq \mu \leqq n)$ Infimalpartner zu $t \prod_{\nu=1}^{\mu-1} p_\nu$ in $t \prod_{\nu=1}^{\mu} p_\nu$ ist. Hieraus folgt dann nach (12), daß $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ Infimalpartner zu t in a ist.

(15) *Ist H ein Holoid, in dem jedes $a \in H$ eine Halbprimfaktorzerlegung besitzt, so erfüllt H genau dann die Bedingung (C_1), wenn für jedes Halbprimelement p gilt: $a < ap \leqq ab \to p \leqq b$.*

Denn dies ergibt sich unmittelbar aus (13) und (14).

Aus (12) und (13) folgt noch:

(16) *Ist H ein Holoid, das (C_1) erfüllt, und $a = \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ eine unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegung von $a \in H$, so ist jedes Teilprodukt von $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ Infimalpartner zu seinem „Restprodukt" in a.*

Nun können wir beweisen:

(17) *Ist H ein C′-Holoid, so ist H primkanonisch.*

---

[4]) Wir könnten uns für das Folgende mit der Bedingung (C_3''') statt (C_3') begnügen, was die Beweise zeigen werden.

Zunächst ist H ein B'-Holoid, also halbkanonisch. Zeigen wir nun noch, daß jedes Halbprimfaktorpotenzprodukt $\prod_{\sigma=1}^{s} p_\sigma^{n_\sigma}$ mit unverkürzbaren $p_\sigma^{n_\sigma}$ und einer Halbprimkrone (p_σ) als Basis unverkürzbar ist, so sind wir fertig. Dies folgt so: Ließe sich in einem Produkt der angegebenen Art ein p_σ streichen, so könnten wir $s \geqq 2$ und $p_\sigma = p_s$ annehmen, so daß $p_s^{n_s-1} p_s \leqq p_s^{n_s-1} \prod_{\sigma=1}^{s-1} p_\sigma^{n_\sigma}$, also nach (13) $p_s \leqq \prod_{\sigma=1}^{s-1} p_\sigma^{n_\sigma}$ folgen würde[5]). Es gäbe also ein c mit $p_s c = \prod_{\sigma=1}^{s-1} p_\sigma^{n_\sigma}$. Wäre nun $c < \prod_{\sigma=1}^{s-1} p_\sigma^{n_\sigma}$, so ließe sich eine unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegung von $\prod_{\sigma=1}^{s-1} p_\sigma^{n_\sigma}$ mit p_s als Faktor gewinnen, woraus nach (13) $p_s \not\leq \prod_{\sigma=1}^{s-1} p_\sigma^{n_\sigma}$, also auch $p_s \subseteq \prod_{\sigma=1}^{s-1} p_\sigma^{n_\sigma}$ und damit nach I, (24), $p_s \leqq p_\sigma$ für mindestens ein $p_\sigma (1 \leqq \sigma = s - 1)$ folgen würde mit Widerspruch zur Voraussetzung. Also müßte $c = \prod_{\sigma=1}^{s-1} p_\sigma^{n_\sigma}$ und damit $p_s \prod_{\sigma=1}^{s-1} p_\sigma^{n_\sigma} = \prod_{\sigma=1}^{s-1} p_\sigma^{n_\sigma}$ sein. Hieraus ergäbe sich weiter $p_1 p_s \leqq p_1 \prod_{\sigma=1}^{s-1} p_\sigma^{\bar{n}_\sigma}$ mit $\bar{n}_1 = n_1 - 1$ und $\bar{n}_\sigma = n_\sigma$ für $2 \leqq \sigma \leqq$ $\leqq s - 1$. Da wegen $p_1 < p_1 p_s$ nach (13) p_s Infimalpartner zu p_1 in $p_1 p_s$ ist, würde weiter $p_s \leqq \prod_{\sigma=1}^{s-1} p_\sigma^{\bar{n}_\sigma}$ folgen, und es ergäbe sich ganz analog zum ersten Teil des Beweises: $p_s \prod_{\sigma=1}^{s-1} p_\sigma^{\bar{n}_\sigma} = \prod_{\sigma=1}^{s-1} p_\sigma^{\bar{n}_\sigma}$, weshalb wir unser Verfahren fortsetzen könnten bis wir schließlich zu dem Widerspruch $p_s \leqq p_{s-1}$ gelangten. — Es muß daher jedes Produkt der angegebenen Art unverkürzbar sein, womit alles gezeigt ist.

(18) *Ist H ein* C''*-Holoid, so ist H primkanonisch.*

Denn dies folgt unter Berücksichtigung von Fußnote [5]) aus dem Beweis von (17).

(19) *Ist H ein primkanonisches Holoid, so ist H ein* C'*- und ein* C''*-Holoid.*

Da H primkanonisch ist, sind die Bedingungen (C_1) und (C_2) erfüllt. Da jedes primkanonische Holoid kanonisch und halbkanonisch ist, folgt das Erfülltsein der Bedingungen (C_3') und (C_3'') aus dem Erfülltsein der Bedingungen (B_3') und (B_3''), die wegen (C_1) mit (C_3') bzw. (C_3'') identisch sind.

Aus (17), (18), (19) folgt nun als eine Erweiterung von I, Satz 1:

Satz 3: *Es sind je zwei der folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *H ist ein* A*-Holoid;* 2. *H ist ein* B*-Holoid;*
3. *H ist ein* C*-Holoid;* 4. *H* ist *ein* C'*-Holoid;* 5. *H ist ein* C''*-Holoid;*
6. *H ist halbprimkanonisch und* 7. *H ist primkanonisch.*

[5]) Ist p_s ein Primelement, so bedeutet dies schon einen Widerspruch.

Mit den Sätzen 1, 2 und 3 sind nun jene Systeme untersucht, die am Ende von I, § 3, erwähnt wurden, wenn man absieht vom A'-System, das keine eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen liefert, wenn man nicht (A_1) durch (A_1^*) ersetzt, wie es in II, § 1, geschah.

Im zweiten Teil dieses Paragraphen wenden wir uns noch einmal den C*-Holoiden zu. Wir zeigen zunächst:

(20) *Ist H ein Holoid, das die Bedingungen* (C_1) *und* $(C_\cap)$ *erfüllt, und ist* $a \leqq c$ & $b \leqq c$ *sowie* $(a \cap b \cap c)c = c$, *so gilt* $ab \leqq c$.

Dies folgt auf Grund der Implikation: $ab = (a \cap c)(b \cap c) = ab \cap ac \cap$ $\cap\, bc \cap cc = ab \cap (a \cap b \cap c)c \to ab \leqq c$.

(20) läßt sich natürlich für endlich viele Teiler erweitern.

(21) *Ist H ein Holoid, das* (C_1) *und* $(C_\cap)$ *erfüllt, so erfüllt H auch die Bedingung* $(C_\cup)$.

Sind a, b zwei Elemente aus H und ist a^* der Infimalpartner zu $(a \cap b)$ in a, b^* der Infimalpartner zu $(a \cap b)$ in b, so bilden wir $c = (a \cap b)a^*b^*$. Dann sieht man sofort: $a \leqq c$ & $b \leqq c$. Ist weiter $a \leqq v$ & $b \leqq v$ und etwa $(a \cap b)x = v$, so folgt $a^* \leqq x$ & $b^* \leqq x$. Zeigen wir nun noch, daß $(a^* \cap b^*)x = x$ gilt, so sind wir nach (20) fertig. Hierzu genügt aber der Nachweis von $(a^* \cap b^*)a^* = a^*$, und der folgt so: Es gilt $(a \cap b)(a^* \cap b^*) = (a \cap b)a^* \cap (a \cap b)b^* = a \cap b$. Ist dann etwa $(a^* \cap b^*)y = a^*$, so folgt weiter: $(a \cap b)a^* = (a \cap b)(a^* \cap b^*)y$ $= (a \cap b)y \to a^* \leqq y$, woraus sich wegen $y \leqq a^*$ dann $y = a^*$ und damit $(a^* \cap b^*)a^* = (a^* \cap b^*)y = a^*$ ergibt.

Es ist also nach (21) (C_1^*) gleichbedeutend mit $(C_1$ & $C_\cap)$. Wir wollen nun $a \cup b$ mittels der Operationen $*$ und $\cap$ noch etwas anders ausdrücken. Hierzu ein Hilfssatz:

(22) *Ist H ein Holoid, das* (C_1^*) *erfüllt, so gilt die Beziehung:* $((b \cap a) * b)$ $= (a * b) = (a * (b \cup a))$.

Es gilt zunächst $(a \cap b)x \geqq b \to ax \geqq b$, also $(a * b) \leqq ((a \cap b) * b)$. Andrerseits ist $(a \cap b)(a * b) = a(a * b) \cap b(a * b) \geqq b$, also $((a \cap b) * b) \leqq$ $\leqq (a * b)$. Somit ist der erste Teil der Gleichung erfüllt. Der zweite Teil folgt aus $a(a * b) = a \cup b$, was in II, (9), bewiesen wurde, und aus der Definition von $(a * b)$.

Aus (22) und (21) erhalten wir:

(23) *Ist H ein Holoid, das* (C_1^*) *erfüllt, so gilt für je zwei Elemente a, b aus H die Formel:* $a \cup b = (a * b)(a \cap b)(b * a)$.

Wir erwähnen noch eine Beziehung, die interessant erscheint:

(24) *Ist H ein Holoid, das* (C_1^*) *erfüllt, so gilt für je zwei Elemente a, b aus H:* $(a * b)(b * a) = (a * b) \cup (b * a)$.

Es genügt $(a * b)(b * a) \leqq (a * b) \cup (b * a)$ nachzuweisen. Dies folgt aber, wenn wir unter a^*, bzw. b^* wieder $((a \cap b) * a)$, bzw. $((a \cap b) * b)$ verstehen, nach (22) und (23) unter Berücksichtigung von (12) aus der Beziehung: $(a \cap b)a^*b^*$ $= a \cup b = (a \cup b) \cap (a \cup b) = ab^* \cap a^*b \leqq a(a^* \cup b^*) \cap b(a^* \cup b^*) = (a \cap b)$ $(a^* \cup b^*)$.

Mit $(C_1$ & C_2 & $C_\cap)$ haben wir ein System, das uns angibt, welches Verhalten der Elemente eines Holoides H charakteristisch dafür ist, daß H ein prim-

kanonisches $^+$Holoid darstellt. Wir fragen nun abschließend, durch welches Verhalten der Ideale die primkanonischen $^+$Holoide gekennzeichnet sind. Diese Frage läßt sich beantworten mittels der endlichen Quotientenideale.

Bevor wir die weiteren Untersuchungen durchführen, erwähnen wir, daß ein Ideal endlich heißen soll, wenn es eine endliche Basis besitzt.

(25) *Ist H ein Holoid, in dem die nicht leeren Mengen A und A' dasselbe Ideal erzeugen und ebenso die nicht leeren Mengen B und B', so erzeugen auch die Mengen $A\,B$ und $A'\,B'$ dasselbe Ideal* (vgl. [3]).

Denn es gilt: $s \mid A\,Bt \leftrightarrow s \mid A'\,Bt \leftrightarrow s \mid BA'\,t \leftrightarrow s \mid B'A'\,t \leftrightarrow s \mid A'\,B'\,t$.

(26) *Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Ideale aus H, so bildet die Menge $\mathfrak{x} \geqq \mathfrak{b}$ aller x mit $\mathfrak{a}\,x \leqq \mathfrak{b}$ wieder ein Ideal* (vgl. [3]).

Denn gilt für jedes Paar $s, t \in H : s \mid \mathfrak{x}t \rightarrow s \mid ct$, so folgt: $s \mid \mathfrak{b}\,t \rightarrow s \mid \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}t \rightarrow s \mid \mathfrak{x}\,\mathfrak{a}\,t \rightarrow$ $\rightarrow s \mid c\,\mathfrak{a}\,t \rightarrow \mathfrak{a}\,c \leqq \mathfrak{b} \rightarrow c \in \mathfrak{x}$.

Def. 8. *Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Ideale aus H, so versteht man unter dem Produktideal (oder Idealprodukt) $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ das von der Menge aller ab mit $a \in \mathfrak{a}$ & $b \in \mathfrak{b}$ erzeugte Ideal und unter dem Quotientenideal (oder Idealquotienten) $\mathfrak{b} : \mathfrak{a}$ das Ideal aller x mit $\mathfrak{a}\,x \leqq \mathfrak{b}$.*

Nach (25) und Def. 8 gilt also mit $\{A\} = \mathfrak{a}$ und $\{B\} = \mathfrak{b}$ auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{A\,B\}$.

Es folgt nun der wichtige Hilfssatz:

(27) *Ist H ein Holoid und sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ drei Ideale aus H, so gilt:* $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} = \mathfrak{a} : (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$.

Denn es ist: $x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} \leftrightarrow \mathfrak{c}\,x \leqq \mathfrak{a} : \mathfrak{b} \leftrightarrow \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,x \leqq \mathfrak{a} \leftrightarrow x \in \mathfrak{a} : (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$.

Def. 9. *Ist H ein Holoid, so setzen wir in der Menge der endlichen Ideale genau dann $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$, wenn es ein endliches Ideal $\mathfrak{c}$ gibt, so daß $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} : \mathfrak{c}$ ist.*

Auf Grund von (27) ist $\leqq$ eine Halbordnungsrelation in der Menge aller endlichen Ideale von H.

Def. 10. *Wir nennen H ein* E-*Holoid, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(E_1) *Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei endliche Ideale, so ist $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ein Hauptideal.*

(E_2) *Die Menge der endlichen Ideale erfüllt die aufsteigende Teilerkettenbedingung bezüglich $\leqq$.*

Hiernach können wir nun leicht zeigen:

(28) *Die Bedingung* (E_1) *ist gleichbedeutend mit* (C_1^*).

Es genügt, $(E_1) \leftrightarrow (C_1$ & $C_\cap)$ zu zeigen. Dies folgt so: Unter Voraussetzung von (E_1) ist jedes endliche Ideal wegen $\mathfrak{a} : \{e\} = \mathfrak{a}$ ein Hauptideal, was ($C_\cap$) bedeutet, und für $a \leq b$ gilt $\{b\} : \{a\} = \{(a * b)\}$, was ($C_1$) bedingt. — Gelten aber (C_1) und ($C_\cap$), so ist jedes endliche Ideal Hauptideal, da für jede endliche Menge A mit $\{A\} = \mathfrak{a}$ gilt: $s \mid At \rightarrow s \mid \bigcap At \rightarrow s \mid (\bigcap A)t$ also $\bigcap A \in \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a} = \{\bigcap A\}$. Für Hauptideale aber gilt $\{b\} : \{a\} = \{(a * b)\}$.

(29) *Die Bedingung* (E_2) *ist unter Voraussetzung von* (C_1^*) *oder* (E_1) *gleichbedeutend mit der Bedingung* (C_2).

Denn wegen der gemachten Voraussetzung ist jedes endliche Ideal ein Hauptideal und wegen $\{b\} : \{a\} = \{(a * b)\}$ und 22 ist $\{a_1\} \simeq \{a_2\} \leftrightarrow a_1 \succ a_2$, womit alles gezeigt ist.

(28) und (29) liefern unter Berücksichtigung von (21), II, (9), und II, Satz 1, den

Satz 4: *Es sind je zwei der folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *H erfüllt das Bedingungssystem* (C_1 & C_2 & $C_\cap$);
2. *H ist ein* E-*Holoid und*
3. *H ist ein primkanonisches* $^+$*Holoid.*

§ 3. Verbandstheoretische Auswertung

Wir wollen zunächst die Ergebnisse der beiden ersten Paragraphen verbandstheoretisch auswerten.

Ein Halbverband mit Einselement ist bekanntlich eine kommutative Halbgruppe mit Einselement, die das Gesetz der Idempotenz, also $a^2 = a$ für alle a aus H, erfüllt. Hieraus folgt dann: $ax = b \;\&\; by = a \rightarrow a = b^2 y = xa^2 = b$ und $ab = a \cup b$. Somit ist ein Halbverband mit Einselement ein Holoid, in dem für je zwei Elemente a, b gilt: $ab = a \cup b$. Umgekehrt ist natürlich jedes Holoid H mit $ab = a \cup b$ für alle $a, b \in H$ ein Halbverband, womit die Struktur der Halbverbände gekennzeichnet ist. Es sei nun H ein Halbverband mit Einselement. Dann ist H offenbar genau dann (halb-)schwachkanonisch, wenn H (halb-)kanonisch ist. Es liefert also die Auswertung der Sätze 1 und 2 nichts wesentlich Neues. Wir können aber zeigen, daß ein Halbverband schon dann kanonisch ist, wenn er (C_1) und (C_2) erfüllt, was für Verbände unter Berücksichtigung von II, (10), unmittelbar aus II, Satz 1, folgt.

(30) *Erfüllt der Halbverband H die Bedingung* (C_1), *so ist jedes Halbprimelement p aus H ein Primelement.*

Denn nach (13) gilt: $p|ab \;\&\; p\nmid b \rightarrow b < pb \leqq pab = ab \rightarrow p|a$.

Wegen $ab = a \cup b$ für alle a, b aus H gilt somit der

Satz 5: *Ein Halbverband mit Einselement ist genau dann kanonisch, wenn er relativ pseudokomplementär ist und* (C_2) *erfüllt.*

§ 4. Ringtheoretische Auswertung

In Anlehnung an II nennen wir einen Ring R genau dann (halb-)schwachkanonisch, wenn $\boldsymbol{R}$ (halb-)schwachkanonisch ist. Entsprechend nennen wir R genau dann arithmetisch, wenn $\boldsymbol{R}$ arithmetisch ist. Dieser Paragraph wird das Ergebnis liefern, daß ein Ring R genau dann arithmetisch ist, wenn R ein Z-Ring ist, bzw., wenn sich jedes $a \in R$ in Primelemente zerlegen läßt.

(31) *Ist R ein halbschwachkanonischer Ring und* $\boldsymbol{p}^{n+1}$ *eine unverkürzbare Halbprimfaktorpotenz, so ist* $\boldsymbol{p}$ *Infimalpartner zu* $\boldsymbol{p}^n$ *in* $\boldsymbol{p}^{n+1}$.

Ist $n = 0$, so ist nichts zu zeigen. Ist $n \geqq 1$, so muß nach (4) notwendig $\boldsymbol{p} \leqq \boldsymbol{x}$ für jedes $\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{p}^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}^{n+1}$ gelten. Hieraus folgt dann nach dem Beweis von II, (37), die Behauptung.

(32) *Ist R ein halbschwachkanonischer Ring, so ist R auch primkanonisch.*

Es genügt nach (14) der Nachweis, daß für jedes Halbprimelement $\boldsymbol{p}$ gilt: $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{ap} \leqq \boldsymbol{ab} \rightarrow \boldsymbol{p} \leqq \boldsymbol{b}$, da $\boldsymbol{R}$ dann die Bedingungen (C_1), (C_2) und (C_3''') erfüllt, aus denen nach Fußnote [4]) die Behauptung folgt. Wegen des Beweises von II, (37), genügt es schon, zu zeigen, daß für jedes Halbprimelement $\boldsymbol{p}$ die Implikation $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{ap} = \boldsymbol{ab} \rightarrow \boldsymbol{p} \leqq \boldsymbol{b}$ erfüllt ist. Dies folgt aber so: Es ist

$p \lesssim ab$, da $a < ap$ gilt. Ist gleichzeitig $p \not\lesssim a$, so muß notwendig $p \lesssim b$ sein, erst recht also $p \leqq b$. — Ist dagegen $p \lesssim a$ und etwa $p^m \prod\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu = a$ eine halbschwachkanonische Zerlegung von a mit $p_\nu \neq p \,(1 \leqq \nu \leqq n)$, so folgt nach (31) $p^m p \leqq p^m \left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) b \rightarrow p \leqq \left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) b$. Ist hierbei $p \lesssim \left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) b$, so ergibt sich $p \lesssim b \rightarrow p \leqq b$ wegen $p \not\lesssim \prod\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu$. Ist aber $p \not\lesssim \left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) b$, so folgt nach dem ersten Teil des Beweises $p \left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) b = \left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) b \rightarrow \left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) p \leqq$ $\leqq \left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) b \rightarrow p \leqq b$.

Nach (32) können wir nun unter Berücksichtigung von (1′) das angekündigte Ergebnis aussprechen:

Satz 6: *Es sind je zwei der folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *R ist ein Z-Ring;* 2. *Jedes $a \in R$ läßt sich in Primelemente zerlegen;*
3. *R ist halbschwachkanonisch;* 4. *R ist schwachkanonisch;*
5. *R ist halbkanonisch;* 6. *R ist kanonisch;*
7. *R ist halbprimkanonisch und* 8. *R ist primkanonisch.*

Ist R ein Z-Ring, also ein arithmetischer Ring, so sind die Relationen $\sim$ und $=$ gleichbedeutend[6]).

§ 5. Der Zusammenhang der arithmetischen Strukturen

In diesem Paragraphen sollen einige Systeme so zusammengestellt werden, daß eine bessere Einsicht in den Zusammenhang der verschiedenen untersuchten Strukturen ermöglicht wird. Da jeder arithmetische Ring ein Z-Ring ist, ist ringtheoretisch nichts zu zeigen. — Verbandstheoretisch erhalten wir den Zusammenhang:

$$(33)\quad \begin{array}{ccccc} (\mathrm{hsk}) & \leftrightarrow & (A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, A_v) & \leftrightarrow & (\mathrm{hk}) \\ \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\ (\mathrm{sk}) & \leftrightarrow & (A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, D) & \leftrightarrow & (\mathrm{k}) \end{array}$$

Wenden wir uns den Holoiden zu, so gilt hier zunächst:

$$(34)\quad \begin{array}{llll} (\mathrm{hsk}) \leftrightarrow (A_1^* \,\&\, A_2 \,\&\, A_3''') & & (\mathrm{sk}) \leftrightarrow (A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, A_3'') \\ (\mathrm{hk}) \leftrightarrow (B_1 \,\&\, B_2 \,\&\, B_3''') & & (\mathrm{k}) \leftrightarrow (B_1 \,\&\, B_2 \,\&\, B_3'') \\ (\mathrm{hpk}) \leftrightarrow (C_1 \,\&\, C_2 \,\&\, C_3''') & & (\mathrm{pk}) \leftrightarrow (C_1 \,\&\, C_2 \,\&\, C_3'') \end{array}$$

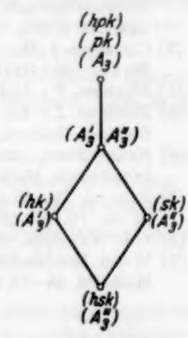

Fig. 2

Weiter sind wir in der Lage, mit Hilfe der Bedingungen (A_1^*), (A_2), (A_3), (A_3'), (A_3''), (A_3''') den Zusammenhang der untersuchten Holoide zu beschreiben. Zunächst bilden die Aussagen: H ist primkanonisch, H ist kanonisch, H ist halbkanonisch, H ist schwachkanonisch und H ist halbschwachkanonisch einen Verband ($>$ für $\rightleftarrows$). Ferner erfüllt jedes der untersuchten

[6]) Dieser Sachverhalt ist in Ringen mit aufsteigender Teilerkettenbedingung bezüglich $\|$ stets gegeben, was aus II, (31′), ohne Schwierigkeiten abgeleitet werden kann.

Holoide die Bedingungen (A_1^*) und (A_2). Die Differenzierung wird also bewirkt durch die Bedingungen (A_3), (A_3'), (A_3''), (A_3'''), so daß wir zu der anschaulichen Charakterisierung der Fig. 2 gelangen, wenn wir darauf verzichten, die Bedingungen (A_1^*) und (A_2) zu erwähnen. Neu ist hierbei lediglich, daß das System (A_1^* & A_2 & A_3' & A_3'') charakteristisch ist für die kanonischen Holoide, was man sich leicht klar macht, da es sich bei kanonischen Holoiden um halbkanonische handelt, in denen jedes Halbprimelement ein Primelement ist. — Von den $^+$Holoiden wollen wir in diesem Zusammenhang absehen.

§ 6. Verträglichkeit und Unabhängigkeit der aufgestellten Systeme

Über die Widerspruchsfreiheit der aufgestellten Systeme gilt das in I, § 4, Gesagte. Zum Nachweis der Unabhängigkeit ziehen wir noch einmal die Beispiele aus I heran, mit denen die Unabhängigkeit der dort aufgestellten Systeme nachgewiesen wurde. Sie liefern den Unabhängigkeitsnachweis aller in dieser Note herangezogenen, noch nicht als unabhängig nachgewiesenen Systeme, wenn man absieht von der Koppelung (A_1^* & A_2 & A_3' & A_3''). Deren Unabhängigkeit folgt aber ebenfalls leicht. Denn, daß (A_1^*) und (A_2) jeweils unabhängig sind von den übrigen Bedingungen, ergibt sich aus den bekannten Beispielen. Aber auch (A_3') und (A_3'') sind jeweils unabhängig von den übrigen Bedingungen, da sonst jedes halbkanonische, bzw. jedes schwachkanonische Holoid kanonisch wäre.

Literatur

[1] BOSBACH, B.: Charakterisierungen von Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen. Math. Ann. **139**, 184—196 (1960).

[2] BOSBACH, B.: Charakterisierungen von Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen unter Berücksichtigung der Verbände und Ringe. Math. Ann. **141**, 193—209 (1960).

[3] CLIFFORD, A. H.: Arithmetic and idealtheory of commutative semigroups. Ann. Math. **39**, 594—610 (1938).

[4] DUBREIL, P.: Algèbre. Paris: Gauthier Villars 1954.

[5] HINTZEN, J.: Ein System von unabhängigen Axiomen für Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen. Diss. Köln (1957).

[6] KLEIN, FRITZ: Gekoppelte Axiomensysteme in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen. Math. Z. **37**, 39—60 (1933).

[7] SKOLEM, TH.: Theorems of divisibility in some semigroups. Norsk Vid. Selsk. Forhdl. **24** No. 10, 48—53 (1952).

[8] v. D. WAERDEN, B. L.: Algebra. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

[9] WARD, M.: Conditions for factorization in a set closed under a single operation. Ann. Math. **36**, 36—39 (1935).

(Eingegangen am 16. Januar 1961)

Flachsmeyer, J.
Math. Annalen 144, 253—274 (1961)

Zur Spektralentwicklung topologischer Räume

Von
Jürgen Flachsmeyer in Greifswald

Einleitung

Als einen für die Topologie fundamentalen Erzeugungsprozeß neuer topologischer Räume aus Klassen gegebener Räume, hat P. S. Alexandroff den Begriff des Spektrums — zunächst in der speziellen Form gewöhnlicher Folgen simplizialer Komplexe — geschaffen. Von N. Steenrod wurde dieser Begriff auf eine breitere Grundlage gestellt.

Eine gewisse Folge (genauer Moore-Smith-Folge) von topologischen Räumen — ein sogenanntes Spektrum — erzeugt danach einen gewissen Raum, den Grenzraum dieser Folge. Die Raumfolge konvergiert gleichsam gegen den Grenzraum.

Nun fragt sich aber auch umgekehrt, ob man zu einem gegebenen Raum ein approximierendes Spektrum aus möglichst *einfachen* Objekten finden kann, mit anderen Worten, ob der Erzeugungsprozeß ergiebig genug ist.

Zu eben diesem Fragenkreis der *Spektralentwicklung topologischer Räume* gehört die vorliegende Arbeit.

Bei P. S. Alexandroff und seiner Schule werden als approximierende Gebilde endliche T_0-Räume (oder auch unendliche Räume gewisser Art) verwendet. Dies geschieht über den Begriff des Nervs von Überdeckungen.

Wir wollen anstelle des Nervs (bzw. der auch verwendeten dualen Räume zu den Nerven) Quotientenräume des Ausgangsraumes benutzen. Dem liegt folgende Vorstellung zugrunde:

Einen groben Überblick über einen Raum $\mathfrak{M}$ erhält man, wenn man ihn — Feinheiten außer acht lassend — mit einem geringen „Auflösungsvermögen“ betrachtet, wenn gewisse Punkte zu einem verschwimmen. Anstatt des Raumes $\mathfrak{M}$ sieht man eben einen Quotientenraum. Eine ganze Folge immer feiner werdender Zerlegungen führt so zu einem Spektrum für den Raum.

Welche Ergebnisse werden hier nun erhalten?

In § 2 definieren wir beliebige Zerlegungsspektren eines topologischen Raumes und studieren deren Grenzräume. Grenzräume spezieller Spektren, die von den in bezug auf die Topologie beliebig fein werdenden Zerlegungen erzeugt werden, sind sodann Erweiterungsräume der Ausgangsräume (Satz 1). Der Entwicklungsprozeß liefert hier also mehr als nur den Ausgangsraum. Bei den „vollständigen fundamentalen Zerlegungsspektren“ hat der Grenzraum weitere wichtige Eigenschaften (Satz 2).

In § 3 sollen die approximierenden Räume endliche Räume sein. Über den Begriff der von offenen (endlichen) Überdeckungen erzeugten Zerlegung gelangt man für einen T_0-Raum zu Zerlegungsspektren, in denen jeder Raum ein (endlicher) T_0-Raum ist. Der Grenzraum des von dem System aller endlichen offenen Überdeckungen erzeugten Spektrums ist alsdann eine besondere bikompakte T_0-Erweiterung zu dem Ausgangsraum (Satz 3).

Mittels dieses Ergebnisses wird in § 4 eine neue Konstruktion — eine spektrale Konstruktion — der Wallmanschen Erweiterung gegeben (Satz 4). Damit ist zugleich die Möglichkeit festgestellt, bikompakte T_1-Räume als Grenzen endlicher T_0-Räume darzustellen. Das bedeutet eine Verallgemeinerung eines Resultates von ALEXANDROFF-KUROSCH über die Darstellung von bikompakten Hausdorffschen Räumen als Grenzen endlicher T_0-Räume (Satz 5 und Satz 6).

§ 5 behandelt entsprechend zu § 4 die spektrale Konstruktion der Stone-Čechschen Erweiterung (Satz 7).

Im abschließenden 6. Paragraphen wollen wir die Nützlichkeit des hier bezogenen Standpunktes an einem weiteren Fall der Erweiterungstheorie zeigen. Für einen nulldimensionalen Hausdorffschen Raum konstruieren wir auf spektralem Wege die maximale nulldimensionale Hausdorffsche bikompakte Erweiterung (Satz 8).

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. RINOW, sei für sein Interesse, das er dieser Arbeit (Diss. Univ. Greifswald, 1960) entgegenbrachte, herzlich gedankt.

§ 1. Vorbereitungen

1. $(I, <)$ bezeichne eine nach unten gerichtete Menge, d. h. „$<$“ sei eine binäre Relation auf I, die transitiv ist und die folgende „Unbeschränktheitsbedingung“ erfüllt: Zu je zwei Elementen α, β aus I gibt es ein Element γ aus I mit $\gamma < \alpha$ und $\gamma < \beta$.

Jedem Element α aus I möge eine nicht leere Menge M_α zugeordnet sein, man sagt dann, daß $(M_\alpha)_{\alpha\in(I,<)}$ eine Moore-Smith-Folge über der gerichteten Menge $(I, <)$ ist.

Für $\beta < \alpha$ $(\alpha, \beta \in I)$ bestehe eine Abbildung π_α^β von M_β in M_α. Dabei gelte noch die Transitivitätsbedingung $\pi_\alpha^\gamma = \pi_\alpha^\beta \pi_\beta^\gamma$ für $\gamma < \beta < \alpha$. Dann heißt die Folge $(M_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha\in(I,<)}$ ein *inverses Spektrum* über der gerichteten Menge $(I, <)$.

(Im folgenden schreiben wir für die gerichtete Menge $(I, <)$ einfach I.)

Die Abbildung $\pi_\alpha^\beta : M_\beta \to M_\alpha$ wird auch Projektion von M_β in M_α genannt. π_α^α soll dabei per definitionem die Identität von M_α bezeichnen.

2. $(M_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha\in I}$ sei ein inverses Spektrum über der gerichteten Menge I. Als *inverser Limes* dieses Spektrums wird die folgende Menge definiert:

$$M := \{(x_\alpha)_{\alpha\in I} \mid x_\alpha \in M_\alpha \text{ mit } \pi_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha \text{ für } \beta < \alpha\},$$

er wird mit $M = \varprojlim (M_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha\in I}$ bezeichnet.

Die Elemente von M heißen die *Fäden* des inversen Spektrums, x_α heißt die α-te Koordinate des Fadens $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$.

Der inverse Limes ist also eine Teilmenge der Produktmenge der Familie $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$.

3. Ist M der inverse Limes eines inversen Spektrums $(M_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha \in I}$, so definiert man eine Projektion von M in M_β wie folgt:

$$\pi_\beta : M \to M_\beta \quad \text{mit} \quad \pi_\beta(x) = x_\beta \quad \text{bei} \quad x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}\,.$$

Versteht man unter p_γ die Projektion der Produktmenge $\Pi\ M_\alpha | \alpha \in I$ auf die Menge M_γ, so ist also π_γ die Einschränkung von p_γ auf die Menge der Fäden des Spektrums.

Es gilt

(1) $\pi_\alpha = \pi_\alpha^\beta \pi_\beta$ *für* $\beta < \alpha$.

4. $(\mathfrak{M}_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha \in I}$ sei ein inverses Spektrum topologischer Räume, d. h. $\mathfrak{M}_\alpha = (M_\alpha, \mathfrak{G}_\alpha)$ sei ein topologischer Raum mit der Grundmenge M_α und der Topologie $\mathfrak{G}_\alpha$ (System offener Mengen) und die Projektionen π_α^β von M_β in M_α für $\beta < \alpha$ seien stetige Abbildungen.

Als inverser Limes dieses Spektrums topologischer Räume wird der folgende Raum $\mathfrak{M} = (M, \mathfrak{G})$ erklärt:

Die Grundmenge M ist der inverse Limes $\underleftarrow{\lim}\,(M_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha \in I}$ und die Topologie $\mathfrak{G}$ ist die Relativtopologie der Produkttopologie des Produktraumes $\Pi\ \mathfrak{M}_\alpha | \alpha \in I$.

Es gilt

(2) *Die Projektionen π_α des Grenzraumes des inversen Spektrums $(\mathfrak{M}_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha \in I}$ auf die Koordinatenräume sind stetig.*

(3) *Das System $\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) | \alpha \in I$ und U_α offene Menge aus $\mathfrak{M}_\alpha\}$ bildet eine offene Basis des Grenzraumes $\mathfrak{M}$ des inversen Spektrums $(\mathfrak{M}_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha \in I}$.*

(4) *$(\mathfrak{M}_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha \in I}$ sei ein inverses Spektrum topologischer Räume, J sei eine konfinale Teilmenge der gerichteten Menge I, d. h. zu jedem $\alpha \in I$ gibt es ein $\beta \in J$ mit $\beta < \alpha$.*

Dann sind die Grenzräume $\underleftarrow{\lim}\,(\mathfrak{M}_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha \in I}$ und $\underleftarrow{\lim}\,(\mathfrak{M}_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha \in J}$ homöomorph!

(5) *Der Grenzraum eines inversen Spektrums $(\mathfrak{M}_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha \in I}$, für das die Koordinatenräume $\mathfrak{M}_\alpha$ endlich sind und die Projektionen π_α^β Aufabbildungen sind, ist ein bikompakter Raum.*

Bemerkung: Für die Beweise vergleiche man [3] und [8]. (5) entnimmt man in dieser von uns benötigten Form aus [3]. Die Zulassung von In-Abbildungen würde keine eigentliche Verallgemeinerung bedeuten.

§ 2. Zerlegungsspektren topologischer Räume

$\mathfrak{M} = (M, \mathfrak{G})$ sei ein topologischer Raum, $\mathfrak{R} = \{R_\alpha | \alpha \in I\}$ sei ein System von Äquivalenzrelationen auf $\mathfrak{M}$, das bezüglich der Verfeinerungsbeziehung gerichtet sei. Dabei heißt eine Äquivalenzrelation R_β auf einer Menge M feiner (oder auch schwächer) als die Äquivalenzrelation R_α auf M $(R_\beta < R_\alpha)$ genau dann, wenn aus der R_β-Äquivalenz von x und y $(x\, R_\beta\, y)$ die R_α-Äquivalenz von x und y $(x\, R_\alpha\, y)$ folgt. Falls R_β feiner als R_α ist, so sei mit π_α^β die kanonische Abbildung des Zerlegungsraumes $\mathfrak{M}/R_\beta$ auf den Zerlegungsraum $\mathfrak{M}/R_\alpha$

bezeichnet, d. h. die Abbildung, die einer R_β-Klasse die sie umfassende R_α-Klasse zuordnet. Wegen der Stetigkeit der π_α^β und deren Transitivität erhält man also das Ergebnis

(1) $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ *ist ein inverses Spektrum topologischer Räume.*

Definition: Das in (1) konstruierte Spektrum soll ein *Zerlegungsspektrum* des Raumes $\mathfrak{M}$ heißen.

Die Elemente des Grenzraumes eines Zerlegungsspektrums $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ nennen wir *$\mathfrak{R}$-Fäden des Raumes $\mathfrak{M}$.*

Die $\mathfrak{R}$-Fäden sind also die Folgen $f = (K_{R_\alpha})_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$, K_{R_α} eine Äquivalenzklasse von M bezüglich R_α mit $K_{R_\beta} \subset K_{R_\alpha}$ für $R_\beta < R_\alpha$! Sei U eine beliebige Menge von M. Dann soll gesagt werden, *der Faden $f = (K_{R_\alpha})_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ geht durch die Menge U hindurch* genau dann, wenn es eine Koordinate K_{R_α} von f gibt mit $K_{R_\alpha} \subset U$.

Für $U \subset M$ wird dann mit U^* die Menge aller durch U hindurchgehenden Fäden bezeichnet.

Sei $x \in M$, es wird *der in x auslaufende $\mathfrak{R}$-Faden f_x* wie folgt definiert:

Für jedes $R_\alpha \in \mathfrak{R}$ liegt x in genau einer Klasse $\bar{x}^{R_\alpha}$, also ist $(\bar{x}^{R_\alpha})_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ ein $\mathfrak{R}$-Faden, dieser Faden soll per definitionem der Faden f_x sein.

(2) $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ *sei ein Zerlegungsspektrum des topologischen Raumes* $\mathfrak{M} = (M, \mathfrak{S})$.

I. Für Teilmengen U und V von M gilt:

$$(U \cap V)^* = U^* \cap V^* .$$

II. Für eine Teilmenge U von M, die bezüglich einer gewissen Äquivalenzrelation R_α, $R_\alpha \in \mathfrak{R}$, gesättigt ist, gilt:

$$(CU)^* = CU^* .$$

III. Für Teilmengen U und V von M, die bezüglich gewisser Äquivalenzrelationen R_α, $R_\alpha \in \mathfrak{R}$, und R_β, $R_\beta \in \mathfrak{R}$, gesättigt sind, gilt:

$$(U \cup V)^* = U^* \cup V^* .$$

IV. Für Teilmengen U und V von M gilt:

$$U \subset V \quad \text{impliziert} \quad U^* \subset V^* .$$

Ist U bezüglich einer gewissen Äquivalenzrelation R_α, $R_\alpha \in \mathfrak{R}$, gesättigt, so gilt auch die Umkehrung, d. h. $U^* \subset V^*$ impliziert $U \subset V$.

Beweis: I. 1. Sei $f \in (U \cap V)^*$, also geht f durch $U \cap V$, dann gibt es eine Klasse K_{R_α} von f mit $K_{R_\alpha} \subset U \cap V$, also geht f auch durch U und durch V, d. h. $f \in U^* \cap V^*$.

2. Sei $f \in U^* \cap V^*$, also geht f durch U und durch V. Es gibt dann Klassen $K_{R_\alpha} \in f$ und $K_{R_\beta} \in f$ mit $K_{R_\alpha} \subset U$ und $K_{R_\beta} \subset V$. Sodann existiert ein R_γ mit $R_\gamma < R_\alpha$ und $R_\gamma < R_\beta$. Für $K_{R_\gamma} \in f$ gilt also $K_{R_\gamma} \subset U$ und $K_{R_\gamma} \subset V$, d. h. f geht durch $U \cap V$.

II. 1. Sei $f \in (CU)^*$, also geht f durch CU, d. h. es gibt eine Klasse $K_{R_\beta} \in f$ mit $K_{R_\beta} \subset CU$. Deshalb kann f nicht durch U gehen, d. h. $f \in CU^*$.

2. Sei umgekehrt $f \in CU^*$, also geht f nicht durch U. Jede Klasse $K_{R\beta}$ aus f hat dann mit CU einen nicht leeren Durchschnitt. Weil CU gesättigt ist, so muß f durch CU gehen, d. h. $f \in (CU)^*$.

III. U war bezüglich einer Relation R_α gesättigt, V war bezüglich einer Relation R_β gesättigt, also gibt es eine Relation R_γ mit $R_\gamma < R_\alpha$ und $R_\gamma < R_\beta$. U und V sind dann bezüglich R_γ gesättigt, also ist auch $U \cup V$ bezüglich R_γ gesättigt. Es ergibt sich folglich nach II. und I. $(U \cup V)^* = C(C(U \cup V)^*)$ $= C\big((C(U \cup V))^*\big) = C(CU \cap CV)^* = C((CU)^* \cap (CV)^*) = U^* \cup V^*$.

IV. Aus $U \subset V$ folgt nach Definition sofort $U^* \subset V^*$. — Sei U bezüglich einer gewissen Relation gesättigt, und es gelte $U^* \subset V^*$. Für $x \in U$ ergibt sich wegen der Sättigung von U $f_x \in U^*$. Folglich ist auch $f_x \in V^*$, d. h. es gibt eine Klasse $K_{R\beta} \in f_x$, die in V liegt. Wegen $x \in K_{R\beta}$ ist dann aber auch $x \in V$.

(3) *U sei eine bezüglich der Relation R_α, $R_\alpha \in \mathfrak{R}$, gesättigte Teilmenge von M. U/R_α bezeichne die Menge der R_α-Klassen von U und π_α bezeichne die Projektion des Grenzraumes des Zerlegungsspektrums $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}/R_\alpha$. Dann gilt:*

$$U^* = \pi_\alpha^{-1}(U/R_\alpha)\,.$$

Beweis: 1. Sei $f \in U^*$, d. h. f geht durch U, also gibt es eine Klasse $K_{R\beta} \in f$ mit $K_{R\beta} \subset U$. Nun existiert ein R_γ, so daß $R_\gamma < R_\alpha$ und $R_\gamma < R_\beta$. Für $K_{R_\gamma} \in f$ gilt dann also $K_{R_\gamma} \subset K_{R\beta} \subset U$. K_{R_γ} liegt wegen $R_\gamma < R_\alpha$ in einer Klasse K_{R_α}, K_{R_α} ist deshalb die α-te Koordinate von f, infolge der Sättigung von U bezüglich R_α ist K_{R_α} ein Punkt von U/R_α. Das bedeutet $f \in \pi_\alpha^{-1}(U/R_\alpha)$.

2. Sei umgekehrt $f \in \pi_\alpha^{-1}(U/R_\alpha)$, also ist die α-te Koordinate K_{R_α} von f ein Punkt von U/R_α, d. h. $K_{R_\alpha} \subset U$. Folglich ist $f \in U^*$.

Daraus ergibt sich:

(4) *Die Mengen U^*, für offene, bezüglich gewisser Relationen R_α, $R_\alpha \in \mathfrak{R}$, gesättigte Mengen U aus $\mathfrak{M}$, bilden eine Basis des Grenzraumes des Zerlegungsspektrums* $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{M}$!

Beweis: Sei $\mathfrak{B} := \{U^* | U$ offene, bezüglich einer gewissen Relation R_α gesättigte Menge aus $\mathfrak{M}\}$.

Das System $\mathfrak{S} := \{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) | U_\alpha$ offene Menge aus $\mathfrak{M}/R_\alpha\}$ ist nach § 1 eine Basis des Grenzraumes des inversen Spektrums $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{M}$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}$ ist.

Sei U_α eine offene Menge aus $\mathfrak{M}/R_\alpha$, dann ist das Urbild von U_α bezüglich der kanonischen Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}/R_\alpha$ eine offene Menge U in $\mathfrak{M}$, dabei ist $U/R_\alpha = U_\alpha$. Nach (3) gilt $U^* = \pi_\alpha^{-1}(U/R_\alpha) = \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, also $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$.

Sei U eine offene, bezüglich einer gewissen Relation R_α, $R_\alpha \in \mathfrak{R}$, gesättigte Menge ans $\mathfrak{M}$. Es gilt $U^* = \pi_\alpha^{-1}(U/R_\alpha)$. U/R_α ist wegen der Sättigung von U bezüglich R_α eine offene Menge in $\mathfrak{M}/R_\alpha$, also $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}$.

Definition: Der Grenzraum eines Zerlegungsspektrums $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ des topologischen Raumes $\mathfrak{M} = (M, \mathfrak{G})$ sei jetzt durch $u\mathfrak{M} = (uM, u\mathfrak{G})$ bezeichnet. Wir definieren eine Abbildung Φ von $\mathfrak{M}$ in $u\mathfrak{M}$ — die *kanonische Abbildung von $\mathfrak{M}$ in $u\mathfrak{M}$* —.

$$\Phi : \mathfrak{M} \to u\mathfrak{M} \quad \text{mit} \quad \Phi(x) = f_x \quad x \in M\,.$$

— Jedem Punkt x von M wird der in x auslaufende $\mathfrak{R}$-Faden f_x zugeordnet. —

Aus dieser Definition folgt:

(5) *Es sei A eine bezüglich einer gewissen Relation R_α, $R_\alpha \in \mathfrak{R}$, gesättigte Menge aus $\mathfrak{M}$. Dann gilt:*

$$\Phi(A) = \Phi(M) \cap A^* .$$

Beweis: $\Phi(A) = \{f_x | x \in A\}$, $A^* = \{f | f$ geht durch $A\}$.

Weil A gesättigt ist, so geht f_x für $x \in A$ durch A. Folglich ist $\Phi(A) \subset A^*$ und deshalb $\Phi(A) \subset \Phi(M) \cap A^*$.

Sei umgekehrt $f \in \Phi(M) \cap A^*$, also gibt es ein $x \in M$, so daß $f = f_x$. f_x soll durch A gehen, infolgedessen ist $x \in A$, also $f = f_x \in \Phi(A)$.

(6) *Für eine abgeschlossene, bezüglich einer gewissen Relation R_α, $R_\alpha \in \mathfrak{R}$, gesättigte Menge F aus $\mathfrak{M}$ ist F^* die abgeschlosssne Hülle von $\Phi(F)$ in $u\mathfrak{M}$.*

Beweis: F sei eine abgeschlossene, bezüglich einer gewissen Relation R_α, $R_\alpha \in \mathfrak{R}$, gesättigte Teilmenge von $\mathfrak{M}$. Dann ist also wegen (3) $F^* = \pi_\alpha^{-1}(F/R_\alpha)$. Weil π_α stetig ist, so ist also F^* abgeschlossen in $u\mathfrak{M}$. Wegen (5) ist $\Phi(F) \subset F^*$, daraus ergibt sich $\overline{\Phi(F)} \subset F^*$.

Wir zeigen noch die umgekehrte Ungleichung. Sei $f \in F^*$, dann ist für $K_{R_\alpha} \in f$ $K_{R_\alpha} \subset F$. Sei U^* nun eine offene Umgebung von f mit U offen in $\mathfrak{M}$ und bezüglich einer gewissen Relation R_β gesättigt. Dann gibt es ein $K_{R_\gamma} \in f$, für das $K_{R_\gamma} \subset U$. Für $R_\delta < R_\alpha$ und $R_\delta < R_\gamma$ hat man deshalb $K_{R_\delta} \subset K_{R_\alpha} \subset F$ und $K_{R_\delta} \subset K_{R_\gamma} \subset U$, also $U \cap F \neq \emptyset$. Sei $x \in U \cap F$, weil U und auch F bezüglich gewisser Relationen gesättigt, so geht f_x durch U und auch durch F, d. h. $f_x \in U^*$ und $f_x \in \Phi(F)$. Folglich ist $U^* \cap \Phi(F) \neq \emptyset$, d. h. $f \in \overline{\Phi(F)}$.

(7) *Φ ist eine stetige Abbildung von $\mathfrak{M}$ in $u\mathfrak{M}$.*

Beweis: Für jede, bezüglich einer gewissen Relation R_α, $R_\alpha \in \mathfrak{R}$, gesättigte Menge A gilt nach (5) $\Phi^{-1}(A^*) = A$. Also ist für die offenen, bezüglich gewisser Relationen $R_\alpha \in \mathfrak{R}$ gesättigten Mengen U aus $\mathfrak{M}$ $\Phi^{-1}(U^*) = U$, d. h. die Urbilder der offenen Mengen der Basis $\{U^* | U$ offen in $\mathfrak{M}$ und bezüglich einer gewissen Relation gesättigt$\}$ sind offen in $\mathfrak{M}$. Das bedeutet die Stetigkeit von Φ!

(8) *$\Phi(\mathfrak{M})$ ist dicht in $u\mathfrak{M}$.*

Beweis: $\{U^* | U$ offen in $\mathfrak{M}$ und bezüglich einer gewissen Relation gesättigt$\}$ ist eine Basis der offenen Mengen in $u\mathfrak{M}$. In jedem U^* liegen nun alle x-Fäden mit $x \in U$, also ist die Menge aller x-Fäden $\Phi(M)$ dicht in $u\mathfrak{M}$.

Um den Grenzraum eines Zerlegungsspektrums $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ näher mit dem Ausgangsraum $\mathfrak{M}$ in Verbindung zu bringen, müssen wir über das System $\mathfrak{R}$ der Äquivalenzrelationen, das das Spektrum definiert, weitere Voraussetzungen machen.

Definition: $\mathfrak{R}$ sei ein bezüglich der Verfeinerungsbeziehung gerichtetes System von Äquivalenzrelationen R_α, $\alpha \in I$, auf dem topologischen Raum $\mathfrak{M} = (M, \mathfrak{S})$. Das System $\mathfrak{R}$ heiße fundamental genau dann, wenn das System aller bzgl. gewisser Relationen R_α, $\alpha \in I$, gesättigten offenen Mengen von $\mathfrak{M}$ eine Basis von $\mathfrak{M}$ bildet und je zwei verschiedene Punkte x und y von M nicht

bzgl. aller R_α, $\alpha \in I$, äquivalent sind. Das von einem fundamentalen System von Äquivalenzrelationen definierte Zerlegungsspektrum $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ nennen wir dann sinngemäß ein *fundamentales Zerlegungsspektrum des Raumes* $\mathfrak{M}$.

Aus dieser Definition erhält man unmittelbar:

(9) $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ *sei ein fundamentales Zerlegungsspektrum des Raumes* $\mathfrak{M}$. *Dann ist die kanonische Abbildung* Φ *von* $\mathfrak{M}$ *in den Grenzraum* $u\mathfrak{M}$ *des Spektrums eineindeutig.*

Weiter folgt:

(10) *Die kanonische Abbildung* Φ *von* $\mathfrak{M}$ *in den Grenzraum* $u\mathfrak{M}$ *eines fundamentalen Zerlegungspektrums ist eine topologische Abbildung von* $\mathfrak{M}$ *auf* $\Phi(\mathfrak{M})$.

Beweis: Die Eineindeutigkeit und Stetigkeit von $\Phi : \mathfrak{M} \to \Phi(\mathfrak{M})$ war schon bemerkt.

Die Offenheit von Φ folgt so:

Die Mengen U aus $\mathfrak{M}$, die offen sind und bezüglich gewisser Relationen gesättigt sind, bilden bei einem fundamentalen System von Äquivalenzrelationen eine Basis von $\mathfrak{M}$. Nach (5) sind die Bilder $\Phi(U)$ dieser U offen in $\Phi(\mathfrak{M})$, infolgedessen muß Φ eine offene Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\Phi(\mathfrak{M})$ sein.

Fassen wir noch einmal das bisher über das Verhältnis von $\mathfrak{M}$ und $u\mathfrak{M}$ Gesagte in dem folgenden Satz zusammen:

Satz 1: $\mathfrak{M}$ *sei ein topologischer Raum,* $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ *sei ein fundamentales Zerlegungsspektrum von* $\mathfrak{M}$. *Dann ist* $\mathfrak{M}$ *vermöge der kanonischen Abbildung* Φ *in den Grenzraum* $u\mathfrak{M}$ *dieses Spektrums dicht eingebettet!*

Wie verhalten sich die Grenzräume $u\mathfrak{M}$ und $u'\mathfrak{M}$ zweier fundamentaler Zerlegungsspektren $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ und $(\mathfrak{M}/R'_\alpha; \pi_{\alpha'}^{\beta'})_{R'_\alpha \in \mathfrak{R}'}$ eines Raumes $\mathfrak{M}$ zueinander?

Zur Beantwortung dieser Frage kommen wir überein, eine Abbildung φ von $u\mathfrak{M}$ in $u'\mathfrak{M}$ *$\mathfrak{M}$-identisch* zu nennen, wenn $\Phi'^{-1} \circ \varphi \circ \Phi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ die Identität von $\mathfrak{M}$ ist, wenn φ also gewissermaßen „die Punkte von $\mathfrak{M}$ fest läßt".

(11) $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{R}'$ *seien zwei fundamentale Systeme von Äquivalenzrelationen auf dem topologischen Raum* $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{R}'$ *sei ein Teil von* $\mathfrak{R}$, *d. h.* $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$. *Dann läßt sich der Grenzraum* $u\mathfrak{M}$ *des Spektrums* $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ *$\mathfrak{M}$-identisch und stetig in den Grenzraum* $u'\mathfrak{M}$ *des Spektrums* $(\mathfrak{M}/R'_\alpha, \pi_{\alpha'}^{\beta'})_{R'_\alpha \in \mathfrak{R}'}$ *abbilden.*

Beweis: Wir projizieren $u\mathfrak{M}$ in $u'\mathfrak{M}$, indem $s : u\mathfrak{M} \to u'\mathfrak{M}$ durch folgende Vorschrift definiert wird: s soll jedem $\mathfrak{R}$-Faden f den $\mathfrak{R}'$-Faden f' mit den gleichen R'_α-Koordinaten, $R'_\alpha \in \mathfrak{R}'$, zuordnen. s ist also die Einschränkung der Projektion p des Produktraumes $\Pi\,\mathfrak{M}/R_\alpha$; $R_\alpha \in \mathfrak{R}$ in den Produktraum $\Pi\,\mathfrak{M}/R'_\alpha$; $R'_\alpha \in \mathfrak{R}'$ auf den Teilraum $u\mathfrak{M}$ von $\Pi\,\mathfrak{M}/R_\alpha$; $R_\alpha \in \mathfrak{R}$. Folglich ist s eine stetige Abbildung. Sie ist auch $\mathfrak{M}$-identisch, weil ein $\mathfrak{R}$-x-Faden von $\mathfrak{M}$ durch s in einen $\mathfrak{R}'$-x-Faden von $\mathfrak{M}$ übergeführt wird und jeder $\mathfrak{R}'$-x-Faden auch als Bild auftritt.

Die mit dem Satz 1 aufgedeckte Beziehung von $\mathfrak{M}$ und $u\mathfrak{M}$ wird noch viel inniger, wenn man eine weitere Forderung an das $u\mathfrak{M}$ definierende fundamentale Zerlegungsspektrum $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ stellt, und zwar die, daß jede offene

Menge U von $\mathfrak{M}$ bezüglich einer gewissen Relation $R_\alpha \in \mathfrak{R}$ gesättigt ist. Derartige fundamentale Zerlegungsspektren wollen wir als *vollständige fundamentale Zerlegungsspektren* bezeichnen.

Weiter soll verabredet werden: Eine Abbildung $\psi: u\mathfrak{M} \to \mathfrak{X}$ von $u\mathfrak{M}$ in den Raum $\mathfrak{X}$ heißt eine *Fortsetzung* der Abbildung $\varphi: \mathfrak{M} \to \mathfrak{X}$ genau dann, wenn $\psi \circ \Phi|\mathfrak{M} = \varphi$. Entsprechend soll unter der abgeschlossenen Hülle $\overline{F}$ in $u\mathfrak{M}$ einer Menge F aus $\mathfrak{M}$ die Hülle $\overline{\Phi(F)}$ von $\Phi(F)$ verstanden werden.

Mit vorstehender Verabredung erhalten wir

(12) $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ *sei ein vollständiges fundamentales Zerlegungsspektrum des Raumes* $\mathfrak{M}$. *Dann läßt sich jede stetige Abbildung* φ *von* $\mathfrak{M}$ *in einen bikompakten Hausdorffschen Raum* $\mathfrak{H}$ *stetig fortsetzen auf den Grenzraum* $u\mathfrak{M}$ *des Spektrums.*

Beweis: Es sei $f \in u\mathfrak{M}$, also ist f ein Faden von $\mathfrak{M}$. $f = (K_{R_\alpha})_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$. $(\overline{\varphi(K_{R_\alpha})})_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ ist dann eine fallende Moore-Smith-Folge nicht leerer abgeschlossener Mengen in dem Bikompaktum $\mathfrak{H}$, also ist die Menge

$$D := \bigcap \overline{\varphi(K_{R_\alpha})}|K_{R_\alpha} \in f$$

nicht leer.

Nehmen wir an, daß es zwei verschiedene Punkte ξ und η aus D gibt. Dann lassen sich ξ und η durch offene disjunkte Umgebungen P und Q trennen. $U := \varphi^{-1}(P)$ und $V := \varphi^{-1}(Q)$ sind dann wegen der Stetigkeit von φ offene Mengen in $\mathfrak{M}$, diese sind auch disjunkt. Weiter ist nach Wahl von ξ und η für jedes $K_{R_\alpha} \in f$ $P \cap \varphi(K_{R_\alpha}) \neq \theta$ und $Q \cap \varphi(K_{R_\alpha}) \neq \theta$. Daraus folgt $U \cap K_{R_\alpha} \neq \theta$ und $V \cap K_{R_\alpha} \neq \theta$ für jedes $K_{R_\alpha} \in f$. Die offenen Mengen U und V sind wegen der Vollständigkeit des fundamentalen Spektrums bezüglich gewisser Relationen gesättigt, demzufolge muß f durch U und durch V gehen. Das steht im Widerspruch zu $U \cap V = \theta$.

$D = \bigcap \overline{\varphi(K_{R_\alpha})}|K_{R_\alpha} \in f$ ist also genau einpunktig.

Wir definieren nun die Abbildung $\psi: u\mathfrak{M} \to \mathfrak{H}$ wie folgt.

$$\psi(f) = \xi \quad \text{mit} \quad \{\xi\} = \bigcap \overline{\varphi(K_{R_\alpha})}|K_{R_\alpha} \in f\,.$$

Dann gilt:

1. ψ ist Fortsetzung von φ.

Denn für $f = f_x$ ist x in jeder Klasse $K_{R_\alpha} \in f_x$, also $\varphi(x)$ in jedem $\varphi(K_{R_\alpha})$. Deshalb ist dann $\varphi(x) = \psi(\Phi(x)) = \psi(f_x)$.

2. ψ ist auch stetig auf $u\mathfrak{M}$.

Sei P eine offene Umgebung von $\xi = \psi(f)$. Wegen der Regularität von $\mathfrak{H}$ gibt es dann eine offene Umgebung Q von ξ, so daß $\overline{Q} \subset P$. Für eine gewisse Koordinate K_{R_α} von f ist jetzt $\overline{\varphi(K_{R_\alpha})} \subset Q$, weil sonst die fallende Folge $(\overline{\varphi(K_{R_\alpha})} \cap CQ)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ nicht leerer abgeschlossener Mengen in dem Bikompaktum $\mathfrak{H}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat. Das würde aber im Widerspruch zu $\bigcap \overline{\varphi(K_{R_\alpha})}|K_{R_\alpha} \in f \subset Q$ stehen.

Für das gefundene $K_{R_\alpha} \in f$ gilt dann $\varphi(K_{R_\alpha}) \subset Q$. Daraus folgt

$$K_{R_\alpha} \subset \varphi^{-1}(\varphi(K_{R_\alpha})) \subset \varphi^{-1}(Q)\,,$$

also geht f durch $\varphi^{-1}(Q)$, d. h. $(\varphi^{-1}(Q))^*$ ist eine offene Umgebung von f. Wir zeigen, daß $\psi(\varphi^{-1}(Q)^*) \subset P$ gilt.

Sei $f' \in (\varphi^{-1}(Q))^*$, also geht f' durch $\varphi^{-1}(Q)$, d. h. es gibt ein $K'_{R_\beta} \in f'$ mit $K'_{R_\beta} \subset \varphi^{-1}(Q)$. Demnach ist $\varphi(K'_{R_\beta}) \subset \varphi(\varphi^{-1}(Q)) \subset Q$, also $\overline{\varphi(K'_{R_\beta})} \subset \overline{Q} \subset P$. Deshalb ist für $\{\eta\} = \bigcap \overline{\varphi(K'_{R_\alpha})} | K'_{R_\alpha} \in f'$ η ein Element von P, d. h. $\psi(f') \in P$.

Wir fassen zusammen:

Satz 2: *$\mathfrak{M}$ sei ein topologischer Raum, $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ ein vollständiges fundamentales Zerlegungsspektrum dieses Raumes mit dem Grenzraum $u\mathfrak{M}$. Dann gilt:*

I. $u\mathfrak{M}$ ist eine Erweiterung von $\mathfrak{M}$.

II. Die Hüllen der abgeschlossenen Mengen F aus $\mathfrak{M}$ bilden eine abgeschlossene Basis von $u\mathfrak{M}$.

III. Für je endlich viele abgeschlossene Mengen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ aus $\mathfrak{M}$ gilt $\overline{F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n} = \overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap \cdots \cap \overline{F}_n$ in $u\mathfrak{M}$.

IV. Jede stetige Abbildung von $\mathfrak{M}$ in einen bikompakten Hausdorffschen Raum läßt sich stetig fortsetzen auf $u\mathfrak{M}$.

Beweis: I. und IV. sind schon gezeigt. II. folgt so:
Wegen der Vollständigkeit von $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ ist nach (2) II. und (4) das System $\{F^* | F$ abgeschlossene Menge aus $\mathfrak{M}\}$ eine Basis der abgeschlossenen Mengen von $u\mathfrak{M}$. Das Weitere gilt dann wegen (6). III. folgt wegen (6) und (2) I.

Bemerkung: Zur gegenseitigen Abhängigkeit der Aussagen I., II., III. und IV. des Satzes 2 bemerken wir folgendes.

Ist $\mathfrak{M}$ ein Teilraum des Raumes $\tilde{\mathfrak{M}}$, so impliziert die Aussage (II.) — Die Hüllen der abgeschlossenen Mengen aus $\mathfrak{M}$ bilden eine Basis der abgeschlossenen Mengen von $\tilde{\mathfrak{M}}$ —, daß $\mathfrak{M}$ dicht in $\tilde{\mathfrak{M}}$ ist, d. h. die Aussage (I.) — $\tilde{\mathfrak{M}}$ ist eine Erweiterung von $\mathfrak{M}$.

Die Umkehrung braucht nicht allgemein richtig zu sein. Jedoch für einen regulären Raum $\mathfrak{M}$ gilt auch sie.

Hat der Erweiterungsraum $\tilde{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{M}$ die Eigenschaft (III.), so auch die Eigenschaft (IV.).

A. D. Taimanov hat nämlich in einer Arbeit: „Über Fortsetzung stetiger Abbildungen topologischer Räume", Matem. Sbornik **31**, 459—463 (1952) (russ.), folgenden Satz bewiesen.

Theorem 1: S sei ein topologischer T_1-Raum, A eine dichte Teilmenge von S. Für die stetige Fortsetzbarkeit einer beliebigen stetigen Abbildung f von A in ein Bikompaktum R ist notwendig und hinreichend, daß für je zwei abgeschlossene disjunkte Mengen A_1 und A_2 aus R gilt $\overline{f^{-1}(A_1)} \cap \overline{f^{-1}(A_2)} = \theta$.

Eine Analyse des Beweises zeigt nun aber, daß die Voraussetzung des T_1 Trennungsaxioms entbehrt werden kann. Folglich ergibt sich nach diesem Satz die Fortsetzbarkeit einer beliebigen stetigen Abbildung f von $\mathfrak{M}$ in ein Bikompaktum $\mathfrak{H}$ auf die Erweiterung $\tilde{\mathfrak{M}}$, weil ja für je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen A_1 und A_2 aus $\mathfrak{H}$ auch $f^{-1}(A_1)$ und $f^{-1}(A_2)$ abgeschlossen und disjunkt sind, nach III. dann also $\theta = \overline{f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2)} = \overline{f^{-1}(A_1)} \cap \overline{f^{-1}(A_2)}$ gilt.

§ 3. Finite Zerlegungsspektren

Wir konstruieren jetzt zu einem topologischen Raum gewisse mit dem Raum topologisch invariant verbundene Spektren.

$\mathfrak{R} = \{R_\alpha | \alpha \in I\}$ bezeichne das System der Äquivalenzrelationen des topologischen Raumes $\mathfrak{M} = (M, \mathfrak{S})$, die M in endlich viele Mengen zerlegen. Dann ist dieses System bezüglich der Verfeinerungsbeziehung gerichtet, nämlich das Infimum $R_\alpha \wedge R_\beta$ zweier Relationen R_α und R_β aus $\mathfrak{R}$ ist eine gemeinsame Verfeinerung aus $\mathfrak{R}$.

Außerdem sind zwei Punkte x und y aus $\mathfrak{M}$ nicht bezüglich aller $R_\alpha \in \mathfrak{R}$ äquivalent, nämlich bezüglich der Zerlegungen $\{\{x\}, M - \{x\}\}$ und $\{\{y\}, M - \{y\}\}$ ist das nicht der Fall. Zum anderen ist auch jede offene Menge U von $\mathfrak{M}$ bezüglich einer Relation aus $\mathfrak{R}$ gesättigt, z. B. bezüglich der Zerlegung $\{U, M - U\}$. Folglich ist man berechtigt zu der

Definition: $\mathfrak{R}$ sei das System der Äquivalenzrelationen eines topologischen Raumes $\mathfrak{M} = (M, \mathfrak{S})$, die endliche Zerlegungen von $\mathfrak{M}$ erzeugen. Dann soll das vollständige fundamentale Zerlegungsspektrum $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha \in \mathfrak{R}}$ das *finite Zerlegungsspektrum von* $\mathfrak{M}$ heißen. Es ist offenbar topologisch invariant mit dem Raum verbunden.

Von dem finiten Zerlegungsspektrum werden wir nun einen besonders wichtigen Teil aussondern.

Hierzu stellen wir erst folgende Betrachtungen an.

Definition: $\mathfrak{A}$ sei ein System von Teilmengen der nicht leeren Menge M. Dann werde *die von diesem System auf M erzeugte Äquivalenzrelation* R wie folgt definiert:

$x, y \in M$ bezüglich R äquivalent genau dann, wenn sich x und y bezüglich des Systems $\mathfrak{A}$ nicht trennen lassen, das soll heißen, daß es kein $A \in \mathfrak{A}$ gibt, welches nur eins der Elemente x, y enthält und das andere nicht.

R ist offenbar eine Äquivalenzrelation auf M.

(1) *Die x enthaltende Äquivalenzklasse $\hat{x}$ bezüglich R stellt sich dann als Durchschnitt aller x enthaltenden Elemente $A \in \mathfrak{A}$ und der x enthaltenden Komplemente CA von $A \in \mathfrak{A}$ dar.*

$$\hat{x} = \bigcap B | B \in \mathfrak{A} \cup C\mathfrak{A} \quad \text{und} \quad x \in B .$$

Beweis: Sei $y \in \hat{x}$ und $B \in \mathfrak{A} \cup C\mathfrak{A}$ mit $x \in B$. Aus $y \notin B$ folgt dann $y \in CB$, jedenfalls sind dann x und y durch das Element $A = B$ für den Fall $B \in \mathfrak{A}$ und $A = CB$ für den Fall $B \in C\mathfrak{A}$ getrennt. Das stände im Widerspruch zu der vorausgesetzten R-Äquivalenz von x und y. Also muß $\hat{x} \subset \bigcap B | B \in \mathfrak{A} \cup C\mathfrak{A}$ bei $x \in B$ sein.

Ganz ähnlich beweist man die umgekehrte Ungleichung.

(2) *Die Mengen $A \in \mathfrak{A}$ und deren Komplemente CA des erzeugenden Systems $\mathfrak{A}$ sind bezüglich der Relation R gesättigt.*

Beweis: Sei $A \in \mathfrak{A}$ und $x \in A$. Also gilt $\hat{x} \cap A \neq \theta$. Wir zeigen die Sättigung von A, indem wir nachweisen, daß $\hat{x} \subset A$ gilt. Wäre nämlich auch $\hat{x} \cap CA \neq \theta$, so würde es ein $y \in \hat{x}$ geben, das von x durch A getrennt ist. Das stände im

Widerspruch zur R-Äquivalenz von x und y. Also ist $\hat{x} \subset A$. Die Komplemente gesättigter Mengen sind auch gesättigt.

Es sei jetzt $\mathfrak{M} = (M, \mathfrak{G})$ ein topologischer Raum. Die von dem System $\mathfrak{G}$ der offenen Mengen erzeugte Äquivalenzrelation wird dann gerade die schwächste Äquivalenzrelation auf M, bezüglich der der Quotientenraum $\mathfrak{M}/R$ ein T_0-Raum ist[1]). $\mathfrak{M}/R$ ist der sogenannte „assoziierte T_0-Raum" von $\mathfrak{M}$.

In Verallgemeinerung dessen gehen wir von einem beliebigen System $\mathfrak{R}$ offener Mengen des Raumes $\mathfrak{M}$ aus.

(3) *Der Quotientenraum $\mathfrak{M}/R$ eines topologischen Raumes $\mathfrak{M}$ nach der von einem System $\mathfrak{R}$ offener Mengen erzeugten Äquivalenzrelation R ist ein T_0-Raum.*

Beweis: Seien x und y nicht äquivalent. Man muß zeigen, daß es eine gesättigte offene Menge gibt, die die Punkte x und y trennt. Da x und y nicht äquivalent sind bezüglich der von $\mathfrak{R}$ erzeugten Äquivalenzrelation, so gibt es eine offene Menge $G \in \mathfrak{R}$, die x und y trennt. Nach (2) ist G sogar gesättigt.

$\mathfrak{U}$ bezeichne nun ein beliebiges System von offenen Überdeckungen des topologischen Raumes $\mathfrak{M} = (M, \mathfrak{G})$. Jede Überdeckung $\alpha \in \mathfrak{U}$ erzeugt dann eine Äquivalenzrelation R_α. Die Menge dieser Äquivalenzrelationen $\mathfrak{R} = \{R_\alpha | \alpha \in \mathfrak{U}\}$ ist gerichtet, wenn etwa $\mathfrak{U}$ multiplikativ ist, d. h. wenn für $\alpha \in \mathfrak{U}$ und $\beta \in \mathfrak{U}$ auch $\alpha \wedge \beta \in \mathfrak{U}$ — dabei ist $\alpha \wedge \beta = \{A \cap B | A \in \alpha \text{ und } B \in \beta\}$ — oder wenn $\mathfrak{U}$ additiv ist, d. h. wenn für $\alpha \in \mathfrak{U}$ und $\beta \in \mathfrak{U}$ auch $\alpha \vee \beta \in \mathfrak{U}$ — dabei ist $\alpha \vee \beta = \{C | C \in \alpha \text{ oder } C \in \beta\}$.

Die beiden Behauptungen ergeben sich so:

Die Verfeinerungsbeziehung „$<$" ist auf $\mathfrak{R}$ eine teilweise Ordnung, diese erfüllt auch die „Unbeschränktheitsbedingung". Denn seien R_α und R_β zwei von $\alpha \in \mathfrak{U}$ und $\beta \in \mathfrak{U}$ erzeugte Äquivalenzrelationen. Wegen der Multiplikativität von $\mathfrak{U}$ ist $\alpha \wedge \beta \in \mathfrak{U}$. Für $R_{\alpha\wedge\beta}$ erweisen wir sodann $R_{\alpha\wedge\beta} < R_\alpha$ und $R_{\alpha\wedge\beta} < R_\beta$. Sei nämlich $x R_{\alpha\wedge\beta} y$, würden sich jetzt x und y bezüglich α trennen lassen, so gibt es ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine Menge $A \in \alpha$ mit $x \in A$ und $y \notin A$. Wegen der Überdeckungseigenschaft von β gibt es ein $B \in \beta$ mit $x \in B$. Nun ist $x \in A \cap B$, also wegen der $R_{\alpha\wedge\beta}$-Äquivalenz von x und y ist auch $y \in A \cap B$. Deshalb muß doch $x R_\alpha y$. Ebenso beweist man $x R_\beta y$.

Ist $\mathfrak{U}$ additiv, so gilt $\alpha \vee \beta \in \mathfrak{U}$ bei $\alpha \in \mathfrak{U}$ und $\beta \in \mathfrak{U}$. Für $R_{\alpha\vee\beta}$ erweisen wir sodann $R_{\alpha\vee\beta} < R_\alpha$ und $R_{\alpha\vee\beta} < R_\alpha$. Das folgt aber sofort wegen $\alpha \subset \alpha \vee \beta$ und $\beta \subset \alpha \vee \beta$.

Wenn das Überdeckungssystem $\mathfrak{U}$ so beschaffen ist, daß die zugehörige Familie $\mathfrak{R} = \{R_\alpha | \alpha \in \mathfrak{U}\}$ der erzeugten Äquivalenzrelationen gerichtet ist, dann bildet also $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha \in \mathfrak{U}}$ ein Zerlegungsspektrum von $\mathfrak{M}$.

---

[1]) Ein topologischer Raum $\mathfrak{M} = (M, \mathfrak{G})$ heißt ein T_0-Raum genau dann, wenn er dem Trennungsaxiom von KOLMOGOROFF genügt, d. h. wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten x, y von M eine offene Menge gibt, die nur einen der Punkte x und y enthält und den anderen nicht.

Nunmehr betrachten wir das spezielle System $\mathfrak{E}$ der endlichen offenen Überdeckungen des Raumes $\mathfrak{M}$. Die Menge $\mathfrak{R}$ der von den Überdeckungen $\alpha \in \mathfrak{E}$ erzeugten Äquivalenzrelationen ist nach den obigen Ausführungen bezüglich der Verfeinerungsbeziehung gerichtet, denn das System $\mathfrak{E}$ ist multiplikativ und additiv. Außerdem ist jede offene Menge U von $\mathfrak{M}$ auch bezüglich einer Relation aus $\mathfrak{R}$ gesättigt. Zwei Punkte x und y aus $\mathfrak{M}$ können aber bezüglich aller $R_\alpha \in \mathfrak{R}$ äquivalent sein. Dieser Übelstand wird ausgeschaltet, wenn man sich auf T_0-Räume $\mathfrak{M}$ beschränkt. Diese Einschränkung ist aber sonst nicht einschneidend.

Für einen T_0-Raum $\mathfrak{M}$ ist also $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha \in \mathfrak{E}}$ ein vollständiges fundamentales Zerlegungsspektrum.

Definition: $\mathfrak{E}$ sei das System der endlichen offenen Überdeckungen des topologischen T_0-Raumes $\mathfrak{M}$. Das vollständige fundamentale Zerlegungsspektrum $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha \in \mathfrak{E}}$ nach den von den endlichen offenen Überdeckungen $\alpha \in \mathfrak{E}$ erzeugten Äquivalenzrelationen R_α heißt dann *das offene finite Zerlegungsspektrum von* $\mathfrak{M}$.

Es ist offenbar topologisch invariant mit dem Raum verbunden.

Für jedes $\alpha \in \mathfrak{E}$ ist der Quotientenraum $\mathfrak{M}/R_\alpha$ endlich, wie sogleich aus (1) zu folgern ist. Mit der Erkenntnis (5) aus § 1 erhält man deshalb nach Satz 2 den

Satz 3: *$\mathfrak{M}$ sei ein topologischer T_0-Raum, $\gamma\mathfrak{M}$ sei der Grenzraum des zu $\mathfrak{M}$ gehörigen offenen finiten Zerlegungsspektrums. Dann gilt:*

I. $\gamma\mathfrak{M}$ ist eine bikompakte T_0-Erweiterung von $\mathfrak{M}$.

II. Die Hüllen der abgeschlossenen Mengen F aus $\mathfrak{M}$ bilden eine abgeschlossene Basis von $\gamma\mathfrak{M}$.

III. Für je endlich viele abgeschlossene Mengen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ aus $\mathfrak{M}$ gilt $\overline{F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n} = \overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap \cdots \cap \overline{F}_n$ in $\gamma\mathfrak{M}$.

IV. Jede stetige Abbildung von $\mathfrak{M}$ in einen bikompakten Hausdorffschen Raum läßt sich stetig fortsetzen auf $\gamma\mathfrak{M}$.

Beweis: Es verbleibt nur noch der Beweis der T_0-Eigenschaft von $\gamma\mathfrak{M}$. Der Grenzraum $\gamma\mathfrak{M}$ ist ein Teilraum des Produktraumes der Familie $(\mathfrak{M}/R_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{E}}$. Jeder Raum $\mathfrak{M}/R_\alpha$ ist dabei aber nach (3) ein T_0-Raum, also ist deren Produkt ein T_0-Raum.

Bemerkung: Entsprechend zu Satz 3 läßt sich zu einem beliebigen topologischen Raum $\mathfrak{M}$ mittels des finiten Spektrums eine bikompakte Erweiterung konstruieren, jedoch wird diese Erweiterung nicht unbedingt das T_0 Trennungsaxiom erfüllen. Bei der sinnvollen Beschränkung auf T_0-Räume wird man deshalb nur das offene finite Zerlegungsspektrum in Betracht ziehen.

Dies um so mehr, als man doch nachstehenden Zusammenhang zwischen dem finiten und offenen finiten Zerlegungsspektrum eines T_0-Raumes feststellt.

Ist $\mathfrak{M}/R$ ein beliebiger Zerlegungsraum eines beliebigen Raumes $\mathfrak{M}$ und $\{U_\alpha\}$ die inverse Topologie der Topologie von $\mathfrak{M}/R$ in $\mathfrak{M}$, d. h. das System der

kanonischen Urbilder der offenen Mengen von $\mathfrak{M}/R$ in $\mathfrak{M}$, so ist der zu $\mathfrak{M}/R$ gehörige assoziierte T_0-Raum homöomorph dem von dem offenen Überdeckungssystem $\{U_\alpha\}$ erzeugten Zerlegungsraum. Geht man also etwa in dem finiten Zerlegungsspektrum eines T_0-Raumes von jedem Koordinatenraum zu dem zugehörigen assoziierten T_0-Raum über, so erhält man das offene finite Spektrum.

§ 4. Spektrale Konstruktion der Wallmanschen Erweiterung

Es erhebt sich hier naturgemäß die Frage, welcher Zusammenhang zwischen dem Grenzraum des offenen finiten Zerlegungsspektrums bei einem T_1-Raum mit der Wallmanschen Erweiterung besteht.

Die Antwort wird durch die folgenden Ausführungen gegeben. Damit ist dann zugleich eine neue Konstruktion der Wallmanschen Erweiterung gefunden.

Zur ersten Orientierung betrachten wir zunächst ein

Beispiel: Die Menge der natürlichen Zahlen $N := \{1, 2, 3, \ldots\}$ sei mit der stärksten T_1-Topologie ausgestattet, d. h. eine nicht leere Menge soll offen sein genau dann, wenn ihr Komplement eine endliche Menge ist.

Wir definieren Äquivalenzrelationen R_n durch nachstehende Zerlegungen von N:

$$\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n-1\}, \{n, n+1, \ldots\}.$$

R_n wird dann durch eine endliche offene Überdeckung erzeugt, nämlich durch $\alpha = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ mit $U_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ $U_2 = \{2, 3, 4, \ldots\}$ $U_3 = \{3, 4, \ldots\}$ $U_n = \{n, n+1, \ldots\}$.

Wir behaupten, daß die Menge $\{R_n | n \in N\}$ eine konfinale Teilmenge der Menge aller von endlichen offenen Überdeckungen erzeugten Äquivalenzrelationen ist.

Sei R eine beliebige von der offenen endlichen Überdeckung α erzeugte Äquivalenzrelation. Wir können gleich von dem Fall $\alpha \neq \{N\}$ ausgehen, weil sonst $R = R_1$. Die Komplemente der Elemente von α sind endliche Mengen, außerdem sind es nur endlich viele. Es gibt deshalb eine größte natürliche Zahl n, die in den Komplementen vorkommt.

Die Relation R_{n+1} ist dann feiner als R. Denn für $m \leqq n$ ist die R_{n+1}-Klasse von m gleich $\{m\}$, also ist sie gewiß in der R-Klasse von m enthalten. Ebenso ist für $m \geqq n+1$ die R_{n+1}-Klasse von m in der R-Klasse von m enthalten.

Der Grenzraum des finiten offenen Spektrums von N ist nach § 1 (4) dann dem Grenzraum des Spektrums $(N/R_n, \pi_n^m)_{n\in N}$ homöomorph. Die Elemente des Grenzraumes von $(N/R_n, \pi_n^m)_{n\in N}$ sind die x-Fäden

$$f_x = (N, N - \{1\}, N - \{1, 2\}, N - \{1, 2, 3\}, \ldots, N - \{1, 2, 3, \ldots, x-1\}, \{x\}, \ldots)$$

und der Faden

$$f = (N, N - \{1\}, \ldots, N - \{1, 2, \ldots, n\}, N - \{1, 2, \ldots, n+1\}, \ldots).$$

Außerdem ist eine nicht leere Menge des Grenzraumes offen genau dann, wenn sie folgendes Aussehen hat

$$\{f_x | x \in N - E, E \text{ endliche Teilmenge von } N\} \cup \{f\}\,.$$

Der Grenzraum des offenen finiten Zerlegungsspektrums ist demnach die stärkste einpunktige Erweiterung von N, dieser Raum ist also kein T_1-Raum. Die Wallmansche Erweiterung von N stimmt wegen der Bikompaktheit von N mit N überein (vgl. [7]).

Die Wallmansche Erweiterung des Raumes aus dem vorstehenden Beispiel ist ein Teilraum des Grenzraumes des offenen finiten Zerlegungsspektrums. Das wird sich auch ganz allgemein ergeben.

(1) *$\mathfrak{M}$ sei ein T_0-Raum, $\gamma\mathfrak{M}$ sei der Grenzraum seines offenen finiten Zerlegungsspektrums. Dann gilt:*

Der Durchschnitt der Hüllen $\overline{F}$ der Elemente eines maximal zentrierten Systems abgeschlossener Mengen F aus $\mathfrak{M}$ ist in $\gamma\mathfrak{M}$ einpunktig.

Beweis: Sei $\mathfrak{F}$ ein maximal zentriertes System abgeschlossener Mengen F aus $\mathfrak{M}$. Dann ist $D := \bigcap \overline{F} | F \in \mathfrak{F}$ wegen der Bikompaktheit von $\gamma\mathfrak{M}$ nicht leer. Angenommen, es gibt eine nicht leere abgeschlossene echte Teilmenge H von D. Nach Satz 3 II. stellt sich H als Durchschnitt der Hüllen $\overline{K}$ der Elemente eines Systems $\mathfrak{K}$ abgeschlossener Mengen aus $\mathfrak{M}$ dar. Für $K \in \mathfrak{K}$ gilt $K \cap F \neq \theta$ für jedes $F \in \mathfrak{F}$, weil sonst mit III. von Satz 3 $\theta = \overline{K} \cap \overline{F} \supset H \cap D$ folgen würde. Wegen der maximalen Zentriertheit von $\mathfrak{F}$ muß deshalb $K \in \mathfrak{F}$. Dann folgt aber $H \supset D$, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß H eine echte Teilmenge von D sein sollte.

Für $x \in D$ erhält man somit $\overline{\{x\}} = D$. Gäbe es noch einen anderen Punkt $y \in D$, so würde auch $\overline{\{y\}} = D$ gelten müssen. Infolge der T_0-Eigenschaft von $\gamma\mathfrak{M}$ haben aber zwei verschiedene Punkte niemals die gleichen abgeschlossenen Hüllen.

(2) *T sei die Teilmenge aller abgeschlossenen Punkte von $\gamma\mathfrak{M}$, dabei soll ein Punkt abgeschlossen heißen, wenn die aus dem Punkt bestehende Menge abgeschlossen ist.*

Dann ist T bikompakt.

Beweis: Wir können gleich $T \neq \theta$ voraussetzen. Sei $\mathfrak{Z} = \{Z\}$ ein zentriertes System abgeschlossener Mengen aus T. Dann ist also $Z = \overline{Z} \cap T$. $\{\overline{Z} | Z \in \mathfrak{Z}\}$ ist nun ein zentriertes System abgeschlossener Mengen in $\gamma\mathfrak{M}$, infolge der Bikompaktheit von $\gamma\mathfrak{M}$ hat man $\bigcap \overline{Z} | Z \in \mathfrak{Z} \neq \theta$. Nun ist $\bigcap Z | Z \in \mathfrak{Z} = \bigcap \overline{Z} \cap T | Z \in \mathfrak{Z} = T \cap \bigcap \overline{Z} | Z \in \mathfrak{Z}$. Wäre $\bigcap Z | Z \in \mathfrak{Z} = \theta$, so wäre also $\bigcap \overline{Z} | Z \in \mathfrak{Z}$ eine abgeschlossene nicht leere Teilmenge von $\gamma M - T$. Nach II. von Satz 3 gibt es ein System $\mathfrak{K}$ abgeschlossener Mengen aus $\mathfrak{M}$ mit $\bigcap \overline{Z} | Z \in \mathfrak{Z} = \bigcap \overline{K} | K \in \mathfrak{K}$. Das zentrierte System $\mathfrak{K}$ läßt sich in $\mathfrak{M}$ zu einem maximalen zentrierten System $\mathfrak{F}$ von abgeschlossenen Mengen verfeinern.

Für dieses gilt nach (1) $\overline{\{x\}} = \bigcap \overline{F} | F \in \mathfrak{F}$. Also liegt ein abgeschlossener Punkt x in $\gamma M - T$, weil ja $\bigcap \overline{F} | F \in \mathfrak{F} \subset \bigcap \overline{K} | K \in \mathfrak{K}$. Das steht im Wider-

spruch zur Definition von T. Also muß $\bigcap Z | Z \in \mathfrak{Z} \neq \theta$, das bedeutet die Bikompaktheit von T.

Daraus ergibt sich dann

Satz 4: *$\mathfrak{M}$ sei ein topologischer T_1-Raum, $\gamma\mathfrak{M}$ sei der Grenzraum seines offenen finiten Zerlegungsspektrums. Dann ist der Teilraum $\omega\mathfrak{M}$ von $\gamma\mathfrak{M}$, der aus allen abgeschlossenen Punkten besteht, die Wallmansche Erweiterung von $\mathfrak{M}$.*

Beweis: Für einen T_1-Raum $\mathfrak{M}$ ist jeder x-Faden f_x ein abgeschlossener Punkt von $\gamma\mathfrak{M}$, denn $\{x\}$ ist als abgeschlossene Menge von $\mathfrak{M}$ gesättigt, folglich ist nach (6) von § 2 f_x abgeschlossen. Demgemäß ist $\Phi(\mathfrak{M}) \subset \omega\mathfrak{M} \subset \gamma\mathfrak{M}$. Mit $\omega\mathfrak{M}$ ist daher ein bikompakter T_1-Oberraum zu $\Phi(\mathfrak{M})$ gefunden, außerdem ist $\Phi(\mathfrak{M})$ offensichtlich dicht in $\omega\mathfrak{M}$ und $\omega\mathfrak{M}$ hat überdies die für $\gamma\mathfrak{M}$ in Satz 3 II., III. und IV. ausgesprochenen Eigenschaften.

Die Wallmansche Bikompaktifizierung eines T_1-Raumes ist nun aber als eine bikompakte T_1-Erweiterung mit den entsprechenden Eigenschaften II., III. von Satz 3 vollständig charakterisiert (vgl. [7]). Demzufolge ist $\omega\mathfrak{M}$ die Wallmansche Erweiterung von $\mathfrak{M}$.

An dieser Stelle wollen wir den mit Satz 4 ausgesprochenen Sachverhalt in eine andere Form bringen. Das gibt uns dann auch unmittelbar die Möglichkeit, jeden bikompakten T_1-Raum auf spektralem Wege zu erzeugen. Es wird sich gewissermaßen zeigen, daß man jeden bikompakten T_1-Raum mittels eines Limesprozesses aus denkbar einfachen Gebilden, nämlich endlichen T_0-Räumen, konstruieren kann.

Das gewonnene Ergebnis (Satz 6) stellt eine Verallgemeinerung eines Resultates von ALEXANDROFF-KUROSCH dar [3], [6]. Von ALEXANDROFF ist in [3] der spektrale Aufbau bikompakter Hausdorffscher Räume mittels endlicher T_0-Räume ausgeführt worden. A. KUROSCH hatte in [6] als approximierende Objekte endliche simpliziale Komplexe, also — wie ALEXANDROFF in [2] bemerkt hat — spezielle endliche T_0-Räume, verwendet.

Die Beschränkung auf Hausdorffsche Räume kann also fallen gelassen werden[2]).

Vorbereitend führen wir jetzt einen wichtigen Begriff aus [3] an. $(\mathfrak{M}_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha\in I}$ sei ein inverses Spektrum aus T_0-Räumen $\mathfrak{M}_\alpha$. Ein Faden f dieses Spektrums heißt minimaler als der Faden f' (in Zeichen $f \leqq f'$) genau dann, wenn für alle Koordinaten x_α aus f und x'_α aus f' $x_\alpha \leqq x'_\alpha$ in $\mathfrak{M}_\alpha$ gilt. Dabei bedeutet die Relation „$\leqq$" in $x \leqq x'$ die durch die T_0-Topologie von $\mathfrak{M}_\alpha$ bestimmte teilweise Ordnung, d. h. es ist $x_\alpha \leqq x'_\alpha$ in $\mathfrak{M}_\alpha$ genau dann, wenn $x_\alpha \in \overline{\{x'_\alpha\}}$.

Ein Faden f des Spektrums $(\mathfrak{M}_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha\in I}$ wird ein minimaler Faden des Spektrums genannt, wenn es keinen Faden $f' \neq f$ gibt mit $f' \leqq f$. Mit der Relation $f' \leqq f$ ist auf dem Grenzraum des Spektrums eine teilweise Ordnung

[2]) In [3] und [6] wird die Normalität des bikompakten Hausdorffschen Raumes wesentlich benutzt.

definiert. Die minimalen Fäden sind gerade die minimalen Elemente bezüglich dieser teilweisen Ordnung.

Als unterer Grenzraum eines Spektrums $(\mathfrak{M}_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha\in I}$ aus T_0-Räumen $\mathfrak{M}_\alpha$ wird der folgende Raum definiert:

Die Punkte des Raumes sind die minimalen Fäden. Ein erzeugendes System für die offenen Mengen dieses Raumes bilden die Mengen

$U(H) = \{$Menge der minimalen Fäden, deren α-te Koordinate in der offenen Menge H von $\mathfrak{M}_\alpha$ liegt$\}$.

Der untere Grenzraum eines Spektrums $(\mathfrak{M}_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha\in I}$ ist also der Teilraum des vollen Grenzraumes dieses Spektrums, der aus allen minimalen Fäden besteht.

Es gilt

(3) $(\mathfrak{M}_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha\in I}$ *sei ein inverses Spektrum aus topologischen T_0-Räumen. Dann gilt:*

Die minimalen Fäden des Spektrums stimmen mit den abgeschlossenen Punkten des Grenzraumes überein.

Beweis: 1. Wir zeigen für einen minimalen Faden f des Spektrums, daß f ein abgeschlossener Punkt des Grenzraumes ist. Sei $f' \in \overline{\{f\}}$ und sei U_α eine beliebige offene Umgebung der α-ten Koordinate x'_α von f' in $\mathfrak{M}_\alpha$. Dann ist $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ eine offene Umgebung von f' in dem Grenzraum. Wegen $f' \in \overline{\{f\}}$ gilt also $f \in \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Folglich ist für die α-te Koordinate x_α von f $x_\alpha \in U_\alpha$, d. h. $x'_\alpha \leqq x_\alpha$. Demnach hat man für jedes x_α $x'_\alpha \leqq x_\alpha$ und damit ist $f' \leqq f$. Infolge der Minimalität von f bedeutet das $f' = f$. Also ist $\{f\} = \overline{\{f\}}$, d. h. f ist ein abgeschlossener Punkt des Grenzraumes.

2. Sei umgekehrt f ein abgeschlossener Punkt des Grenzraumes und $f' \leqq f$. Ist $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, U_α offen in $\mathfrak{M}_\alpha$, eine offene Umgebung von f', so gilt für die α-te Koordinate x'_α von f' $x'_\alpha \in U_\alpha$. Wegen $f' \leqq f$ hat man nun $x_\alpha \in U_\alpha$. Daher ist f in $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Infolgedessen hat man $f' \in \overline{\{f\}}$ und damit $f' = f$. Es gibt also keinen minimaleren Faden zu f[3]).

Wir betrachten jetzt das offene finite Zerlegungsspektrum $(\mathfrak{M}/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha\in\mathfrak{R}}$ eines topologischen T_0-Raumes $\mathfrak{M}$. Auf das Spektrum sind die obigen Begriffsbildungen anwendbar, da ja jeder Raum $\mathfrak{M}/R_\alpha$ ein T_0-Raum ist.

Wir können folglich dem Satz 4 auch die nachstehende Form geben.

Satz 5: *$\mathfrak{M}$ sei ein T_1-Raum. Dann ist der untere Grenzraum des finiten offenen Zerlegungsspektrums von $\mathfrak{M}$ gleich der Wallmanschen Erweiterung von $\mathfrak{M}$.*

Ist der T_1-Raum $\mathfrak{M}$ schon bikompakt, so folgt

[3]) In völlig entsprechender Weise kann man für ein inverses Spektrum von T_0-Räumen für die Fäden des Grenzraumes folgende Relation zeigen: $f' \leqq f$ genau dann, wenn $f' \in \overline{\{f\}}$.

Satz 6: *Jeder bikompakte T_1-Raum $\mathfrak{M}$ ist der untere Grenzraum eines gewissen Spektrums endlicher T_0-Räume, und zwar des offenen finiten Zerlegungsspektrums.*

Umgekehrt ist der untere Grenzraum eines Spektrums endlicher T_0-Räume auch ein bikompakter T_1-Raum.

Beweis: Der erste Teil ist nach Satz 5 klar, weil ein bikompakter T_1-Raum mit seiner Wallmanschen Erweiterung übereinstimmt.

Der zweite Teil ergibt sich so:

In [3] ist bewiesen worden, daß der untere Grenzraum eines Spektrums aus endlichen T_0-Räumen ein bikompakter Raum ist. Jeder Punkt des unteren Grenzraumes ist aber auch nach (3) ein abgeschlossener Punkt.

§ 5. Spektrale Konstruktion der Stone-Cechschen Erweiterung

In Übereinstimmung zu dem Vorgehen in § 4 stellen wir hier den Zusammenhang zwischen dem Grenzraum $\gamma\mathfrak{M}$ des offenen finiten Zerlegungsspektrums eines vollständig regulären Raumes $\mathfrak{M}$ mit der Stone-Čechschen Erweiterung $\beta\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{M}$ her.

$\mathfrak{M}$ sei also vollständig regulär.

Wir definieren eine Äquivalenzrelation S wie folgt auf $\gamma\mathfrak{M}$. Zwei Punkte x und y aus $\gamma\mathfrak{M}$ sollen bezüglich S äquivalent sein genau dann, wenn für jede stetige, reelle Funktion $\varphi : \gamma\mathfrak{M} \to [0, 1]$ gilt $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Die Äquivalenzklassen von $\gamma\mathfrak{M}$ bezüglich S sind also die maximalen Mengen, auf denen jede stetige, reelle Funktion $\varphi : \gamma\mathfrak{M} \to [0, 1]$ konstant ist. Im folgenden sei nun immer $\mathfrak{M}$ mit $\Phi(\mathfrak{M})$ in $\gamma\mathfrak{M}$ identifiziert!

Dann gilt:

1. Keine zwei Punkte x und y aus $\mathfrak{M}$ sind bezüglich S äquivalent.

2. S ist die schwächste Hausdorffsche Äquivalenzrelation auf $\gamma\mathfrak{M}$.

In der Tat: $\mathfrak{M}$ ist vollständig regulär, also gibt es eine stetige Abbildung $\varphi : \mathfrak{M} \to [0, 1]$ mit $\varphi(x) = 0$ und $\varphi(y) = 1$.

Weil sich φ nach Satz 3 IV. stetig fortsetzen läßt auf $\gamma\mathfrak{M}$, können also x und y bezüglich S nicht äquivalent sein.

S ist zunächst eine Hausdorffsche Relation, d. h. der Quotientenraum ist Hausdorffsch. Sind nämlich x und y zwei nicht äquivalente Punkte aus $\gamma\mathfrak{M}$, so gibt es eine stetige, reelle Funktion $\varphi : \gamma\mathfrak{M} \to [0, 1]$ mit $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ lassen sich durch offene Umgebungen U und V trennen. Dann sind $\varphi^{-1}(U)$ und $\varphi^{-1}(V)$ offene, bezüglich S gesättigte Mengen, die x und y trennen. Folglich ist $\gamma\mathfrak{M}/S$ ein Hausdorffscher Raum.

Dieser ist vermöge der kanonischen Abbildung $k : \gamma\mathfrak{M} \to \gamma\mathfrak{M}/S$ stetiges Bild von $\gamma\mathfrak{M}$, also ist er selbst ein bikompakter Raum. Wegen 1. ist k auf

$\mathfrak{M}$ eineindeutig. Außerdem ist $k(\mathfrak{M})$ dicht in $\gamma\mathfrak{M}/S$, weil $\mathfrak{M}$ dicht in $\gamma\mathfrak{M}$ ist. Weiterhin wird die Einschränkung $k|\mathfrak{M}$ der Abbildung k durch die vollständige Regularität von $\mathfrak{M}$ eine offene Abbildung auf $\mathfrak{M}$.

a) $\gamma\mathfrak{M}/S$ ist also eine bikompakte Hausdorffsche Erweiterung von $\mathfrak{M}$.

b) Zum anderen läßt sich jede stetige, reelle Funktion $\varphi: \mathfrak{M} \to [0, 1]$ stetig fortsetzen auf $\gamma\mathfrak{M}/S$.

Nämlich φ läßt sich stetig fortsetzen auf $\gamma\mathfrak{M}$. Die Fortsetzung ψ von φ ist dann auf jeder S-Klasse konstant, demgemäß ist $\psi^*(k(x)) := \psi(x)$ eine stetige Fortsetzung von φ auf $\gamma\mathfrak{M}/S$. a) und b) kennzeichnen nun eindeutig die Stone-Čechsche Erweiterung $\beta\mathfrak{M}$ des Raumes $\mathfrak{M}$ (vgl. [7]). Eine schwächere Hausdorffsche Relation T auf $\gamma\mathfrak{M}$ als S kann es auch nicht geben, weil sich sonst $\gamma\mathfrak{M}/T$ vermöge der kanonischen Abbildung $h: \gamma\mathfrak{M}/T \to \gamma\mathfrak{M}/S$ so stetig auf $\gamma\mathfrak{M}/S$ abbilden lassen würde, daß „die Punkte von $\mathfrak{M}$ fest bleiben"! Dieses stände im Widerspruch zur Maximalität der Stone-Čechschen Erweiterung $\beta\mathfrak{M}$.

Wir haben also gefunden

Satz 7: *Die Stone-Čechsche Erweiterung $\beta\mathfrak{M}$ eines vollständig regulären Raumes $\mathfrak{M}$ ergibt sich als Quotientenraum des Grenzraumes $\gamma\mathfrak{M}$ des offenen finiten Zerlegungsspektrums von $\mathfrak{M}$ nach der schwächsten Hausdorffschen Äquivalenzrelation auf $\gamma\mathfrak{M}$.*

Bemerkung: Auf dieselbe Weise ergibt sich auch aus dem Grenzraum des finiten Zerlegungsspektrums des Raumes $\mathfrak{M}$ die Stone-Čechsche Erweiterung.

Für normale Räume stimmt bekanntlich (vgl. [7]) die Wallmansche Erweiterung mit der Stone-Čechschen Erweiterung überein. Wir formulieren daher den

Zusatz zu Satz 5: *Der untere Grenzraum des finiten offenen Zerlegungsspektrums eines normalen Raumes ist gleich der Stone-Čechschen Erweiterung dieses Raumes.*

Die x-Fäden des offenen finiten Zerlegungsspektrums eines T_1-Raumes sind minimale Fäden, denn sie sind abgeschlossene Punkte des Grenzraumes.

In anderer Richtung gilt:

(1) *Ein minimaler Faden des offenen finiten Zerlegungsspektrums eines bikompakten T_0-Raumes ist notwendigerweise ein x-Faden.*

Beweis: Sei $f = (K_{R_\alpha})$ ein Faden des offenen finiten Zerlegungsspektrums des bikompakten T_0-Raumes $\mathfrak{M}$. Die Menge $\bigcap \bar{K}_{R_\alpha} | K_{R_\alpha} \in f$ ist dann nicht leer, weil ja doch das System $\{\bar{K}_{R_\alpha} | K_{R_\alpha} \in f\}$ ein zentriertes System abgeschlossener Mengen eines bikompakten Raumes ist. Es gibt folglich einen Punkt $x \in \bigcap \bar{K}_{R_\alpha} | K_{R_\alpha} \in f$. Wir betrachten den x-Faden f_x. Es gilt $x \in \bar{K}_{R_\alpha}$ in $\mathfrak{M}$, deshalb ist die R_α-Klasse von x $\hat{x}$ in $\overline{\{K_{R_\alpha}\}}^{\mathfrak{M}/R_\alpha}$ enthalten, denn $\overline{\{K_{R_\alpha}\}}^{\mathfrak{M}/R_\alpha}$ ist das kanonische Bild der kleinsten abgeschlossenen, bezüglich R_α gesättigten Menge aus $\mathfrak{M}$, die die Klasse K_{R_α} enthält.

Das bedeutet $\dot{x} \leq K_{R_\alpha}$ in $\mathfrak{M}/R_\alpha$. Zu dem Faden f ist also ein minimaler Faden f_x gefunden. Ist f selbst ein minimaler Faden, so muß also $f = f_x$ sein.

In einfacher Weise folgt nun auch über die spektrale Erzeugung von bikompakten T_2-Räumen das

Theorem von Alexandroff-Kurosch: *Jeder bikompakte Hausdorffsche Raum ist die untere Grenze eines gewissen Hausdorffschen Spektrums endlicher T_0-Räume. Umgekehrt ist die untere Grenze eines Hausdorffschen Spektrums endlicher T_0-Räume ein bikompakter Hausdorffscher Raum.*

Beweis: Ein Spektrum aus endlichen T_0-Räumen $(\mathfrak{M}_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha \in I}$ heißt dabei Hausdorffsches Spektrum, wenn es zu je zwei verschiedenen minimalen Fäden f und f' ein $\alpha \in I$ gibt, so daß die α-ten Koordinaten x_α und x'_α von f und f' in $\mathfrak{M}_\alpha$ durch offene Umgebungen trennbar sind.

Für einen bikompakten Hausdorffschen Raum $\mathfrak{M}$ ist das finite offene Zerlegungsspektrum ein Hausdorffsches Spektrum. Denn seien f und f' zwei minimale Fäden aus dem Grenzraum $\gamma\mathfrak{M}$. f und f' sind dann nach (1) also x-Fäden, $f = f_x$ und $f' = f_y$ mit $x \neq y$. Wegen des T_2-Trennungsaxioms von $\mathfrak{M}$ lassen sich x und y durch offene Umgebungen U und V trennen. U ist bezüglich einer Relation R_α gesättigt, V ist bezüglich einer Relation R_β gesättigt. Zu den Relationen R_α und R_β gibt es eine gemeinsame Verfeinerung R_γ. U und V sind bezüglich dieses R_γ gesättigt. Die kanonischen Bilder U/R_γ und V/R_γ trennen dann die R_γ-Koordinaten $K_{R_\gamma} \in f$ und $K'_{R_\gamma} \in f'$ in $\mathfrak{M}/R_\gamma$. Nach Satz 6 folgt sodann der Rest.

Die Umkehrung ist klar.

§ 6. Ein weiteres Beispiel für die spektrale Konstruktion spezieller Erweiterungen

Mit diesem abschließenden Paragraphen wollen wir eine weitere Andeutung über die Nützlichkeit des von uns bezogenen Standpunktes machen.

$\mathfrak{M}$ sei ein nulldimensionaler T_0-Raum. Das ist ein T_0-Raum, in dem die offenen-abgeschlossenen Mengen eine offene Basis von $\mathfrak{M}$ bilden. Solch ein Raum ist dann sogar vollständig regulär!

Wir konstruieren zu $\mathfrak{M}$ folgendes Zerlegungsspektrum:

$\mathfrak{U}$ sei das System der offenen-abgeschlossenen endlichen Überdeckungen von $\mathfrak{M}$. Das zu $\mathfrak{U}$ gehörige System $\mathfrak{R} = \{R_\alpha | \alpha \in \mathfrak{U}\}$ der erzeugten Äquivalenzrelationen ist dann gerichtet, weil $\mathfrak{U}$ additiv und multiplikativ ist. Die bezüglich gewisser Relationen $R_\alpha \in \mathfrak{R}$ gesättigten offenen Mengen bilden außerdem eine Basis von $\mathfrak{M}$, denn dieses System ist das System aller offenen-abgeschlossenen Mengen. Zwei Punkte $x \neq y$ von $\mathfrak{M}$ sind wegen der T_0-Eigenschaft von $\mathfrak{M}$ auch nicht bezüglich aller $R_\alpha \in \mathfrak{R}$ äquivalent.

Deshalb ergibt sich

(1) *Der Grenzraum $\zeta\mathfrak{M}$ des von den endlichen offenen-abgeschlossenen Überdeckungen erzeugten Zerlegungsspektrums des nulldimensionalen T_0-Raumes $\mathfrak{M}$ ist ein bikompakter nulldimensionaler T_0-Erweiterungsraum von $\mathfrak{M}$.*

Beweis: Daß $\zeta\mathfrak{M}$ eine bikompakte T_0-Erweiterung von $\mathfrak{M}$ ist, folgt sofort aus Satz 1 und der Tatsache, daß jeder Zerlegungsraum $\mathfrak{M}/R_\alpha$ ein endlicher (sogar diskreter) T_0-Raum ist. Die Nulldimensionalität von $\zeta\mathfrak{M}$ erschließt man so:

Die Mengen U^*, U offen-abgeschlossen in $\mathfrak{M}$, bilden nach (4) aus § 2 eine offene Basis von $\zeta\mathfrak{M}$. Jedes U^* ist dabei aber auch nach (6) § 2 abgeschlossen. Demnach hat $\zeta\mathfrak{M}$ eine offene Basis aus offenen-abgeschlossenen Mengen, womit die Nulldimensionalität nachgewiesen ist.

Bemerkung: Der Raum $\zeta\mathfrak{M}$ ist somit eine bikompakte Hausdorffsche Erweiterung von $\mathfrak{M}$!

Wie hängt jetzt die Stone-Čechsche Erweiterung $\beta\mathfrak{M}$ mit dem Grenzraum $\zeta\mathfrak{M}$ zusammen?

Dazu führen wir folgendes aus.

(2) *Für einen nulldimensionalen T_0-Raum $\mathfrak{M}$ ist der Komponentenraum $\beta\mathfrak{M}/K$ der Stone-Čechschen Erweiterung $\beta\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{M}$ die größte nulldimensionale bikompakte Hausdorffsche Erweiterung von $\mathfrak{M}$, d. h. es gibt zu jeder anderen bikompakten Hausdorffschen nulldimensionalen Erweiterung $e\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{M}$ eine stetige Abbildung von $\beta\mathfrak{M}/K$ auf $e\mathfrak{M}$, die auf $\mathfrak{M}$ die Identität ist*[4]).

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß $\beta\mathfrak{M}/K$ überhaupt eine nulldimensionale Erweiterung von $\mathfrak{M}$ ist.

Zwei Punkte $x \neq y$ von $\mathfrak{M}$ können nicht in derselben Komponente K von $\beta\mathfrak{M}$ liegen. Denn seien $x \neq y$ aus $\mathfrak{M}$ und sei K_x die x enthaltende Komponente von $\beta\mathfrak{M}$. Es gibt eine offene-abgeschlossene Menge U in $\mathfrak{M}$ mit $x \in U$ und $y \notin U$. Wir definieren folgende Funktion $\varphi: \mathfrak{M} \to [0, 1]$ $\varphi(z) = 0$ für $z \in U$ und $\varphi(z) = 1$ für $z \notin U$. Dann ist φ stetig auf $\mathfrak{M}$, weil U zugleich offen und abgeschlossen ist! φ läßt sich stetig fortsetzen zu einer Abbildung $\psi: \beta\mathfrak{M} \to [0,1]$. Dabei ist für die Mengen $\overline{U}$ und $\overline{CU}$ in $\beta\mathfrak{M}$ $\psi(\overline{U}) \subset \overline{\psi(U)} = \{0\}$ und $\psi(\overline{CU}) \subset \overline{\psi(CU)} = \{1\}$. Folglich ist $\overline{U}$ eine offene-abgeschlossene Menge in $\beta\mathfrak{M}$. Diese enthält x, aber nicht y! Außerdem muß $K_x \subset \overline{U}$ sein. Demnach kann nicht $y \in K_x$.

Die kanonische Abbildung α von $\beta\mathfrak{M}$ auf den Quotientenraum $\beta\mathfrak{M}/K$ ist also auf $\mathfrak{M}$ eine eineindeutige Abbildung. Nun ist der Komponentenraum eines bikompakten Hausdorffschen Raumes selbst Hausdorffsch, also ist die stetige

[4]) Einen anderen Beweis von (2) mittels uniformer Strukturen hat B. BANASCHEWSKI in [4] gegeben.

Abbildung α auch abgeschlossen. Für die Einschränkung $\alpha|\mathfrak{M}$ wird hier die Abgeschlossenheit nicht zerstört. Mithin ist $\mathfrak{M}$ dicht eingebettet in $\beta\mathfrak{M}/K$.

Bleibt noch die Maximalität zu zeigen!

Wegen der Maximalität der Stone-Čechschen Erweiterung $\beta\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{M}$ gibt es eine stetige Abbildung φ von $\beta\mathfrak{M}$ auf $e\mathfrak{M}$, die auf $\mathfrak{M}$ die Identität ist. Jede Komponente von $\beta\mathfrak{M}$ geht wegen der Stetigkeit dieser Abbildung in eine zusammenhängende Menge in $e\mathfrak{M}$ über. Die einzigen nicht leeren zusammenhängenden Mengen in $e\mathfrak{M}$ sind aber infolge der Nulldimensionalität des bikompakten Hausdorffschen Raumes $e\mathfrak{M}$ die einpunktigen Mengen. Das heißt: φ ist auf jeder Komponente konstant. Die Abbildung φ induziert sodann eine stetige $\mathfrak{M}$-identische Abbildung von $\beta\mathfrak{M}/K$ auf $e\mathfrak{M}$.

Mit dem vorstehenden Resultat gelangt man zu

Satz 8: *Der Grenzraum $\zeta\mathfrak{M}$ des von den endlichen offenen-abgeschlossenen Überdeckungen erzeugten Zerlegungsspektrums eines nulldimensionalen T_0-Raumes $\mathfrak{M}$ stimmt mit dem Komponentenraum $\beta\mathfrak{M}/K$ der Stone-Čechschen Erweiterung $\beta\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{M}$ überein. $\zeta\mathfrak{M}$ ist somit die größte bikompakte nulldimensionale Hausdorffsche Erweiterung von $\mathfrak{M}$.*

Beweis: Aus (1) und (2) folgert man, daß es eine stetige Abbildung φ von $\beta\mathfrak{M}/K$ auf $\zeta\mathfrak{M}$ gibt, die $\mathfrak{M}$-identisch ist.

Wir zeigen noch die Eineindeutigkeit dieser Abbildung. Daraus ergibt sich sofort, daß es eine Homöomorphie ist, weil es sich um Hausdorffsche bikompakte Räume handelt!

Seien $x \neq y$ zwei verschiedene Punkte aus $\beta\mathfrak{M}/K$. Es gibt eine offene-abgeschlossene Umgebung $\tilde{U}$ in $\beta\mathfrak{M}/K$, die y nicht enthält. $\tilde{V}$ sei das Komplement von $\tilde{U}$ in $\beta\mathfrak{M}/K$. $\tilde{V}$ ist sodann eine offene-abgeschlossene Umgebung von y. Sei $U := \tilde{U} \cap M$ und $V := \tilde{V} \cap M$. Dann gilt $\overline{U} = \tilde{U}$, wobei die Hüllenbildung in $\beta\mathfrak{M}/K$ gemeint ist. Das folgt so: Zunächst ist $\overline{U} = \overline{\tilde{U} \cap M} \subset \tilde{U} \cap \overline{M} = \tilde{U}$. Die umgekehrte Ungleichung $\tilde{U} \subset \overline{U}$ ergibt sich auf Grund der Dichtigkeit von $\mathfrak{M}$ in $\beta\mathfrak{M}/K$. Denn ist $z \in \tilde{U}$ und W eine beliebige Umgebung von z, so ist auch $W \cap \tilde{U}$ eine und für diese gilt wegen der Dichtigkeit von M $W \cap \tilde{U} \cap M \neq \theta$, d. h. $W \cap U \neq \theta$. Damit ist z in $\overline{U}$.

Entsprechendes gilt für V.

Weil $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \theta$, so hat man hier $\overline{U \cap V} = \overline{U} \cap \overline{V}$. Infolgedessen ist $\varphi(\tilde{U} \cap \tilde{V}) = \varphi(\overline{U \cap V})$. Wegen der Abgeschlossenheit der Abbildung φ ist überdies $\varphi(\overline{U \cap V}) = \overline{\varphi(U \cap V)}^{\zeta\mathfrak{M}}$. φ war nun auf $\mathfrak{M}$ die Identität, also $\varphi(\overline{U \cap V}) = \overline{\varphi(U \cap V)}^{\zeta\mathfrak{M}} = \overline{U \cap V}^{\zeta\mathfrak{M}} = (U \cap V)^* = U^* \cap V^*$. Nimmt man für U^* und V^* rückwärtig die entsprechende Ersetzung durch $\overline{U}^{\zeta\mathfrak{M}}$ usw. vor, so erhält man schließlich $\varphi(\tilde{U} \cap \tilde{V}) = \varphi(\tilde{U}) \cap \varphi(\tilde{V})$. x und y können also nicht die gleichen Bildpunkte haben.

Literatur

[1] Alexandroff, P. S.: Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension. Ann. Math. 30, 101—187 (1928—1929).

[2] Alexandroff, P. S.: Diskrete Räume. Matem. Sbornik 2 (44), 501—520 (1937).

[3] Alexandroff, P. S.: Über den Begriff des Raumes in der Topologie. Uspechi matem. Nauk 2, 1 (17), 5—57 (1947), (Russ.).

[4] Banaschewski, B.: Über nulldimensionale Räume. Math. Nachr. 13, 129—140 (1955).

[5] Bourbaki, N.: Topologie générale, Kap. I—II. Paris 1951.

[6] Kurosch, A. G.: Kombinatorischer Aufbau der bikompakten topologischen Räume. Comp. Math. 2, 471—476 (1935).

[7] Nöbeling, G.: Grundlagen der analytischen Topologie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1954.

[8] Steenrod, N.: Universal homology groups. Ann. Math. 58, 661—701 (1936).

(Eingegangen am 3. Februar 1961)

Butzer, P. L.
Math. Annalen 144, 275—298 (1961)

Beziehungen zwischen den Riemannschen, Taylorschen und gewöhnlichen Ableitungen reellwertiger Funktionen

Von

P. L. Butzer in Aachen

Einleitung

Ein Ziel dieser Arbeit ist, den Zusammenhang zwischen den Riemannschen, Taylorschen und gewöhnlichen Ableitungen reellwertiger Funktionen $f(x)$ in den Räumen $C[-\pi, \pi]$, $L_p(-\pi, \pi)$, $1 \leqq p < \infty$, und in $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqq p \leqq 2$, zu untersuchen. In den ersten beiden Fällen ist $f(x)$ eine Funktion der Periode 2π, und im letzten Fall ist $f(x)$ eine auf der ganzen Achse (nicht periodische) meßbare Funktion. Außerdem werden sehr schwache hinreichende Bedingungen für die Existenz der gewöhnlichen r-ten Ableitung $f^{(r)}(x)$ angegeben. Diese Bedingungen, die eventuell auch notwendig sind, werden durch die Taylorschen Ableitungen ausgedrückt. Entsprechende notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von $f^{(r)}(x)$ mittels der Riemannschen Ableitungen wurden früher von Butzer ([8], Satz 5.1) angegeben.

Die Riemannsche Ableitung r-ter Ordnung ist durch

$$f^{[r]}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^r} \sum_{k=0}^{r} (-1)^r \binom{r}{k} f\left[x + h\left(\frac{r}{2} - k\right)\right]$$

definiert, falls dieser Grenzwert existiert. Zu bemerken ist die Schreibweise für diese Ableitungen.

Für diesen Differentiationsbegriff, den Riemann in einer Arbeit über die Eindeutigkeitssätze für trigonometrische Reihen eingeführt hat, sind viele Eigenschaften bekannt; insbesondere diejenigen, die sich mit dem punktweisen Konvergenzverhalten beschäftigen (vgl. etwa Zygmund [29], Bd. II, S. 59—83).

So sagt zum Beispiel ein Satz von de la Vallée Poussin (vgl. [25], S. 153) aus:

Satz A. *Ist $f(x)$ stetig in einem endlichen Intervall $[a, b]$ und besitzt in jedem Punkt dieses Intervalls eine endliche Riemann-Ableitung $l(x)$ von 2-ter Ordnung mit $l(x) \in L_1(a, b)$, so gilt*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \int_a^x d x_1 \int_a^{x_1} l(u)\, du \qquad (a \leqq x \leqq b),$$

wo c_0, c_1 Konstanten sind.

Ein spezieller Fall dieses Satzes ist ein Lemma von H. A. Schwarz (vgl. [26], S. 107), welches aussagt, daß aus $l(x) = 0$ folgt, daß $f(x)$ linear in $[a, b]$ ist.

Jedoch die Frage, Satz A auf höhere Riemann-Ableitungen zu verallgemeinern, ist nur unter zusätzlichen Voraussetzungen möglich. Existiert außerdem die Ableitung $f^{(r-2)}(x)$ in $[a, b]$, so hat S. Saks [23] bewiesen, daß

$$f(x) = P_{r-1}(x) + \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_{r-1}} l(u)\, du$$

für $a \leq x \leq b$ gilt, falls $r = 3$ oder 4 ist. Hier bedeutet $P_{r-1}(x)$ ein Polynom vom Grade $\leq (r-1)$. Daß man die Existenz von $f^{(r-2)}(x)$ für $r = 3$ sogar im Falle $l(x) = 0$ voraussetzen muß, zeigt das Gegenbeispiel

$$f(x) = |x|\, x^{r-3}.$$

In der Tat existieren die ersten $r - 3$ gewöhnlichen Ableitungen dieser Funktion, jedoch nicht die $(r-2)$-te gewöhnliche Ableitung im Punkte $x = 0$; aber die Riemannsche Ableitung r-ter Ordnung ist überall Null.

Ferner hat C. Kassimatis [19] einen Spezialfall einer Vermutung von Butzer und Kozakiewicz [11], die eine Erweiterung des Satzes von Saks für $r \geq 5$ darstellte, mit zusätzlichen Voraussetzungen bewiesen.

Ersetzt man jedoch die punktweise Konvergenz durch gleichmäßige Konvergenz, so brauchen keine Ableitungen von $f(x)$ zu existieren und folgender Satz (vgl. etwa Marchaud [21]) ist bekannt:

Satz B. *Ist $f(x)$ stetig in $[a, b]$ und ist $f^{[r]}(x) = l(x)$ gleichmäßig in $[a, b]$, so gilt für alle x in $[a, b]$:*

$$f(x) = P_{r-1}(x) + \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_{r-1}} l(u)\, du.$$

In der erwähnten Arbeit von Butzer und Kozakiewicz wurde ein Analogon des Satzes B bewiesen, wobei die gleichmäßige Konvergenz durch Konvergenz in der Norm des Raumes $L_1(a, b)$, bzw. schwache Konvergenz, ersetzt ist.

Diese Sätze bilden den Ausgangspunkt zu dem Abschnitt 4 dieser Arbeit, wobei unter anderem Varianten des Satzes B für periodische Funktionen der Klassen $C[-\pi, \pi]$ und $L_p(-\pi, \pi)$, $1 \leq p < \infty$ bewiesen werden (s. Folgerungen 4.1 und 4.2 unten). Diese Beweise sind völlig verschieden von den klassischen Beweisen und beruhen auf einer Fourier-Koeffizienten-Methode, oder anders gesagt auf einer Methode, die sich auf die *endliche* Fourier-Transformation stützt. Diese Methode erlaubt eine völlig einheitliche Betrachtung für die obigen Probleme und wurde in ([5], Theorems 5.1, 6.3) benutzt. Die erwähnte Folgerung für den L_p-Raum ist ein erweitertes Analogon eines Satzes von W. T. Reid [22], der sein Ergebnis auf Lösungskriterien für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen angewandt hat.

Weiterhin wird in Abschnitt 4 eine Variante des Satzes B für den Raum $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p \leq 2$ untersucht (Folgerung 4.3). Die Beweismethode hierzu beruht auf einer Fourier-Transformationsmethode, die der Verfasser in die Approximationstheorie (vgl. [5], [6], [7]) eingeführt und in anderen Arbeiten ([8], [9]) verfolgt hat.

Es ist auch möglich, anstatt der höheren gewöhnlichen Ableitungen die weniger bekannten Taylorschen Ableitungen zu nehmen. Die Taylorsche Ableitung von r-ter Ordnung ist durch die Formel

$$f^{[r]}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{r!}{h^r}\left\{f(x+h) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x)\right\}$$

definiert, und es wird angenommen, daß die gewöhnlichen Ableitungen von $f(x)$ bis zur Ordnung $(r-1)$ im Punkte x existieren. Es hat sich in einer Arbeit von P. L. Butzer und H. G. Tillmann [12] gezeigt, daß diese Ableitungen zur Untersuchung des Randverhaltens von Lösungen gewisser partieller Differentialgleichungen von Interesse sind.

Im Abschnitt 3 werden für die Taylor-Ableitungen die entsprechenden Ergebnisse bewiesen, die im Abschnitt 4 für die Riemann-Ableitungen gelten, wie oben besprochen. Diese Ergebnisse, d. h. die Folgerungen 3.1—3.3 unten, haben, insoweit der Verfasser unterrichtet ist, in der Literatur keine vorhergehende Betrachtung gefunden. Hier sagen die Sätze 3.1—3.3 aus, daß in den Räumen $C[-\pi,\pi]$, $L_p(-\pi,\pi)$, $1 \leqq p < \infty$ und $L_p(-\infty,\infty)$, $1 \leqq p \leqq 2$ die Existenz der gewöhnlichen Ableitung $f^{(r)}(x)$ mit der Existenz der Taylor-Ableitung $f^{[r]}(x)$ äquivalent ist. Die Beweismethoden beruhen wieder auf den beiden Fourier-Methoden.

In Abschnitt 5 wird der genaue Zusammenhang zwischen den gewöhnlichen, Taylorschen und Riemannschen Ableitungen formuliert, wobei die Konvergenz in den Räumen $C[-\pi,\pi]$, $L_p(-\pi,\pi)$ oder $L_p(-\infty,\infty)$ zu verstehen ist. In diesen Räumen sind alle drei Differentiationsbegriffe untereinander äquivalent. Im Falle der punktweisen Konvergenz ist dies natürlich nicht der Fall, wie Gegenbeispiele zeigen.

In Abschnitt 6 erst werden die beiden Fourier-Transformationsmethoden in ihrer vollen Stärke, jedoch nur in einer Richtung, benutzt, um hinreichende Bedingungen für die Existenz der Ableitung $f^{(r)}(x)$ anzugeben. Diese Bedingungen, mittels der Taylorschen Ableitung formuliert, werden wieder in den Räumen $C[-\pi,\pi]$, $L_p(-\pi,\pi)$ und $L_p(-\infty,\infty)$ betrachtet.

Vorausgeschickt, in Abschnitt 1 „Grundbegriffe", sind einige Lemmas über Eigenschaften der Fourier-Koeffizienten, die als Grundlage zu der besprochenen Fourier-Koeffizienten-Methode dienen; Abschnitt 2 enthält eine Vorführung der beiden Fourier-Methoden in ihrer schwächsten Form.

§ 1. Grundbegriffe

Die Beweismethoden für die Sätze dieser Arbeit beruhen auf einer schon in der Einleitung besprochenen Fourier-Transformations-Methode und auf einer Fourier-Koeffizienten-Methode. Gehören die Funktionen zur Klasse $L_p(-\infty,\infty)$, $1 \leqq p \leqq 2$, so wird die erst besprochene Methode benutzt; für periodische Funktionen der Klassen $C[-\pi,\pi]$ und $L_p(-\pi,\pi)$, $1 \leqq p < \infty$ die letztere.

Zunächst werden einige Ergebnisse über die Fourier-Koeffizienten vorweggenommen, einige bekannte, andere eventuell unnachweisbare.

Die komplexen Fourier-Koeffizienten einer Funktion $f(x)$ der Periode 2π sind durch

$$(1.1)\qquad \mathfrak{F}_F(f) = f_F(n)\,,\quad f_F(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\,dx \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots)\,,$$

definiert.

Lemma 1.1: *Sei f eine Funktion*[1]) *der Periode 2π, für die die r-te Ableitung $f^{(r)}(x)$ zu $C[-\pi, \pi]$ oder $L_p(-\pi, \pi)$, $p \geqq 1$ gehört. Dann gilt*

$$(1.2)\qquad \mathfrak{F}_F(f^{(r)}) = (i\,n)^r\,\mathfrak{F}_F(f)\,, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\,.$$

Der Beweis folgt sofort durch wiederholte partielle Integration.

Als Umkehrung hierzu gilt

Lemma 1.2: *Sind f und $g \in L_p(-\pi, \pi)$, $1 \leqq p < \infty$, und*

$$(1.3)\qquad (i\,n)^r\,\mathfrak{F}_F(f) = \mathfrak{F}_F(g) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\,,$$

so ist für fast alle x

$$(1.4)\qquad f(x) = f_F(0) + \int_{-\pi}^{x} dx_1 \int_{-\pi}^{x_1} \cdots dx_{r-1} \int_{-\pi}^{x_{r-1}} g(u)\,du\,,$$

d. h. $f^{(r-1)}(x)$ ist total stetig und $f^{(r)}(x) \in L_p(-\pi, \pi)$.

Beweis: Setzt man

$$G(x) = \int_{-\pi}^{x}\left[g(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\,du\right] dt\,,$$

so folgt durch partielle Integration für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

$$\frac{1}{(in)}\,\mathfrak{F}_F(g) = \frac{1}{2\pi(in)}\left\{e^{-inx} G(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + i\,n \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} G(x)\,dx\right\}.$$

Da die ersten Glieder auf der rechten Seite dieser Formel verschwinden, ist

$$(1/i\,n)\,\mathfrak{F}_F(g) = \mathfrak{F}_F(G)\,, \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)\,.$$

Nach der Voraussetzung (1.3) für $n = 0$ ist $G(x) = \int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt$ und $\mathfrak{F}_F(f) = \mathfrak{F}_F(G)$ für $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Da das System $\{e^{inx}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ vollständig in $L_1(-\pi, \pi)$ ist, gilt für fast alle x

$$f(x) - f_F(0) = \int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt\,.$$

Durch iterierte Anwendung der Formel für partielle Integration folgt die Behauptung im Falle $p = 1$. Ist $1 < p < \infty$, so benutzt man die Tatsache, daß das System $\{e^{inx}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ vollständig in $L_p(-\pi, \pi)$ ist.

Der Verfasser ist Herrn Prof. A. Zygmund für die freundliche Übermittlung des Beweises des Lemmas 1.2 dankbar.

Gehören f und g zu $C[-\pi, \pi]$, so folgt unter der Voraussetzung (1.3) die Behauptung (1.4) für alle x.

---

[1]) In diesem Lemma soll außerdem f der Bedingung $f(\pi) = f(-\pi)$ genügen. Diese Voraussetzung wird in den folgenden Sätzen, die sich auf Lemma 1.1 stützen, ohne besondere Erwähnung benutzt.

Wir setzen im folgenden

$$\mathfrak{J}^r_{-\pi}\, g(x) = \int_{-\pi}^{x} dx_1 \int_{-\pi}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{-\pi}^{x_{r-1}} g(u)\, du\,,$$

und

$$\mathfrak{J}^r_{-\pi}\, dg(x) = \int_{-\pi}^{x} dx_1 \int_{-\pi}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{-\pi}^{x_{r-1}} dg(u)\,.$$

Lemma 1.3: *Ist $f \in C[-\pi;\pi]$ und ist g eine wesentlich beschränkte periodische Funktion mit*

$$(in)^r\, \mathfrak{F}_F(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} g(x)\, dx \quad (n = 0\,, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

so gilt für fast alle x_1, x_2

$$|f^{(r-1)}(x_1) - f^{(r-1)}(x_2)| \leqq M\, |x_1 - x_2|\,,$$

d. h. $f^{(r-1)}(x)$ gehört fast überall zur Klasse Lip 1.

Beweis: Wie im Beweis von Lemma 1.2 ist

$$f(x) = f_F(0) + \mathfrak{J}^r_{-\pi}\, g(x)\,,$$

wo $g(x)$ fast überall beschränkt ist. Also ist

$$|f^{(r-1)}(x_1) - f^{(r-1)}(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} g(u)\, du \right| \leqq M\, |x_1 - x_2|\,.$$

Lemma 1.4: *Gilt $f \in L_1(-\pi, \pi)$, $g \in$ B.V. $[-\pi, \pi]$ und*

$$(i\,n)^r\, \mathfrak{F}_F(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, dg(x)\,, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\,, \tag{1.5}$$

so ist für fast alle x

$$f(x) = f_F(0) + \mathfrak{J}^r_{-\pi}\, dg(x)\,, \tag{1.6}$$

d. h. $f^{(r-1)}(x)$ gehört fast überall zur Klasse B.V. $[-\pi, \pi]$.

Beweis: Sei $\beta(x) = \int_{-\pi}^{x} dg(u)$. So folgt für $n = \pm 1$, ± 2, ... (siehe z. B. Widder [28], S. 12)

$$\frac{1}{(in)\, 2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, dg(x) = \frac{1}{(in)\, 2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, d\beta(x)\,. \tag{1.7}$$

Durch partielle Integration ist die rechte Seite von (1.7) gleich

$$\frac{1}{(in)\, 2\pi} \left\{ e^{-inx}\, \beta(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} + i\, n \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, \beta(x)\, dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, \beta(x)\, dx\,,$$

da nach (1.5) für $n = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} dg(u) = 0$ ist.

Hieraus ergibt sich für $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\beta(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\,dx\,,$$

und also gilt für fast alle x

$$f(x) - f_F(0) = \beta(x) = \int_{-\pi}^{x} dg(u)\,.$$

Durch mehrfache Integration folgt der Beweis der Formel (1.6) für fast alle x.

Es sei $T(x)$ die trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

und $\sigma_n(T; x)$ die zugehörigen arithmetischen Mittel.

Lemma 1.5: (i) *Die trigonometrische Reihe $T(x)$ ist die Fourierreihe einer wesentlich beschränkten periodischen Funktion g dann und nur dann, wenn*

$$\|\sigma_n(T; x)\|_c \equiv \sup_{-\pi \leqq x \leqq \pi} |\sigma_n(T; x)| = O(1)$$

ist.

(ii) *$T(x)$ ist die Fourierreihe einer Funktion g in $L_p(-\pi, \pi)$, $p > 1$ genau dann, wenn*

$$\|\sigma_n(T; x)\|_p \equiv \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(T; x)|^p\,dx\right]^{1/p} = O(1)$$

ist.

(iii) *$T(x)$ ist die Fourier-Stieltjes-Reihe einer Funktion $g \in$ B.V. $[-\pi, \pi]$ dann und nur dann, wenn*

$$\|\sigma_n(T; x)\|_1 = O(1)$$

ist.

In diesen drei Ergebnissen, die von W. H. Young stammen, ist das O jeweils unabhängig von n. Für die Beweise vgl. etwa Zygmund [29], Bd. I, S. 136–145.

Ergebnisse über die Fourier-Transformation, die im Laufe der Arbeit benutzt werden, sind an dieser Stelle nicht zusammengestellt, jedoch an den entsprechenden Stellen mit genauem Literaturhinweis versehen. Die Ergebnisse entsprechen im wesentlichen denjenigen, die oben für die Fourier-Koeffizienten dargeboten sind.

§ 2. Die Methoden in einfachen Fällen

Hier werden die beiden Fourier-Transformations-Methoden anhand möglichst einfacher Beispiele vorgeführt. Da die Beweise der Ergebnisse der Abschnitte 3 und 4 auf einer Verfeinerung dieser Methoden beruhen, werden hier alle Einzelheiten berücksichtigt.

Satz 2.1: *Es seien f und l Funktionen der Periode 2π und $f, l \in C[-\pi, \pi]$. Ist*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - l(x) \right\|_c = 0, \tag{2.1}$$

so ist für alle x

$$f(x) = \hat{f}_F(0) + \int_{-\pi}^{x} dx_1 \int_{-\pi}^{x_1} l(u)\, du,$$

d. h. $f^{(2)}(x)$ existiert, ist stetig und $f^{(2)}(x) = l(x)$.

Beweis: Definiert man die komplexen Fourier-Koeffizienten der Funktion $f \in C[-\pi, \pi]$ durch (1.1), so gilt

$$\mathfrak{F}_F[f(x \pm h)] = e^{\pm inh} \hat{f}_F(n) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Auf Grund der Beziehung

$$\mathfrak{F}_F\left[\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - l(x)\right] = \frac{e^{inh} + e^{-inh} - 2}{h^2} \hat{f}_F(n) - \hat{l}_F(n),$$

folgt

$$\left|\frac{e^{inh} + e^{-inh} - 2}{h^2} \hat{f}_F(n) - \hat{l}_F(n)\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{-inx}| \times$$

$$\times \left|\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - l(x)\right| dx \leq \left\|\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - l(x)\right\|_c.$$

Also gilt nach der Voraussetzung (2.1)

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{inh} + e^{-inh} - 2}{h^2} \hat{f}_F(n) = \hat{l}_F(n) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{2.2}$$

oder

$$(i\,n)^2 \hat{f}_F(n) = \hat{l}_F(n), \quad \text{für jedes } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Eine Anwendung von Lemma 1.2 für stetige Funktionen und $r = 2$ ergibt für alle x

$$f(x) = \hat{f}_F(0) + \int_{-\pi}^{x} dx_1 \int_{-\pi}^{x_1} l(u)\, du,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Wir setzen

$$F_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad F_h^2(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Die Voraussetzung (2.1) kann man etwas abschwächen: $\{F_h^2(x)\}$ soll gleichmäßig gegen die endliche Funktion $l(x)$ in $-\pi \leq x \leq \pi$ streben. Die Grenzfunktion $l(x)$ ist dann bekanntlich notwendig stetig. Die Behauptung ist, daß die zweite Ableitung $f^{(2)}(x)$ durchaus stetig ist und $f^{(2)}(x) = l(x)$. Obwohl dieser Satz wohlbekannt ist, ist die Beweismethode eine ganz andere.

Ersetzt man die gleichmäßige Konvergenz durch Konvergenz im Mittel von der Ordnung p, so gilt für Funktionen $f \in L_p(-\pi, \pi)$ der folgende weniger bekannte Satz, den wir hier für die erste Differenz formulieren:

Satz 2.2: *Es seien f und l periodische Funktionen der Periode 2π und $f, l \in L_p(-\pi, \pi)$, $1 \leq p < \infty$.*

Ist

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-l(x)\right|^p dx = 0\,, \tag{2.3}$$

so ist $f^{(1)}(x)$ *in* $L_p(-\pi,\pi)$ *und* $f^{(1)}(x) = l(x)$ *fast überall.*

Beweis: Wir betrachten die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f \in L_p(-\pi, \pi)$ und analog wie im Beweis von Satz 2.1 gilt

$$\left|\frac{e^{inh}-1}{h}f_F(n) - l_F(n)\right| \leq \left\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-l(x)\right\|_p.$$

Also folgt wiederum das Analogon von (2.2) und so unter Benutzung des Lemmas 1.2 für L_p-Funktionen die Behauptung des Satzes.

Für nicht-periodische Funktionen f der Klasse $L_p(-\infty,\infty)$, $1 \leq p \leq 2$, nimmt der vorgehende Satz die folgende Gestalt an und ist eine Verallgemeinerung des Satzes 2.2 [8]. Der Fall $p = 2$ wurde schon von Bochner und Chandrasekharan ([3], S. 131) betrachtet.

Satz 2.3: *Gehören die Funktionen f und l zur Klasse $L_p(-\infty,\infty)$, $1 \leq p \leq 2$, und gilt*

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-l(x)\right|^p dx = 0\,, \tag{2.4}$$

so ist $f^{(1)}(x) \in L_p(-\infty,\infty)$ *und* $f^{(1)}(x) = l(x)$ *fast überall.*

Beweis: Anstatt daß wir die Fourier-Koeffizienten wie in den vorhergehenden Beweisen als Integraltransformation benutzen, führen wir hier die Fourier-Transformation der Funktion $f \in L_1(-\infty,\infty)$ ein:

$$\mathfrak{F}[f] = \hat{f}\,,\quad \hat{f}(v) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx} f(x)\,dx\,. \tag{2.5}$$

Es gilt

$$\mathfrak{F}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-l(x)\right] = \frac{e^{ivh}-1}{h}\hat{f}(v) - \hat{l}(v) \tag{2.6}$$

und daher

$$\left|\frac{e^{ivh}-1}{h}\hat{f}(v) - \hat{l}(v)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-l(x)\right| dx\,.$$

Aus der Grenzbeziehung (2.4) im Falle $p = 1$ folgt

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{ivh}-1}{h}\hat{f}(v) = \hat{l}(v)\,,\quad \text{für jedes reelle } v,$$

oder $iv\hat{f}(v) = \hat{l}(v)$. Nach einem Ergebnis von Bochner und Chandrasekharan ([3], S. 26—27) folgt, daß

$$f(x) = -\int_x^{\infty} l(u)\,du$$

ist, d. h. f ist total stetig, und $f^{(1)}(x) = l(x)$ für fast alle x.

Ist $1 < p \leqq 2$, so setzen wir den Beweis folgenderweise fort: Definiert man

$$\hat f_\omega(v) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\omega}^{\omega} e^{-ivx} f(x)\,dx\,, \quad p + q = pq\,,$$

so ist $\hat f_\omega(v)$ im Raume L_q gegen eine Funktion $\hat f(v)$ für $\omega \to \infty$ konvergent. Dieses $\hat f(v)$, die Fourier-Plancherel-Transformierte von $f \in L_p(-\infty, \infty)$ genannt, genügt der Ungleichung (siehe TITCHMARSH [25], S. 96)

$$\|\hat f(v)\|_q \leqq \|f(x)\|_p\,. \tag{2.7}$$

Da

$$\mathfrak{F}[f(x+h)] = e^{ivh}\hat f(v) \tag{2.8}$$

ist (siehe [25], S. 90), folgt aus (2.7)

$$\left\|\frac{e^{ivh}-1}{h}\hat f(v) - \hat l(v)\right\|_q \leqq \left\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - l(x)\right\|_p. \tag{2.9}$$

Nach der Voraussetzung (2.4) für $1 < p \leqq 2$ gilt also

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{e^{ivh}-1}{h}\hat f(v) - \hat l(v)\right\|_q = 0\,, \tag{2.10}$$

und vollzieht man den Grenzübergang unter dem Integralzeichen, so ist

$$\|i\,v\,\hat f(v) - \hat l(v)\|_q = 0\,. \tag{2.11}$$

In der Tat ist die Familie $\{F_h(x)\}$ in der L_p-Norm beschränkt (da sie konvergent ist), also gilt nach (2.9)

$$\left\|\frac{e^{ivh}-1}{h}\hat f(v)\right\|_q \leqq M\,,$$

woraus man leicht schließen kann, daß $i\,v\,\hat f(v) \in L_q(-\infty, \infty)$ ist, d. h. der Integrand in (2.10) ist durch

$$|i\,v\,\hat f(v)|^q + |\hat l(v)|^q \in L_1(-\infty, \infty)$$

majorisiert.

Aus (2.11) folgt, daß $i\,v\,\hat f(v) = \hat l(v)$ für fast alle v ist. Nach BOCHNER und CHANDRASEKHARAN [(3], S. 128, S. 215) ist $f(x) = -\int_x^\infty l(u)\,du$, für fast alle x, d. h. $f(x)$ ist total stetig, mit $f^{(1)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ und $f^{(1)}(x) = l(x)$ fast überall, was zu beweisen war.

§ 3. Die Taylorsche Ableitung

Existieren die Ableitungen $f^{(i)}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ in einer Umgebung von $x = x_0$, so wird der Ausdruck

$$f^{(r)}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{r!}{h^r}\left[f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{r-1}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0)\right], \tag{3.1}$$

unter der Voraussetzung, daß dieser Grenzwert existiert, *Taylorsche Ableitung von r-ter Ordnung* der Funktion $f(x)$ im Punkte x_0 genannt.

Der Kürze halber setzen wir

$$\nabla_h^r f(x) = r! \left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) \right].$$

Ist der Grenzübergang in (3.1) gleichmäßig in einem Intervall $[a, b]$ und $f^{(i)} \in C[a, b]$ $(i = 0, 1, \ldots, r-1)$, so heißt $f^{[r]}(x)$ eine gleichmäßige r-te Taylor-Ableitung.

Die gewöhnliche r-te Ableitung der Funktion $f(x)$ im Punkte $x = x_0$ bezeichnen wir mit $f^{(r)}(x_0)$. Existieren die Ableitungen $f^{(i)}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ in einer Umgebung von $x = x_0$, so ist $f^{(r)}(x_0)$ durch r-maliges sukzessives Differenzieren der Funktion $f(x)$ definiert.

Wir betrachten den Zusammenhang dieser beiden Definitionen. Bekanntlich folgt aus der Existenz der gewöhnlichen Ableitung $f^{(r)}(x)$ in $x = x_0$ die Existenz der r-ten Taylor-Ableitung $f^{[r]}(x)$ in $x = x_0$ und es gilt $f^{[r]}(x_0) = f^{(r)}(x_0)$ (vgl. etwa Th. Chaundy [13], S. 112).

Jedoch ist die Existenz von $f^{(r)}(x_0)$ nicht notwendig für die Existenz von $f^{[r]}(x_0)$, wie das folgende Gegenbeispiel von G. Valiron ([27], S. 83) zumindest für $r = 2$ zeigt:

Sei f in einer Umgebung von $x = x_0$ durch

$$f(x) = \frac{x^2}{2}\,(1 + \varepsilon(x))\,, \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

definiert. Hier gilt $f^{(1)}(0) = 0$ und $f^{[2]}(0) = 1$, d. h. die 2-te Taylor-Ableitung existiert für $x = 0$. Nun kann man $\varepsilon(x)$ so mit x gegen Null streben lassen, daß $f^{(1)}(x)$ in $x = 0$ nicht konvergent ist, und so existiert auch nicht die gewöhnliche Ableitung $f^{(2)}(0)$. Für ein anderes Gegenbeispiel siehe [13], S. 117.

Ersetzt man jedoch in der obigen Betrachtung die punktweise Konvergenz durch gleichmäßige Konvergenz, so folgt aus der Existenz von $f^{[r]}(x)$ in $[a, b]$ diejenige von $f^{(r)}(x)$ in $[a, b]$. Für periodische Funktionen zeigt dies der folgende Satz.

Satz 3.1: i) *Existiert die gewöhnliche stetige r-te Ableitung $f^{(r)}(x)$ in $[-\pi, \pi]$, so existiert in $[-\pi, \pi]$ auch die gleichmäßige r-te Taylor-Ableitung $f^{[r]}(x)$, und es gilt*

$$f^{[r]}(x) = f^{(r)}(x)\,. \tag{3.2}$$

ii) *Umgekehrt, aus der Existenz der stetigen gleichmäßigen Taylor-Ableitung $f^{[r]}(x)$ in $[-\pi, \pi]$ folgt die Existenz der r-ten Ableitung $f^{(r)}(x)$ in $[-\pi, \pi]$, und es gilt wieder* (3.2).

Beweis: i) Obwohl dieser Teil des Satzes sehr bekannt ist, geben wir für spätere Zwecke eine Beweismethode. Da $f^{(r)}(x) \in C[-\pi, \pi]$, folgt durch partielle Integration

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \int_0^h \frac{(h-u)^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r)}(x+u)\,du\,. \tag{3.3}$$

Deshalb gilt

$$\sup\left|\frac{1}{h^r}\nabla_h^r f(x) - f^{(r)}(x)\right| \leqq \sup\left\{\frac{r!}{h^r}\int_0^h \frac{(h-u)^{r-1}}{(r-1)!}\,|f^{(r)}(x+u) - f^{(r)}(x)|\,du\right\},$$

wobei das Supremum über alle x, $x+h$ in $[-\pi, \pi]$ zu verstehen ist. Ist $\omega(f^{(r)}; \delta)$ der Stetigkeitsmodul der Funktion $f^{(r)}(x)$ für $|x_1 - x_2| \leqq \delta$, so kann man die rechte Seite der letzten Ungleichung nach oben durch

$$\frac{r!}{h^r}\int_0^h \frac{(h-u)^{r-1}}{(r-1)!}\,\omega(f^{(r)}; |h|)\,du = \omega(f^{(r)}; |h|)$$

abschätzen, wobei $\omega(f^{(r)}; |h|)$ bei der Bewegung $h \to 0$ gegen Null strebt.

ii) Die Existenz der stetigen gleichmäßigen Taylor-Ableitung $f^{[r]}(x)$ setzt voraus, daß $f^{(k)} \in C[-\pi, \pi]$ für $k = 0, 1, \ldots, r-1$ ist. Folglich gilt nach Lemma 1.1

$$\mathfrak{F}_F[f^{(k)}(x)] = (i\,n)^k\,\mathfrak{F}_F[f(x)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, r-1)\,. \tag{3.4}$$

Setzt man $l(x) = f^{[r]}(x)$, so ist

$$\mathfrak{F}_F\left[\frac{1}{h^r}\nabla_h^r f(x) - l(x)\right] = \frac{r!}{h^r}\left\{e^{i\,n\,h} - \sum_{k=0}^{r-1}\frac{h^k}{k!}(i\,n)^k\right\} f_F(n) - l_F(n)\,.$$

Hieraus folgt

$$\left|\frac{r!}{h^r}\left\{e^{i\,n\,h} - \sum_{k=0}^{r-1}\frac{h^k}{k!}(i\,n)^k\right\} f_F(n) - l_F(n)\right| \leqq \left\|\frac{1}{h^r}\nabla_h^r f(x) - l(x)\right\|_c.$$

Die Existenz der stetigen gleichmäßigen Ableitung $l(x)$ sagt aus, daß

$$\lim_{h\to 0}\frac{r!}{h^r}\left\{e^{i\,n\,h} - \sum_{k=0}^{r-1}\frac{h^k}{k!}(i\,n)^k\right\} f_F(n) = l_F(n)$$

für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Dies besagt, daß

$$(i\,n)^r f_F(n) = l_F(n) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ist. Also folgt nach Lemma 1.2, daß für alle x die Darstellung (1.4) gilt, d. h. $f^{(r)}(x)$ existiert, ist stetig und ist gleich $f^{[r]}(x)$.

Dieser Satz enthält offenbar die

Folgerung 3.1: *Es seien f und l Funktionen der Periode 2π mit $f^{(r-1)}(x) \in C[-\pi, \pi]$. Ist*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^r}\nabla_h^r f(x) = l(x) \tag{3.5}$$

gleichmäßig in $-\pi \leqq x \leqq \pi$, so gilt für alle x

$$f(x) = f_F(0) + \mathfrak{I}_{-\pi}^r\, l(x)\,,$$

d. h. $f^{(r)}(x)$ existiert, ist stetig und $f^{(r)}(x) = l(x)$. Insbesondere, ist $l(x) = 0$, so ist $f(x)$ konstant.

Der folgende Satz ist gültig für $1 \leqq p < \infty$.

Satz 3.2: i) *Sind die Ableitungen $f^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, r-1)$ total stetig und ist die gewöhnliche Ableitung $f^{(r)}(x) \in L_p(-\pi, \pi)$, so existiert die r-te Taylor-Ableitung $f^{[r]}(x)$ im Mittel von der Ordnung p in $(-\pi, \pi)$, d. h.*

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{h^r} \nabla_h^r f(x) - f^{[r]}(x) \right|^p dx = 0 ,$$

und es gilt $f^{[r]}(x) = f^{(r)}(x)$ für fast alle x.

ii) *Umgekehrt, aus der Existenz der r-ten Taylor-Ableitung $f^{[r]}(x)$ im Mittel von der Ordnung p in $(-\pi, \pi)$, folgt die Existenz der r-ten gewöhnlichen Ableitung $f^{(r)}(x) \in L_p(-\pi, \pi)$, und es gilt $f^{(r)}(x) = f^{[r]}(x)$ für fast alle x.*

Beweis: i) Da $f^{(k)}(x)$ für $k = 0, 1, \ldots, r-1$ total stetig ist und $f^{(r)}(x) \in$ $\in L_p(-\pi, \pi)$ ist, folgt wiederum die Formel (3.3) durch partielle Integration, und es gilt

$$\left\| \frac{1}{h^r} \nabla_h^r f(x) - f^{(r)}(x) \right\|_p = \left\| \frac{r!}{h^r} \int_0^h \frac{(h-u)^{r-1}}{(r-1)!} \left[f^{(r)}(x+u) - f^{(r)}(x) \right] du \right\|_p .$$

Da $f^{(r)}(x) \in L_p(-\pi, \pi)$, folgt in bekannter Weise, daß für $h \to 0$ die rechte Seite gegen Null strebt; vgl. etwa Dunford und Schwartz [16], S. 351—357.

ii) Die Existenz der r-ten Taylor-Ableitung $l(x) = f^{[r]}(x)$ im Mittel der Ordnung p in $(-\pi, \pi)$ setzt voraus, daß $f^{(k)}(x)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, r-2$ total stetig ist und daß $f^{(r-1)}(x) \in L_p(-\pi, \pi)$ ist. Wiederum gilt nach Lemma 1.1 die Formel (3.4). Analog wie im Beweis des zweiten Teils des Satzes 3.1 ist

$$\left| \frac{r!}{h^r} \left\{ e^{inh} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} (i\,n)^k \right\} f_F(n) - l_F(n) \right| \leq \left\| \frac{1}{h^r} \nabla_h^r f(x) - l(x) \right\|_p ,$$

woraus

$$(i\,n)^r f_F(n) = l_F(n) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

folgt. Auf Grund des Lemmas 1.2 gilt also die Darstellung (1.4) und $f^{(r-1)}(x)$ ist total stetig mit $f^{(r)}(x) \in L_p(-\pi, \pi)$.

Folgerung 3.2: *Es seien f und l periodische Funktionen, so daß $f^{(r-1)}(x)$ und $l(x)$ zu $L_p(-\pi, \pi)$, $1 \leq p < \infty$ gehören. Unter der Behauptung*

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{h^r} \nabla_h^r f(x) - l(x) \right|^p dx = 0$$

gilt für fast alle x

$$f(x) = f_F(0) + I_{-\pi}^r\, l(x) ,$$

d. h. $f^{(r-1)}(x)$ ist total stetig und $f^{(r)}(x) \in L_p(-\pi, \pi)$. Insbesondere, wenn $l(x) = 0$ ist, so ist $f(x)$ fast überall konstant.

Satz 3.3: i) *Ist $f^{(r-1)}(x)$ total stetig und $f^{(r)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p < \infty$, so existiert die Taylorsche Ableitung $f^{[r]}(x)$ im Mittel von der Ordnung p in $(-\infty, \infty)$, d. h.*

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{r!}{h^r} \left\{ f(x+h) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) \right\} - f^{[r]}(x) \right|^p dx = 0 ,$$

und es gilt $f^{[r]}(x) = f^{(r)}(x)$ fast überall.

ii) *Gibt es umgekehrt die r-te Taylor-Ableitung $f^{(r)}(x)$ im Mittel von der Ordnung p in $(-\infty, \infty)$, für $1 \leq p \leq 2$, so existiert $f^{(r-1)}(x)$ als eine total stetige Funktion, $f^{(r)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, und es gilt $f^{(r)}(x) = f^{(r)}(x)$ fast überall.*

Beweis: i) Aus den Voraussetzungen folgt durch partielle Integration die Formel (3.3), und hieraus ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{h^r} \nabla_h^r f(x) - f^{(r)}(x) \right|^p dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{r!}{h^r} \int_0^h (h-u)^{r-1} [f^{(r)}(x+u) - f^{(r)}(x)]\, du \right|^p dx .$$

Da $f^{(r)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, strebt bei der Bewegung $h \to 0$ das letzte Glied gegen Null (wie aus den Überlegungen von [16], S. 351—357 zu entnehmen ist).

ii) Der Beweis der Umkehrung ist tiefliegender. Wie in der Beweismethode von Satz 2.3 benutzen wir hier als Integraltransformation die Fourier-Transformation. Es sei $p = 1$. Da $f^{(r-2)}(x)$ total stetig ist und $f^{(r-1)}(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ ist, gilt ([3], S. 8—9)

$$\mathfrak{F}[f^{(k)}(x)] = (i v)^k \mathfrak{F}[f(x)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, r-1) . \tag{3.6}$$

Also gilt für $l(x) = f^{(r)}(x)$

$$\mathfrak{F}\left[\frac{1}{h^r} \nabla_h^r f(x) - l(x)\right] = \frac{r!}{h^r} \left\{ e^{ivh} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} (i v)^k \right\} \hat{f}(v) - \hat{l}(v) .$$

Es folgt

$$\left| \frac{r!}{h^r} \left\{ e^{ivh} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} (i v)^k \right\} \hat{f}(v) - \hat{l}(v) \right| \leq \left\| \frac{1}{h^r} \nabla_h^r f(x) - l(x) \right\|_1 .$$

Aus der Voraussetzung über die r-te Taylor-Ableitung erhält man hieraus für jedes reelle v

$$(i v)^r \hat{f}(v) = \hat{l}(v) .$$

Bekanntlich ([3], S. 26—27) folgt also, daß $f^{(r-1)}(x)$ total stetig ist und $f^{(r)}(x) = l(x)$ fast überall ist.

Es sei nun $1 < p \leq 2$. Da $f^{(r-2)}(x)$ total stetig und $f^{(r-1)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ ist, gilt ([3], S. 124—126, S. 215) die Beziehung (3.6), wo $\hat{f}(v) = \mathfrak{F}[f(x)]$ als Fourier-Plancherel-Transformierte der Funktion $f \in L_p(-\infty, \infty)$ zu verstehen ist. Also folgt aus (2.7) die Ungleichung

$$\left\| \frac{r!}{h^r} \left\{ e^{ivh} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} (i v)^k \right\} \hat{f}(v) - \hat{l}(v) \right\|_q \leq \left\| \frac{1}{h^r} \nabla_h^r f(x) - l(x) \right\|_p . \tag{3.7}$$

Die Voraussetzung von ii) ergibt daher

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{r!}{h^r} \left\{ e^{ivh} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} (i v)^k \right\} \hat{f}(v) - \hat{l}(v) \right\|_q = 0 ,$$

woraus $\|(i v)^r \hat{f}(v) - \hat{l}(v)\|_q = 0$ folgt. In der Tat, die Familie $\left\{\frac{1}{h^r} \nabla_h^r f(x)\right\}$ ist in der L_p-Norm beschränkt, also ist

$$\left\| \frac{r!}{h^r} \left\{ e^{ivh} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} (i v)^k \right\} \hat{f}(v) \right\|_q \leq M ,$$

woraus $(iv)^r \hat{f}(v) \in L_q(-\infty, \infty)$ folgt. Daher ist der Integrand in (3.7) durch $|(iv)^r \hat{f}(v)|^q + |\hat{l}(v)|^q \in L_1(-\infty, \infty)$ majorisiert.

Schließlich ist $(iv)^r \hat{f}(v) = \hat{l}(v)$ für fast alle v, und so ([3], S. 128–129, S. 215) für fast alle x

$$f(x) = (-1)^r \int_x^\infty dx_1 \int_{x_1}^\infty dx_2 \cdots \int_{x_{r-1}}^\infty l(u)\, du\,,$$

d. h. $f^{(r-1)}(x)$ ist total stetig und $f^{(r)}(x) = l(x)$ fast überall. Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung 3.3: *Ist $f^{(r-2)}(x)$ total stetig, $f^{(r-1)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ und $l(x) \in \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p \leq 2$, und gilt*

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{h^r} \nabla_h^r f(x) - l(x)\right|^p dx = 0\,,$$

so ist für fast alle x

$$f(x) = (-1)^r \int_x^\infty dx_1 \int_{x_1}^\infty dx_2 \cdots \int_{x_{r-1}}^\infty l(u)\, du\,,$$

d. h. $f^{(r-1)}(x)$ ist total stetig und $f^{(r)}(x) = l(x)$ fast überall. Insbesondere, ist $l(x) = 0$, so verschwindet $f(x)$ fast überall.

Die letzten beiden Folgerungen scheinen in der Literatur bisher keine Betrachtung gefunden zu haben.

§ 4. Die Riemannsche Ableitung

Nun führen wir eine dritte Definition für die r-te Ableitung einer Funktion $f(x)$ ein.

Definiert man die zentrale Differenz r-ter Ordnung von $f(x)$ durch

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} f\left[x + h\left(\frac{r}{2} - k\right)\right], \tag{4.1}$$

so ist die **Riemannsche Ableitung** von der Ordnung r der Funktion $f(x)$ im Punkte x_0 durch die Formel

$$f^{[r]}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^r} \Delta_h^r f(x_0)$$

definiert, falls dieser Grenzwert existiert.

Ist der Grenzübergang in (4.1) gleichmäßig in einem x-Intervall $[a, b]$, so spricht man von $f^{[r]}(x)$ als **gleichmäßige r-te Riemannsche Ableitung**. Betrachtet man den Grenzübergang in (4.1) in der Norm des Raumes $L_p(a, b)$, $1 \leq p < +\infty$, so heißt $f^{[r]}(x)$ **r-te Riemannsche Ableitung im Mittel von der Ordnung p** in (a, b).

Existiert $f^{(r)}(x_0)$, so auch $f^{[r]}(x_0)$, und beide besitzen denselben Wert. Jedoch ist die Umkehrung im allgemeinen ungültig für $r > 1$. Hierzu kann man Gegenbeispiele angeben; vgl. etwa [13], S. 126.

Satz 4.1: *Die Existenz der gewöhnlichen stetigen r-ten Ableitung $f^{(r)}(x)$ in $[-\pi, \pi]$ ist gleichbedeutend mit der Existenz der stetigen gleichmäßigen r-ten Riemannschen Ableitung $f^{[r]}(x)$. In diesem Fall sind beide Ableitungen gleich.*

Beweis: Der direkte Teil des Satzes, daß aus der Existenz der gewöhnlichen stetigen r-ten Ableitung die Existenz der gleichmäßigen r-ten Riemannschen Ableitung folgt, ist wohlbekannt. Er folgt z. B. aus einer iterierten Anwendung des Cauchyschen Mittelwertsatzes oder des Satzes von L'HOSPITAL. Jedoch wird hier ein anderer Beweis, der für den Beweis des nächsten Satzes von Interesse ist, angegeben. Ein Gedankengang von BUTZER und KOZAKIEWICZ [11] wird hier benutzt.

Zu diesem Zweck führt man für integrierbare Funktionen $f(x)$ die Integralmittelwerte ein, d. h. die Operatoren

$$\mathfrak{M}_h^1 f(x) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(x+u)\, du = \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} f(u)\, du \qquad (h > 0),$$

und im allgemeinen,

$$\mathfrak{M}_h^{r+1} f(x) = \mathfrak{M}_h^1 [\mathfrak{M}_h^r f(x)]. \tag{4.2}$$

An einige bekannte Eigenschaften dieser Integraloperatoren, die periodisch sind falls f periodisch ist, werde nun erinnert.

Ist f total stetig und $f^{(1)}(x) \in L_p(-\pi, \pi)$, so folgt

$$\mathfrak{M}_h^1 f^{(1)}(x) = \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} f^{(1)}(u)\, du = \frac{1}{h}\left[f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right].$$

Im allgemeinen, ist $f^{(r-1)}(x)$ total stetig und $f^{(r)}(x) \in L_p(-\pi, \pi)$, so folgt (durch Induktion)

$$h^r \mathfrak{M}_h^r f^{(r)}(x) = \Delta_h^r f(x).$$

Ist $f \in L_p(-\pi, \pi)$, so gilt (siehe z. B. GRAVES [18], S. 254)

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathfrak{M}_h^r f(x) - f(x)|^p\, dx = 0; \tag{4.3}$$

ist $f \in C[-\pi, \pi]$, so gilt (siehe z. B. ACHIESER [1], S. 174)

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \operatorname*{Sup}_{-\pi \leq x \leq \pi} |\mathfrak{M}_h^r f(x) - f(x)| \right\} = 0.$$

Weiterhin sind die obigen Eigenschaften gültig für Funktionen $f \in L_p(-\infty, \infty)$.

Wendet man diese Ergebnisse an, so folgt für $f^{(r)}(x) \in C[-\pi, \pi]$

$$\left\| \frac{1}{h^r} \Delta_h^r f(x) - f^{(r)}(x) \right\|_c = \| \mathfrak{M}_h^r f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) \|_c.$$

Da die rechte Seite bei der Bewegung $h \to 0$ gegen Null strebt, ist der direkte Teil des Satzes bewiesen.

In bezug auf die Umkehrung setzt man $l(x) = f^{[r]}(x)$, so gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_F\left[\frac{1}{h^r}\Delta_h^r f(x) - l(x)\right] &= \frac{1}{h^r}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\mathfrak{F}_F\left[f\left(x + k\left(\frac{r}{2} - k\right)\right)\right] - l_F(n) \\ &= \frac{1}{h^r}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}e^{inh\left(\frac{r}{2}-k\right)} f_F(n) - l_F(n)\,.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Laut Voraussetzung gilt für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^r}\left\{\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}e^{inh\left(\frac{r}{2}-k\right)}\right\} f_F(n) = l_F(n)\,. \tag{4.5}$$

Die folgende Identität wird nun benutzt:

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}k^j = \begin{cases}0\,, & 0 \leqq j \leqq r-1\\ (-1)^r r!\,, & j = r\,.\end{cases} \tag{4.6}$$

Für einen Beweis vgl. etwa W. FELLER [17], S. 63.

Nach der Regel von L'HOSPITAL und der Identität (4.6) folgt

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^r}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}e^{inh\left(\frac{r}{2}-k\right)}\\ &\qquad = \lim_{h\to 0}\frac{1}{rh^{r-1}}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\,i\,n\left(\frac{r}{2}-k\right)e^{inh\left(\frac{r}{2}-k\right)}\,,\end{aligned}$$

und weiterhin durch Induktion ist dieser Grenzwert gleich

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\left[i\,n\left(\frac{r}{2}-k\right)\right]^r e^{inh\left(\frac{r}{2}-k\right)}\\ &\qquad = \frac{(-in)^r}{r!}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\left(k-\frac{r}{2}\right)^r = (i\,n)^r\,.\end{aligned}$$

In Kombination mit der Beziehung (4.5) gilt also für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$(i\,n)^r f_F(n) = l_F(n)\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Für einen klassischen Beweis dieses Satzes, der gültig für nicht periodische Funktionen ist, die auf einem endlichen Intervall definiert sind, siehe etwa LJUSTERNICK und SOBOLEW [20], S. 247. Jedoch ist dieser Beweis nur für $r = 2$ einfach durchführbar.

Folgerung 4.1: *Es seien f und l Funktionen der Periode 2π und f stetig. Ist*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^r}\Delta_h^r f(x) = l(x)$$

gleichmäßig in $[\pi, \pi]$, so gilt für alle x

$$f(x) = f_F(0) + \mathfrak{F}_{-n}^r\, l(x)\,,$$

d. h. $f^{(r)}(x)$ existiert, ist stetig und $f^{(r)}(x) = l(x)$. Ist $l(x) = 0$, so ist $f(x)$ konstant.

Für nicht-periodische Funktionen, die auf einem endlichen Intervall definiert sind, ist die obige Folgerung schon von A. MARCHAUD [21] und für $l(x) = 0$ auch von TH. ANGHELUTZA [2] bewiesen worden.

Satz 4.2: *Es sei f eine periodische Funktion der Periode 2π. Die Ableitung $f^{(r-1)}(x)$ ist total stetig und $f^{(r)}(x)$ gehört zur Klasse $L_p(-\pi, \pi)$, $1 \leq p < \infty$, dann und nur dann, wenn die r-te Riemannsche Ableitung im Mittel von der Ordnung p in $(-\pi, \pi)$, $f^{[r]}(x)$ existiert und zu $L_p(-\pi, \pi)$ gehört. In diesem Fall sind beide Ableitungen fast überall gleich.*

Beweis: Der direkte Teil des Satzes wird, wie im Falle des Beweises vom Satze 4.1, mit Hilfe der Integralmittelwerte bewiesen. Für $f^{(r)}(x) \in L_p(-\pi, \pi)$ folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{h^r} \Delta_h^r f(x) - f^{(r)}(x)\right|^p dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\mathfrak{M}_h^r f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^p \, dx .$$

Die Beziehung (4.3) sagt aus, daß die rechte Seite gegen Null strebt und so auch die linke Seite.

Setzt man $l(x) = f^{[r]}(x)$, so folgt wiederum die Identität (4.4), woraus man

$$\left|\frac{1}{h^r} \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} e^{inh\left(\frac{r}{2} - k\right)} f_P(n) - l_P(n)\right| \leq \left\|\frac{1}{h^r} \Delta_h^r f(x) - l(x)\right\|_p$$

schließt. Somit gilt nochmals $(i\,n)^r f_P(n) = l_P(n)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Damit ist der Beweis des Satzes vollendet.

Folgerung 4.2: *Sind f und l periodisch mit f und $l \in L_p(-\pi, \pi)$, $1 \leq p < \infty$ und gilt*

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\Delta_h^r f(x)}{h^r} - l(x)\right|^p dx = 0 ,$$

so ist für fast alle x

$$f(x) = f_P(0) + \mathfrak{J}_{-\pi}^r l(x) ,$$

d. h. $f^{(r-1)}(x)$ ist total stetig und $f^{(r)}(x) = l(x)$ fast überall. Ist insbesondere $l(x) = 0$, so ist $f(x)$ fast überall konstant.

Das Analogon dieser Folgerung für $p = 1$ und für nicht-periodische Funktionen, die auf einem endlichen Intervall definiert sind, stammt von W. T. REID [22], falls $l(x) = 0$. Für allgemeine $l(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ siehe BUTZER und KOZAKIEWICZ [11].

Satz 4.3: *Die Funktion $f^{(r-1)}(x)$ ist total stetig und $f^{(r)}(x)$ gehört zur Klasse $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p \leq 2$, genau dann, wenn die r-te Riemann-Ableitung $f^{[r]}(x)$ im Mittel von der Ordnung p in $(-\infty, \infty)$ existiert, d. h. wenn*

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{h^r} \Delta_h^r f(x) - f^{[r]}(x)\right|^p dx = 0$$

gilt. In diesem Fall ist $f^{(r)}(x) = f^{[r]}(x)$ fast überall.

Beweis: Ist $f^{(r-1)}(x)$ total stetig und $f^{(r)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, so folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{h^r} \Delta_h^r f(x) - f^{(r)}(x)\right|^p dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{M}_h^r f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^p \, dx .$$

Nach der Relation (4.3) (die auch gültig für das Intervall $(-\infty, \infty)$ ist) strebt die rechte Seite gegen Null für $h \to 0$, und damit ist der Satz in einer Richtung bewiesen.

Zum Beweis der Umkehrung wird wieder die Fourier-Transformation benutzt. Es sei $p = 1$. Für $l(x) = f^{[r]}(x)$ gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left[\frac{1}{h^r} \Delta_h^r f(x) - l(x)\right] &= \frac{1}{h^r} \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \mathfrak{F}\left[f\left(x + h\left(\frac{r}{2} - k\right)\right)\right] - \hat{l}(v) \\ &= \frac{1}{h^r} \left\{\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} e^{ivh\left(\frac{r}{2}-k\right)}\right\} \hat{f}(v) - \hat{l}(v) .\end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung gilt also

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^r} \left\{\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} e^{ivh\left(\frac{r}{2}-k\right)}\right\} \hat{f}(v) = \hat{l}(v) ,$$

für jedes reelle v. Analog wie im Beweise des Satzes 4.1 folgt für jedes reelle v

$$(i\,v)^r \hat{f}(v) = \hat{l}(v) .$$

Bekanntlich ist nun $f^{(r-1)}(x)$ total stetig und $f^{(r)}(x) = l(x)$ fast überall.

Ist $1 < p \leqq 2$, so folgt aus der Ungleichung (2.7) die Ungleichung

$$\left\|\frac{1}{h^r} \left\{\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} e^{ivh\left(\frac{r}{2}-k\right)}\right\} \hat{f}(v) - \hat{l}(v)\right\|_q \leqq \left\|\frac{1}{h^r} \Delta_h^r f(x) - l(x)\right\|_p .$$

Die Voraussetzung des Satzes liefert also

$$\lim_{h \to 0} \left\|\frac{1}{h^r} \left\{\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} e^{ivh\left(\frac{r}{2}-k\right)}\right\} \hat{f}(v) - \hat{l}(v)\right\|_q = 0 ,$$

woraus man analog wie im Beweise von Satz 3.3 $\|(i\,v)^r \hat{f}(v) - \hat{l}(v)\|_q = 0$ schließen kann. Hieraus folgt wiederum der Beweis des Satzes.

Folgerung 4.3: *Sind $f(x)$ und $l(x)$ in $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqq p \leqq 2$, und gilt*

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{h^r} \Delta_h^r f(x) - l(x)\right|^p dx = 0 ,$$

so folgt dieselbe Behauptung wie in der Folgerung 3.3.

Diese Folgerung scheint neu zu sein.

§ 5. Der Zusammenhang zwischen den Differentiationsbegriffen

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen den Riemann-, Taylor- und den gewöhnlichen Ableitungen von Funktionen in den Räumen $C[-\pi, \pi]$, $L_p(-\pi, \pi)$ und $L_p(-\infty, \infty)$ betrachtet. Obwohl diese Beziehungen

fast direkt aus den Sätzen von § 3 und § 4 zu lesen sind, werden wir hier die entsprechenden Sätze genau formulieren.

Satz 5.1: *Sei f eine stetige Funktion der Periode 2π. Die folgenden drei Behauptungen sind miteinander äquivalent:*

1. *die gewöhnliche r-te Ableitung $f^{(r)}(x)$ existiert und $f^{(r)}(x) \in C[-\pi, \pi]$;*
2. *die gleichmäßige r-te Taylor-Ableitung $f^{(r)}(x)$ existiert und $f^{(r)}(x) \in C[-\pi, \pi]$;*
3. *die gleichmäßige r-te Riemann-Ableitung $f^{[r]}(x)$ existiert und $f^{[r]}(x) \in C[-\pi, \pi]$.*

Der Beweis folgt offenbar aus den Sätzen 3.1 und 4.1.

Satz 5.2: *Sei f eine meßbare Funktion der Periode 2π. Die folgenden drei Behauptungen sind untereinander äquivalent für $1 \leqq p < \infty$:*

1. *$f^{(r-1)}(x)$ ist total stetig und $f^{(r)}(x)$ existiert fast überall mit $f^{(r)}(x) \in L_p(-\pi, \pi)$;*
2. *die r-te Taylor-Ableitung $f^{(r)}(x)$ existiert im Mittel von der Ordnung p mit $f^{(r)}(x) \in L_p(-\pi, \pi)$;*
3. *die r-te Riemann-Ableitung $f^{[r]}(x)$ existiert im Mittel von der Ordnung p mit $f^{[r]}(x) \in L_p(-\pi, \pi)$.*

Der Beweis ist sofort aus den Sätzen 3.2 und 4.2 zu entnehmen.

Satz 5.3: *Sei f eine auf der ganzen reellen Achse definierte meßbare Funktion. Die folgenden drei Behauptungen sind miteinander äquivalent für $1 \leqq p \leqq 2$:*

1. *$f^{(r-1)}(x)$ ist total stetig und $f^{(r)}(x)$ existiert fast überall mit $f^{(r)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$;*
2. *die r-te Taylor-Ableitung $f^{(r)}(x)$ existiert im Mittel von der Ordnung p und $f^{(r)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$;*
3. *die r-te Riemann-Ableitung $f^{[r]}(x)$ existiert im Mittel von der Ordnung p nud $f^{[r]}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$.*

Zu den obigen Formulierungen ist zu bemerken, daß bei der Existenz der r-ten Taylor-Ableitung $f^{(r)}(x)$ im Mittel der Ordnung p stets implizit vorausgesetzt ist, daß $f^{(k)}(x)$ für $k = 0, 1, \ldots, r-2$ total stetig ist und daß $f^{(r-1)}(x) \in L_p$ ist.

§ 6. Verschärfte Methoden und Sätze

Nun werden die beiden Fourier-Methoden in ihrer verschärften Form auf die vorhergehenden Probleme angewandt. Zuerst wird der Fall $l(x) = 0$ der Folgerung 3.1 wesentlich verallgemeinert.

Satz 6.1: *Es sei f eine Funktion der Periode 2π, für die $f^{(k)}(x) \in C[-\pi, \pi]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, r-1)$ und*

$$\|\nabla_h^r f(x)\|_c = O(h^r) \qquad (h \to 0). \tag{6.1}$$

Dann gehört $f^{(r-1)}(x)$ fast überall zur Klasse Lip 1.

Beweis: Wir betrachten die Teilsummen

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} r! \left\{ e^{inh} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} (i\,n)^k \right\} f_F(n), \tag{6.2}$$

die wegen Lemma 1.1 in der Gestalt

$$(6.3)\qquad S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inu} [\nabla_h^r f(u)]\, du$$

auftreten.

Durch Änderung der Reihenfolge von Summation und Integration folgt wegen der Identität

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin(2N+1)x/2}{\sin x/2}$$

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nabla_h^r f(u) \frac{\sin(2N+1)(x-u)/2}{\sin(x-u)/2}\, du\,.$$

Nun führt man die arithmetischen Mittel $\sigma_R(x)$ dieser Teilsummen ein:

$$\sigma_R(x) = \frac{1}{R+1} \sum_{N=-R}^{R} S_N(x)$$

$$(6.4)\qquad = \sum_{n=-R}^{R} \left(1 - \frac{|n|}{R+1}\right) e^{inx} r! \left\{ e^{inh} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} (in)^k \right\} f_F(n)\,.$$

Wegen (6.3) kann man die $\sigma_R(x)$ auch in der Gestalt

$$\sigma_R(x) = \frac{1}{R+1} \sum_{N=-R}^{R} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nabla_h^r f(u) \frac{\sin(2N+1)(x-u)/2}{\sin(x-u)/2}\, du$$

darstellen, d. h.

$$(6.5)\qquad \sigma_R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nabla_h^r f(u) \frac{\sin^2(R+1)(x-u)/2}{(R+1)\sin^2(x-u)/2}\, du\,.$$

Da

$$(6.6)\qquad \|\sigma_R(x)\|_c \leq \|\nabla_h^r f(x)\|_c$$

ist, so folgt wegen der Darstellung (6.4) und der Voraussetzung (6.1), daß

$$\left\| \sum_{n=-R}^{R} \left(1 - \frac{|n|}{R+1}\right) e^{inx} r! \left\{ e^{inh} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} (in)^k \right\} f_F(n) \right\|_c = O(h^r)$$

ist, wobei O unabhängig von R und h ist. Folglich ist

$$(6.7)\qquad \left\| \sum_{n=-R}^{R} \left(1 - \frac{|n|}{R+1}\right) e^{inx} \frac{r!}{h^r} \left\{ e^{inh} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} (in)^k \right\} f_F(n) \right\|_c = O(1)\,.$$

Da

$$\lim_{h\to 0} \frac{r!}{h^r} \left\{ e^{inh} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} (in)^k \right\} = (in)^r$$

ist, folgt

$$(6.8)\qquad \left\| \sum_{n=-R}^{R} \left(1 - \frac{|n|}{R+1}\right) e^{inx} (in)^r f_F(n) \right\|_c = O(1)\,,$$

wobei O unabhängig von R ist.

Setzt man $T^{(r)}(x)$ für die trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_F(n)\,(i\,n)^r\, e^{i n x}\,,$$

so sagt die Bedingung (6.8) aus, daß

$$\|\sigma_R(T^{(r)};x)\|_c = O(1) \tag{6.9}$$

ist, also muß nach Lemma 1.5 $T^{(r)}(x)$ die Fourierreihe von einer wesentlich beschränkten periodischen Funktion g sein. Daher gilt für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$(i\,n)^r \hat{f}_F(n) = \hat{g}_F(n)\,,$$

woraus nach Lemma 1.3 der Satz bewiesen ist.

Der Beweisgang des obigen Satzes hat einige Berührungspunkte mit einem Gedankenzug von Sunouchi und Watari [24] in der Approximationstheorie.

Satz 6.2: *Es sei f eine Funktion der Periode 2π, für die $f, f^{(1)}, \ldots, f^{(r-2)}$ total stetig ist und $f^{(r-1)}(x) \in L_p(-\pi,\pi)$, $1 \leq p < \infty$. Unter der Voraussetzung*

$$\|\nabla_h^r f(x)\|_p = O(h^r)\,, \qquad (h \to 0) \tag{6.10}$$

existiert, im Falle $p = 1$, eine Funktion $g(x) \in$ B. V. $[-\pi,\pi]$, so daß für fast alle x

$$f(x) = \hat{f}_F(0) + \mathfrak{I}_{-\pi}^r\, dg(x)$$

ist, und im Falle $1 < p < \infty$ ist $f^{(r-1)}(x)$ total stetig, $f^{(r)}(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ und

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h^r} \nabla_h^r f(x) - f^{(r)}(x) \right\|_p = 0\,. \tag{6.11}$$

Beweis: Wir führen zuerst den Beweis im Falle $p = 1$ durch. Die Darstellung (6.5) folgt offenbar, sowie die Gültigkeit von (6.6) in der L_1-Norm. Daher ist (6.8) sowie (6.9) gültig in der L_1-Norm. Auf Grund von Lemma 1.5 muß $T^{(r)}(x)$ die Fourier-Stieltjes-Reihe einer Funktion $g \in$ B. V. $[-\pi,\pi]$ sein. Folglich gilt für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\hat{f}_F(n)\,(i\,n)^r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i n x}\, dg(x)\,,$$

woraus nach Lemma 1.4 die Behauptung des Satzes folgt.

Ist $p > 1$, so folgt die Ungleichung (6.6) in der L_p-Norm auf Grund der Jensenschen Ungleichung. Also ist (6.9) gültig in der L_p-Norm. Nach Lemma 1.5 ist $T^{(r)}(x)$ die Fourierreihe einer Funktion g in L_p. Folglich gilt für $n = 0$, $\pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\hat{f}_F(n)\,(i\,n)^r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i n x}\, g(x)\, dx\,,$$

und daher ist nach Lemma 1.2 $f^{(r-1)}(x)$ total stetig und $f^{(r)}(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. Die Behauptung (6.11) folgt aus Satz 3.2.

Dem folgenden Satze liegt die Fourier-Transformations-Methode im Raume $L_p(-\infty,\infty)$, $1 \leq p \leq 2$, von Butzer [6], [7] zu Grunde. Der Satz ist zu vergleichen mit der Folgerung 3.3, wobei hier die entsprechende Voraussetzung (6.12) wesentlich schwächer ist.

Satz 6.3: *Sei f eine auf der ganzen Achse definierte meßbare Funktion. Es seien außerdem $f, f^{(1)}, \ldots, f^{(r-2)}$ total stetig und $f^{(r-1)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqq p \leqq 2$. Unter der Voraussetzung*

$$\|\nabla_h^r f(x)\|_{L_p(-\infty,\infty)} = O(h^r) \qquad (h \to 0) \tag{6.12}$$

existiert im Falle $p = 1$ eine Funktion $g(x) \in$ B. V. $(-\infty, \infty)$, so daß für fast alle x

$$f(x) = (-1)^r \int_x^\infty dx_1 \int_{x_1}^\infty \cdots dx_{r-1} \int_{x_{r-1}}^\infty dg(u) \tag{6.13}$$

ist, und im Falle $1 < p \leqq 2$ ist $f^{(r-1)}(x)$ total stetig, $f^{(r)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ und

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h^r} \nabla_h^r f(x) - f^{(r)}(x) \right\|_p = 0 . \tag{6.14}$$

Beweis: Ist $p = 1$, so betrachten wir die Partialintegrale

$$S_w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-w}^{w} e^{ivx} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivu} \nabla_h^r f(u)\, du \right] dv , \tag{6.15}$$

d. h.

$$S_w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-w}^{w} e^{ivx} r! \left[e^{ivh} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} (iv)^k \right] \hat{f}(v)\, dv . \tag{6.16}$$

Da das innere Integral in (6.15) gleichmäßig konvergent für $-w \leqq v \leqq w$ $(0 < w < \infty)$ ist, gilt

$$S_w(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_h^r f(u) \frac{\sin w(x-u)}{x-u}\, du . \tag{6.17}$$

Führt man die arithmetischen Mittel $\sigma_R(x)$ dieser Partialintegrale ein:

$$\begin{aligned} \sigma_R(x) &= \frac{1}{R} \int_0^R S_w(x)\, dw \\ &= \frac{r!}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{ivx} \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) \left[e^{ivh} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{h^k}{k!} (iv)^k \right] \hat{f}(v)\, dv , \end{aligned} \tag{6.18}$$

so kann man für diese die Darstellung

$$\sigma_R(x) = \frac{1}{R} \int_0^R \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_h^r f(u) \frac{\sin w(x-u)}{x-u}\, du \right\} dw$$

gewinnen. Wird die Integrationsordnung vertauscht, so folgt

$$\sigma_R(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_h^r f(u) \frac{2 \sin^2 R(x-u)/2}{R(x-u)^2}\, du . \tag{6.19}$$

Es gilt also, unter Berücksichtigung der Bedingung (6.12),

$$\|\sigma_R(x)\|_1 \leqq \|\nabla_h^r f(x)\|_1 = O(h^r) , \tag{6.20}$$

woraus sich

$$(6.21)\quad \left\| \frac{r!}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-R}^{R} e^{ivx}\left(1-\frac{|v|}{R}\right)\left[e^{ivh}-\sum_{k=0}^{r-1}\frac{h^k}{k!}(iv)^k\right] f(v)\,dv \right\|_1 = O(h^r)$$

ergibt, wobei O unabhängig von R und h ist.

Da

$$\lim_{h\to 0}\frac{r!}{h^r}\left\{e^{ivh}-\sum_{k=0}^{r-1}\frac{h^k}{k!}(iv)^k\right\}=(iv)^r$$

ist, existiert eine Konstante $M>0$, so daß für $|h|\leqq h_0>0$, $|v|\leqq R$ gilt

$$\left|\left(1-\frac{|v|}{R+1}\right)\frac{r!}{h^r}\left\{e^{ivh}-\sum_{k=0}^{r-1}\frac{h^k}{k!}(iv)^k\right\} f(v)\right|\leqq 2M|v|^r|f(v)|\,.$$

Mit Hilfe dieser Betrachtung folgt auf Grund des Satzes von Lebesgue über den Grenzübergang unter dem Integralzeichen und des Lemmas von Fatou, analog wie [7, S. 399], die Abschätzung

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-R}^{R} e^{ivx}\left(1-\frac{|v|}{R+1}\right)(iv)^r f(v)\,dv \right\|_1 = O(1)\,,$$

wo O unabhängig von R ist. Wendet man einen Satz von Cramér ([15], vgl. auch [7], S. 393) auf die stetige Funktion $(iv)^r f(v)$ an, so folgt für alle v

$$(iv)^r f(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx}\,dg(x)\,,$$

wo $g(x)\in \mathrm{B.V.}(-\infty,\infty)$ ist. Nach einem Ergebnis von J. L. B. Cooper[2]) folgt hieraus die Darstellung (6.13) für fast alle x, d. h. $f^{(r-1)}(x)$ ist fast überall von beschränkter Variation auf $(-\infty,\infty)$.

Für den Fall, daß $1<p\leqq 2$ ist, wird eine Beweismethode von Butzer [7, S. 403—405] benutzt. Hiernach werden die Partialintegrale $S_\omega(x)$ durch (6.16) gegeben, nach der Parsevalschen Formel in der Gestalt (6.17) geschrieben und die Mittel $\sigma_R(x)$ von (6.18) in der Form (6.19). Nach der Jensenschen Ungleichung gilt also die Ungleichung (6.20), sowie (6.21) in der L_p-Norm. Eine Version des Cramérschen Satzes für L_p-Funktionen (siehe [7], S. 394) ergibt nun

$$(iv)^r f(v)=\mathop{\mathrm{l.i.m.}}_{\omega\to\infty}^{(q)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx}g(x)\,dx$$

für fast alle v, wo $g\in L_p(-\infty,\infty)$ ist. Hieraus folgt, wie im Beweise des Satzes 3.3 die Behauptung. Die Grenzbeziehung (6.14) folgt nach dem Satze 3.3.

---

[2]) Eine schriftliche Mitteilung, für die der Verf. dankbar ist. Der Beweis wird demnächst erscheinen; siehe [14].

Literatur

[1] Achieser, N.: Vorlesungen über Approximationstheorie. Berlin 1953, IX, 309 Seiten.
[2] Anghelutza, Th.: Sur une propriéte des polynomes. Bull. Sci. Math. (2), 63, 239—246 (1939).
[3] Bochner, S., and K. Chandrasekharan: Fourier Transforms. Princeton: 1949, 219 Seiten.
[4] Butzer, P. L.: Über den Approximationsgrad des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale. Math. Ann. 133, 410—425 (1957).
[5] Butzer, P. L.: Representation and approximation of functions by general singular integrals. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 63 (= Indag. Math. 22), 1—24 (1960).
[6] Butzer, P. L.: Sur le rôle de la transformation de Fourier dans quelques problèmes d'approximation. C. R. Acad. Sci. Paris 249, 2467—2469 (1959).
[7] Butzer, P. L.: Fourier transform methods in the theory of approximation. Arch. Rat. Mech. Anal. 5, 390—415 (1960).
[8] Butzer, P. L.: On some theorems of Hardy, Littlewood and Titchmarsh. Math. Ann. 142, 259—269 (1961).
[9] Butzer, P. L.: On Dirichlet's problem for the half-space and the behavior of its solution on the boundary. J. Math. Anal. and Appl. 2, 86—96 (1961).
[10] Butzer, P. L., and H. König: An application of Fourier-Stieltjes transforms in approximation theory. Arch. Rat. Mech. Anal. 5, 416—419 (1960).
[11] Butzer, P. L., and W. Kozakiewicz: On the Riemann derivatives for integrable functions. Canadian J. Math. 6, 572—581 (1954).
[12] Butzer, P. L., and H. G. Tillmann: Approximation theorems for semi-groups of bounded linear transformations. Math. Ann. 140, 256—262 (1960).
[13] Chaundy, Th.: The Differential Calculus. Oxford (1935), XIV, 459 S.
[14] Cooper, J. L. B.: Some problems of approximation theory (in preparation).
[15] Cramér, H.: On the representation of functions by certain Fourier integrals. Trans. Am. Math. Soc. 46, 190—201 (1939).
[16] Dunford, N., J. T. Schwartz, W. G. Bade and R. G. Bartle: Linear Operators. Part I: General Theory. New York 1958. XIV, 858 S.
[17] Feller, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. 1, (second edition) 1959. XV, 461 S.
[18] Graves, L. M.: The Theory of Functions of Real Variables. (Second edition), 1956, XII, 375 S.
[19] Kassimatis, C.: Functions which have generalized Riemann derivatives. Canadian J. Math. 10, 413—420 (1958).
[20] Ljusternik, L. A., u. W. I. Sobolew: Elemente der Funktionalanalysis. Berlin 1955, XI, 256 S.
[21] Marchaud, A.: Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variable réelles. J. de Math. (9), 6, 337—425 (1927).
[22] Reid, W. T.: Integral criteria for solutions of linear differential equations. Duke Math. J. 12, 685—694 (1945).
[23] Saks, S.: On the generalized derivatives. J. Lond. Math. Soc. 7, 247—251 (1932).
[24] Sunouchi, G., and C. Watari: On determination of the class of saturation in the theory of approximation of functions. Proc. Japan Acad. 34, No. 8, 477—481 (1958).
[25] Titchmarsh, E. C.: Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford 1937, VIII, 395 S.
[26] Tricomi, F. G.: Vorlesungen über Orthogonalreihen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955, VIII, 264 S.
[27] Valiron, G.: Cours d'Analyse Mathématiques. Théorie des Fonctions. Paris 1948, II, 522 S.
[28] Widder, D. V.: The Laplace Transform. Princeton 1941, X, 406 S.
[29] Zygmund, A.: Trigonometrical Series. Cambridge 1959 (revised edition). Vol. I, IX, 383 S., Vol. II, VII, 354 S.

(Eingegangen am 13. März 1961)

MacRobert, T. M.
Math. Annalen 144, 299—301 (1961)

Integrals involving Gegenbauer functions and E-functions

By

T. M. MacRobert in Glasgow

§ 1. Introductory

Gegenbauer's function $C_n^\nu(z)$, where $n = 0, 1, 2, \ldots$, [1, p. 50, 2, 3, 4] is the coefficient of h^n in the expansion of $(1 - 2hz + h^2)^{-\nu}$ in ascending powers of h. If ν is replaced by $m + \frac{1}{2}$ it is found [4, p. 333] that

$$C_n^{m+1/2}(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(2m+n+1)}{2^m\,\Gamma(m+\frac{1}{2})\,n!}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}m} P_{m+n}^{-m}(z), \tag{1}$$

or that

$$C_n^{m+1/2}(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(2m+n+1)}{2^m\,\Gamma(m+\frac{1}{2})\,n!}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}m} T_{m+n}^{-m}(z). \tag{2}$$

It can also be verified that [4, p. 334]

$$T_{m+n}^{-m}(z) = \frac{(-1)^n (1-z^2)^{-\frac{1}{2}m}}{2^{m+n}\,\Gamma(m+n+1)} \frac{d^n}{dz^n}\{(1-z^2)^{m+n}\}, \tag{3}$$

where, of course, n is zero or a positive integer. This is an extension of Rodrigues' formula for the Legendre coefficients.

In § 2 it will be proved that, if $n = 0, 1, 2, \ldots$, $R(l) \geqq 0$, $R(m) > -n-1$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mu^{l+n}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} T_{m+n}^{-m}(\mu)\, E(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z/\mu)\, d\mu \\
&= 2^{\Sigma\alpha_r - \Sigma\varrho_s - p + q - m - 1}\, \pi^{-\frac{1}{2}(p-q-1)} \times \\
&\times E\left(\begin{matrix} \frac{l+n+1}{2}, \frac{l+n+2}{2}, \frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_1+1}{2}, \ldots, \frac{\alpha_p+1}{2} : \frac{-z^2}{4^{p-q-1}} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}l+1, \frac{1}{2}l+m+n+\frac{3}{2}, \frac{\varrho_1}{2}, \ldots, \frac{\varrho_q+1}{2} \end{matrix}\right) - \\
&- 2^{\Sigma\alpha_r - \Sigma\varrho_s - m - 2}\, \pi^{-\frac{1}{2}(p-q-1)} \times \\
&\times z^{-1} E\left(\begin{matrix} \frac{l+n+2}{2}, \frac{l+n+3}{2}, \frac{\alpha_1+1}{2}, \frac{\alpha_1+2}{2}, \ldots, \frac{\alpha_p+2}{2} : \frac{-z^2}{4^{p-q-1}} \\ \frac{3}{2}, \frac{1}{2}l+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}l+m+n+2, \frac{\varrho_1+1}{2}, \ldots, \frac{\varrho_q+2}{2} \end{matrix}\right);
\end{aligned} \tag{4}$$

and that

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mu^{l+n}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} T_{m+n}^{-m}(\mu)\, E(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z/\mu^2)\, d\mu \\
&= 2^{-m-1} E\left(\begin{matrix} \frac{l+n+1}{2}, \frac{l+n+2}{2}, \alpha_1, \ldots, \alpha_p : z \\ \frac{1}{2}l+1, \frac{1}{2}l+m+n+\frac{3}{2}, \varrho_1, \ldots, \varrho_q \end{matrix}\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

§ 2. Proofs of the formulae

If $R(l) \geqq 0$, $R(m) > -n-1$, on substituting from (3), expanding $e^{-\mu/z}$ in powers of μ, and integrating by parts n times, it is found that

$$\int_0^1 e^{-\mu/z} \mu^{l+n}(1-\mu^2)^{1/2 m} T_{m+n}^{-m}(\mu)\, d\mu = \frac{2^{-m-n}}{\Gamma(m+n+1)} \frac{\Gamma(l+n+1)}{\Gamma(l+1)} \times$$

$$\times \int_0^1 \mu^l \left\{1 - \frac{l+n+1}{1!(l+1)} \frac{\mu}{z} + \frac{(l+n+1)(l+n+2)}{2!(l+1)(l+2)} \frac{\mu^2}{z^2} - \cdots\right\} (1-\mu^2)^{m+n}\, d\mu$$

$$= \frac{2^{-m-n-1}\Gamma(l+n+1)}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(l+1)} \mathrm{B}\left(\frac{l+1}{2}, m+n+1\right) \times$$

$$\times F\left(\begin{matrix}\frac{l+n+1}{2}, \frac{l+n+2}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}l+1, \frac{1}{2}l+m+n+\frac{3}{2}\end{matrix}; \frac{1}{4z^2}\right) -$$

$$- \frac{2^{-m-n-1}\Gamma(l+n+2)}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(l+2)} z^{-1} \mathrm{B}\left(\frac{l+2}{2}, m+n+1\right) \times$$

$$\times F\left(\begin{matrix}\frac{l+n+2}{2}, \frac{l+n+3}{2} \\ \frac{3}{2}, \frac{1}{2}l+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}l+m+n+2\end{matrix}; \frac{1}{4z^2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{m+1}} E\left(\begin{matrix}\frac{l+n+1}{2}, \frac{l+n+2}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}l+1, \frac{1}{2}l+m+n+\frac{3}{2}\end{matrix} : -4z^2\right) -$$

$$- \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{m+2}} z^{-1} E\left(\begin{matrix}\frac{l+n+2}{2}, \frac{l+n+3}{2} \\ \frac{3}{2}, \frac{1}{2}l+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}l+m+n+2\end{matrix} : -4z^2\right).$$

Now write $E(::z/\mu)$ in place of $e^{-\mu/z}$ and generalise, so obtaining formula (4).

Formula (5) can be obtained in the same way.

Numerous special cases can be deduced. For instance, on replacing z by $1/(2z)$ in (4) and (5), with $p=q=1$, $\alpha_1 = k+\frac{1}{2}$, $\varrho_1 = 2k+1$, and applying the formula [5, p. 347]

$$E\left(\begin{matrix}n+\frac{1}{2} : \frac{1}{2z} \\ 2n+1\end{matrix}\right) = \pi^{1/2}(2z)^{-n} e^{-z} I_n(z)\,, \tag{6}$$

it is seen that, if $R(l) \geqq 0$, $R(m) > -n-1$,

$$\int_0^1 e^{-z\mu} \mu^{l+n-k}(1-\mu^2)^{1/2 m} T_{m+n}^{-m}(\mu) I_k(z\mu)\, d\mu$$

$$= 2^{-m-3/2} z^k E\left(\begin{matrix}\frac{l+n+1}{2}, \frac{l+n+2}{2}, \frac{1}{2}k+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}k+\frac{3}{4} : -\frac{1}{z^2} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}l+1, \frac{1}{2}l+m+n+\frac{3}{2}, k+\frac{1}{2}, k+1\end{matrix}\right) - \tag{7}$$

$$- 2^{-m-5/2} z^{k+1} E\left(\begin{matrix}\frac{l+n+2}{2}, \frac{l+n+3}{2}, \frac{1}{2}k+\frac{3}{4}, \frac{1}{2}k+\frac{5}{4} : -\frac{1}{z^2} \\ \frac{3}{2}, \frac{1}{2}l+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}l+m+n+2, k+1, k+\frac{3}{2}\end{matrix}\right),$$

and that

$$\int_0^1 e^{-z\mu^2} \mu^{l+n-2k} (1-\mu^2)^{1/2 m}\, T_{m+n}^{-m}(\mu)\, I_k(z\mu^2)\, d\mu \tag{8}$$
$$= \pi^{-1/2}\, 2^{k-m-1} z^k\, E\left(\begin{matrix} \dfrac{l+n+1}{2}, \dfrac{l+n+2}{2}, k+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} l + 1, \frac{1}{2} l + m + n + \frac{3}{2}, 2k+1 \end{matrix} : \frac{1}{2z}\right).$$

References

[1] Watson, G. N.: Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1922.
[2] MacRobert, T. M.: Phil. Mag., series 7, 21, 698 (1936).
[3] MacRobert, T. M.: Quart. J. Math. 14, 1—4 (1943).
[4] MacRobert, T. M.: Spherical Harmonics, 2nd edition, London, 1947, pp. 332—336.
[5] MacRobert, T. M.: Functions of a complex variable, 4th edition, London, 1954.

(Received March 25, 1961)

KUNLE, H.
Math. Annalen 144, 302—322 (1961)

Zur projektiven Kinematik der Kurven des n-dimensionalen projektiven Raumes. II

Von

HEINZ KUNLE in Freiburg i. Br.

In einer vorangehenden Note[1]) haben wir gezeigt, daß man jeder Parameterverteilung auf einer Kurve $\mathfrak{x}(t)$ des n-dimensionalen projektiven Raumes P_n für jedes r ($r = 0, 1, \ldots, n$) eine projektive Bewegung *(Harmonikal-Bewegung)* $\mathfrak{B}_r$ zuordnen kann. $\mathfrak{B}_r$ ist dabei eine eingliedrige Schar von Projektivitäten, durch die die Schmiegräume S_r längs der Kurve vermöge der *Bahnkurven* dieser Schar projektiv aufeinander abgebildet werden. Eine solche Harmonikal-Bewegung kann in naheliegender Weise definiert werden, sobald die mit der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ invariant verknüpften und den jeweiligen S_r aufspannenden Normkurven r-ter Ordnung *(Harmonikal-C_r)* längs $\mathfrak{x}(t)$ projektiv aufeinander bezogen sind. Dies wiederum geschieht durch gewisse erstmals von G. BOL [1] eingeführte Kurvenscharen *(Harmonikal-Scharen)*.

Parameterverteilungen auf der Kurve $\mathfrak{x}(t)$, die durch gebrochen-lineare, also projektive Transformation auseinander hervorgehen, führen dabei auf die gleichen Harmonikal-Bewegungen $\mathfrak{B}_r$ und sollen daher zur gleichen *Klasse projektiv-äquivalenter Parameter* gehörig betrachtet werden. Diesen Klassen entsprechen dann die Harmonikal-Bewegungen umkehrbar eindeutig.

Während in (I) vor allem Eigenschaften der Harmonikal-Bewegungen $\mathfrak{B}_n$ studiert wurden, sollen in diesem Teil (II) nun auch die Harmonikal-Bewegungen $\mathfrak{B}_r$ mit $r < n$ betrachtet werden. Eine wichtige Rolle spielen dabei (Abschnitt 1) die Fokaleigenschaften der lokalen Bahntangentenkongruenzen von $\mathfrak{B}_r$, das sind Geradenmannigfaltigkeiten, die aus den Tangenten an die Bahnkurven in Punkten eines Schmiegraums S_r bestehen. Bei der Untersuchung der Lage der Brennpunkte auf einer solchen Geraden wird man auf eine analoge Einteilung der Kurven des P_n geführt wie sie sich in (I) bei der ganz anders gearteten Frage ergeben hatte, wann $\mathfrak{B}_n$ Zentralbewegung ist.

In Abschnitt 2 wird die gegenseitige Lage der Bahntangenten durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ untersucht, die sich für verschiedene Harmonikal-Bewegungen $\mathfrak{B}_r$ ($r = 0, \ldots, n$) ergeben. $\mathfrak{B}_r$ und die Bahnkurven hängen ja noch von der Dimensionszahl r, aber auch von der gewählten Parameterklasse ab. Bei dieser Diskussion der gegenseitigen Berührung von Bahnkurven tritt an jeder Kurvenstelle t_0 eine *lokale Harmonikal-Bewegung* $\mathfrak{L}(t_0)$ mit Gruppeneigenschaft auf,

[1]) Vgl. [4]. Hinweise auf diesen ersten Teil sind im folgenden durch (I) gekennzeichnet. Dabei bedeutet etwa (I.2.3) den Abschnitt 2.3, dagegen (I.2.3) die Gleichung (2.3) in (I).

deren Bahnkurven wiederum bemerkenswerte Berühreigenschaften mit den Bahnkurven von $\mathfrak{B}_n$ aufweisen.

Schließlich folgen in 3 noch einige Bemerkungen über die Existenz von Asymptotenlinien und Quasi-Asymptotenlinien auf den *Harmonikal-Flächen*, die von den Harmonikal-C_r längs der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ erzeugt werden. Insbesondere sind die Harmonikal-C_n genau dann auf der von ihnen erzeugten Fläche Asymptotenlinien, wenn die Ausgangskurve $\mathfrak{x}(t)$ eine verallgemeinerte Koinzidenzkurve ist (Verallgemeinerung eines Resultats von G. Bol [1] für den P_3).

1. Fokaleigenschaften der lokalen Bahntangentenkongruenzen von $\mathfrak{B}_r$

1.1. Wir beginnen mit der Zusammenstellung einiger Formeln aus (I). Wir ordnen nach G. Bol [2] einer Kurve $\mathfrak{x}(t)$ des n-dimensionalen projektiven Raumes P_n an jeder Kurvenstelle ein Begleitsimplex $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ zu, so daß *Ableitungsgleichungen* der Gestalt

$$\mathfrak{x}_r' = \mathfrak{x}_{r+1} + \sum_{\mu=1}^{r} b_{r\mu}\mathfrak{x}_{r-\mu}; \quad \mathfrak{x}_{n+1} = 0; \qquad r = 0, \ldots, n \tag{1.1}$$

mit der oft gebrauchten Abkürzung

$$b_{r\mu} = a_{r\mu} e_\mu \tag{1.2}$$

gelten. Die Konstanten $a_{r\mu}$ sind in (I.2.4) definiert, die Funktionen $e_\mu(t)$ sind die *Kurveninvarianten*; dabei setzt man noch zweckmäßig

$$e_0 = 0, \quad e_{n+1} = 1\,. \tag{1.3}$$

Die ganze Zahl h erklären wir durch

$$e_0 = e_1 = \cdots = e_h = 0, \quad e_{h+1} \neq 0; \qquad 0 \leqq h \leqq n\,. \tag{1.4}$$

e_{h+1} sei also die erste (an einer Stelle t oder längs der Kurve) nichtverschwindende Invariante.

Bei einer Parametertransformation *(Sterntransformation)*

$$t = f(t^*), \quad \frac{dt^*}{dt} = \varphi, \quad \frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi} = A \tag{1.5}$$

ändern sich die in den Ableitungsgleichungen (1.1) vorkommenden Größen gemäß

$$\mathfrak{x}_r^* = \varphi^{\frac{n}{2}-r}\,\bar{\mathfrak{x}}_r, \quad \bar{\mathfrak{x}}_r = \sum_{\mu=0}^{r} a_{r\mu}\frac{A^\mu}{\mu!}\mathfrak{x}_{r-\mu}; \qquad r = 0, \ldots, n\,, \tag{1.6}$$

$$e_1^* = \varphi^{-2}(e_1 + A' - A^2), \quad e_\mu^* = \varphi^{-\mu-1} e_\mu; \qquad \mu = 2, \ldots, n\,. \tag{1.7}$$

$\bar{\mathfrak{x}}_r$ in (1.6) durchläuft in Abhängigkeit von A die *Harmonikal-C_r* (H-C_r). (1.7) zeigt, daß $e_2, \ldots, e_n$ *Halbinvarianten* sind, deren Verschwinden geometrische Bedeutung hat.

Ist nun g eine beliebige Halbinvariante vom Gewicht 2, $g^* = \varphi^{-2} g$, so genügen alle Parameterverteilungen t^*, für die die erste Invariante $e_1^* = g^*$ ist, nach (1.7) der Riccatischen Differentialgleichung

$$A' - A^2 + e_1 = g\,. \tag{1.8}$$

Die Schar der Lösungskurven $A = A(t)$ von (1.8), gedeutet in einer (t, A)-Grundebene oder auf einer von den H-C_r längs der Kurve erzeugten *H-Fläche*, heißt *Harmonikal-Schar (H-Schar)*. Ihr entspricht nach (1.5) eine der in der Einleitung genannten Klassen projektiv-äquivalenter Parameterverteilungen, die also durch die Halbinvariante g festgelegt ist und daher mit $\{g\}$ bezeichnet sei.

Zu einer Klasse $\{g\}$ gehört nach (I.2.3) für jedes r $(r = 0, \ldots, n)$ genau eine *Harmonikal-Bewegung (H-Bewegung)* $\mathfrak{B}_r$, die die Schmiegräume S_r projektiv aufeinander bezieht. Durch einen Punkt

$$(1.9) \qquad \mathfrak{p} = \sum_{\mu=0}^{r} p_\mu \mathfrak{x}_\mu$$

des S_r an der Stelle t verläuft also eine wohldefinierte Bahnkurve von $\mathfrak{B}_r$, deren Tangente in $\mathfrak{p}$ *(Bahntangente)* nach (I.2.30) durch den Punkt

$$(1.10) \qquad \mathfrak{p}' = \sum_{\mu=0}^{r} \sum_{\nu=\mu}^{r} p_\nu b_{\nu,\nu-\mu} \mathfrak{x}_\mu + \begin{cases} \sum_{\mu=0}^{r+1} N_\mu p_{\mu-1} \mathfrak{x}_\mu & \text{für } r < n, \\ 0 & \text{für } r = n \end{cases}$$

geht. Hierin ist zur Abkürzung

$$(1.11) \qquad N_\mu = \frac{n-r}{n-\mu+1}$$

und weiter $p_{-1} = 0$ gesetzt.

Die Formel (1.10) gilt auf Grund ihrer Herleitung unter der (die Allgemeinheit nicht beschränkenden) Annahme, daß der zugrunde gelegte Kurvenparameter t bereits der betrachteten Klasse $\{g\}$ angehört und also selbst schon die zu untersuchende H-Bewegung $\mathfrak{B}_r$ induziert. Es gilt also $e_1 = g$, und die Klasse ist durch $\{g\} = \{e_1\}$ gekennzeichnet.

1.2. *Für diesen Abschnitt* 1 *sei nun weiterhin* $r < n$ *vorausgesetzt.* Dann ist die Bahntangente $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ für jeden Punkt $\mathfrak{p} \in S_r$ wohlbestimmt, denn nach (I.3.3) besitzt $\mathfrak{B}_r$ für $r < n$ keine momentanen Fixpunkte.

Da nach (1.10) $\mathfrak{p}'$ in S_{r+1} liegt, gilt das auch für die Bahntangente $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, so daß also mit $\mathfrak{B}_r$ an jeder Stelle t der Kurve eine r-parametrige Gesamtheit von Geraden eines $(r+1)$-dimensionalen Raumes verknüpft ist. Wir sprechen von der *lokalen r-Kongruenz der Bahntangenten von* $\mathfrak{B}_r$.

Nun gibt es auf jedem Strahl einer solchen Kongruenz r *Brennpunkte*[2]); diese erzeugen r Brennhyperflächen im $(r+1)$-dimensionalen Einbettungsraum S_{r+1}, die von jedem Kongruenzstrahl berührt werden. Wir wollen diese Brennpunkte für unsere r-Kongruenz bestimmen.

Wir sehen in (1.9), (1.10) die Größen p_μ als Funktionen eines Parameters τ, alle anderen Größen als konstant an und drücken Ableitung nach τ durch den Operator δ aus. Für einen Brennpunkt $\mathfrak{p}' + \lambda\mathfrak{p}$ auf dem Strahl $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ ist dann kennzeichnend, daß

$$(1.12) \qquad \delta(\mathfrak{p}' + \lambda\mathfrak{p}) \equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, \mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$$

[2]) Vgl. Enz. Math. Wiss. III C 7 S. 964.

oder auch

(1.13) $$\delta\mathfrak{p}' + \lambda\,\delta\mathfrak{p} = 0 \pmod{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}.$$

Aus (1.9) und (1.10) berechnet man

(1.14) $$\delta\mathfrak{p}' + \lambda\,\delta\mathfrak{p} = \sum_{\mu=0}^{r+1}\left\{N_\mu\,\delta p_{\mu-1} + \lambda\,\delta p_\mu + \sum_{\nu=\mu+1}^{r} \delta p_\nu b_{\nu,\nu-\mu}\right\}\mathfrak{x}_\mu,$$

wobei

(1.15) $$p_{-1} = \delta p_{-1} = p_{r+1} = \delta p_{r+1} = 0$$

zu setzen ist.

Andererseits ist

(1.16) $$\alpha\mathfrak{p}' + \beta\mathfrak{p} = \sum_{\mu=0}^{r+1}\left\{N_\mu\alpha p_{\mu-1} + \beta p_\mu + \sum_{\nu=\mu+1}^{r}\alpha p_\nu b_{\nu,\nu-\mu}\right\}\mathfrak{x}_\mu.$$

Vergleicht man in (1.14) und (1.16) die Koeffizienten, so erhält man nach leichter Umrechnung

(1.17) $$N_\mu q_{\mu-1} + \lambda q_\mu + \sum_{\nu=\mu+1}^{r} b_{\nu,\nu-\mu}q_\nu + p_\mu(\lambda\alpha - \beta) = 0;\quad \mu = 0, \ldots, r+1.$$

Dabei bedeutet

(1.18) $$q_\mu = \delta p_\mu - \alpha p_\mu;\quad q_{-1} = q_{r+1} = 0.$$

Das homogene lineare System (1.17) mit $r+2$ Gleichungen für die $r+2$ Größen $q_0, \ldots, q_r$, $\lambda\alpha - \beta$ soll natürlich nichttrivial lösbar sein, da für $q_0 = \cdots = q_r = 0$

(1.19) $$\delta\mathfrak{p} = \alpha\mathfrak{p}$$

folgen würde, so daß der Strahl $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ fest wäre.

Daher verschwindet die Determinante von (1.17):

(1.20) $$\begin{vmatrix} \lambda & b_{11} & b_{22} & \cdots & b_{rr} & p_0 \\ N_1 & \lambda & b_{21} & \cdots & b_{r,r-1} & p_1 \\ & N_2 & \lambda & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & N_r & \lambda & p_r \\ 0 & & & & N_{r+1} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sämtliche Elemente unterhalb der ersten unteren Paradiagonale sind dabei Null. Entwickelt man nach der letzten Zeile, so folgt als *Bestimmungsgleichung für die Brennpunkte* schließlich

(1.21) $$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & b_{11} & b_{22} & \cdots & b_{r-1,r-1} & p_0 \\ N_1 & \lambda & b_{21} & \cdots & b_{r-1,r-2} & p_1 \\ & N_2 & \lambda & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & N_{r-1} & \lambda & p_{r-1} \\ 0 & & & & N_r & p_r \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist im allgemeinen vom Grade r in λ und liefert also r Brennpunkte auf jedem Strahl.

1.3. Aus (1.21) ergibt sich

$$\Delta = p_r \lambda^r - N_r p_{r-1} \lambda^{r-1} + \cdots = 0 . \tag{1.22}$$

Ist $p_r = 0$, so reduziert sich die Ordnung der Gleichung um Eins. Liegt also $\mathfrak{p}$ in S_{r-1}, so fällt (mindestens) ein Brennpunkt des Strahls mit $\mathfrak{p}$ zusammen.

Allgemeiner läßt sich zeigen: *Liegt* $\mathfrak{p}$ *in* $S_{r-\varrho}$ $(0 \leqq \varrho \leqq r)$, *so fallen (mindestens)* ϱ *Brennpunkte des Strahls mit* $\mathfrak{p}$ *zusammen.*

Setzt man nämlich $p_r = \cdots = p_{r-\varrho+1} = 0$ in (1.21) ein und entwickelt mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes nach den ϱ letzten Zeilen, so kommt für Δ bis auf einen konstanten Faktor

$$\begin{vmatrix} \lambda & \cdots & \cdots & \cdots & p_0 \\ N_1 & \lambda & \cdots & \cdots & p_1 \\ & N_2 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \lambda & p_{r-\varrho-1} \\ 0 & & & N_{r-\varrho} & p_{r-\varrho} \end{vmatrix} = p_{r-\varrho} \lambda^{r-\varrho} + \cdots = 0 . \tag{1.23}$$

In der Tat hat sich also die Ordnung der Gleichung um ϱ reduziert, wie behauptet war.

Unser Satz ist auch umkehrbar: *Fallen* ϱ *Brennpunkte des Strahls mit* $\mathfrak{p}$ *zusammen, so liegt* $\mathfrak{p}$ *in* $S_{r-\varrho}$ $(0 \leqq \varrho \leqq r)$.

Der Satz ist klar für $\varrho = 0$. Er sei schon bewiesen für ϱ, $0 \leqq \varrho < r$. Wenn nun $\varrho + 1$ Brennpunkte nach $\mathfrak{p}$ fallen, so liegt $\mathfrak{p}$ jedenfalls in $S_{r-\varrho}$, so daß $p_r = \cdots = p_{r-\varrho+1} = 0$. (1.21) geht also über in (1.23). Da sich aber die Ordnung auf $r - \varrho - 1$ reduzieren soll, folgt $p_{r-\varrho} = 0$, und $\mathfrak{p}$ liegt wirklich in $S_{r-\varrho-1}$.

Insbesondere fallen also genau für $\mathfrak{p} = \mathfrak{x}_0$, d. h. für die durch den Kurvenpunkt $\mathfrak{x}$ gehende Bahnkurve, alle r Brennpunkte des Strahls mit $\mathfrak{p}$ zusammen.

1.4. Um weitergehende Aussagen über die Brennpunktseigenschaften unserer r-Kongruenz zu gewinnen, ist es zweckmäßig, für die Determinante Δ in (1.21) einen geeigneten analytischen Ausdruck anzugeben.

Für das Folgende wird es genügen, $p_r \neq 0$ vorauszusetzen. Wir setzen

$$p_r = 1 \tag{1.24}$$

und weiter

$$D_r = 1 . \tag{1.25}$$

Wir vereinfachen nun Δ, indem wir von der vorletzten Spalte das N_r-fache der letzten subtrahieren, und erhalten

$$\Delta = D_r^{-1} \begin{vmatrix} \lambda & b_{11} & \cdots & \bar{b}_{r-1,r-1} & p_0 \\ N_1 & \lambda & \cdots & \bar{b}_{r-1,r-2} & p_1 \\ & N_2 & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & N_{r-1} & D_{r-1} & p_{r-1} \\ 0 & & & 0 & D_r \end{vmatrix} . \tag{1.26}$$

Hier ist

$$D_{r-1} = D_r\lambda - N_r p_{r-1}, \tag{1.27}$$

$$\bar{b}_{r-1,\varkappa} = D_r b_{r-1,\varkappa} - N_r p_{r-\varkappa-1}, \qquad \varkappa = 1, \ldots, r-1\,. \tag{1.27'}$$

Auf die entsprechende Weise bringt man nach und nach alle unterhalb der Hauptdiagonale stehenden Glieder zum Verschwinden. Sei etwa schon erreicht, daß

$$\Delta = D_r^{-1} \ldots D_{\varrho+1}^{-1} \begin{vmatrix} \lambda & b_{11} & \cdots & b_{\varrho-1,\varrho-1} & \bar{b}_{\varrho\varrho} & \cdots & \cdots \\ N_1 & \lambda & \cdots & b_{\varrho-1,\varrho-2} & \bar{b}_{\varrho,\varrho-1} & \cdots & \cdots \\ & N_2 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & \lambda & \bar{b}_{\varrho 1} & & \vdots \\ & & & N_\varrho & D_\varrho & & \vdots \\ & & & & 0 & D_{\varrho+1} & \vdots \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 & D_r \end{vmatrix} \tag{1.28}$$

mit

$$\begin{aligned} D_\varrho &= D_{\varrho+1}\lambda + (-1)^{r-\varrho} N_{\varrho+1} \ldots N_r p_\varrho - \\ &\quad - \sum_{\sigma=0}^{r-\varrho-2} (-1)^\sigma N_{\varrho+1} \ldots N_{\varrho+\sigma+1} b_{\varrho+\sigma+1,\sigma+1} D_{\varrho+\sigma+2}\,, \end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_{\varrho\varkappa} &= D_{\varrho+1} b_{\varrho\varkappa} + (-1)^{r-\varrho} N_{\varrho+1} \ldots N_r p_{\varrho-\varkappa} - \\ &\quad - \sum_{\sigma=0}^{r-\varrho-2} (-1)^\sigma N_{\varrho+1} \ldots N_{\varrho+\sigma+1} b_{\varrho+\sigma+1,\varkappa+\sigma+1} D_{\varrho+\sigma+2}\,, \end{aligned} \tag{1.29'}$$

$$(0 < \varrho \leqq r-1, \varkappa = 1, \ldots, \varrho)\,.$$

Dann zeigt man durch einen weiteren Schritt, daß die Ausdrücke (1.28), (1.29), (1.29′) auch für $\varrho - 1$, also schließlich auch für $\varrho = 0$ richtig sind. Für $\varrho = r - 1$ stimmen sie ja mit (1.26), (1.27), (1.27′) überein.

Hat man alle Glieder unter der Hauptdiagonale beseitigt, so ergibt sich für $\varrho = 0$

$$\Delta = D_r^{-1} \ldots D_1^{-1} \begin{vmatrix} D_0 & \cdots & \cdots \\ & D_1 & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & D_r \end{vmatrix} = D_0\,. \tag{1.30}$$

Wir bemerken noch, daß nach (1.25), (1.27), (1.29) D_ϱ ein Polynom in λ vom Grade $r - \varrho$ ist; der Koeffizient von $\lambda^{r-\varrho}$ ist $= 1$.

1.5. Unsere Gleichung $\Delta = 0$ für die r Brennpunkte auf jedem Kongruenzstrahl wird besonders übersichtlich, wenn

$$e_0 = e_1 = \cdots = e_{r-1} = 0\,. \tag{1.31}$$

Dann verschwindet nämlich die Summe auf der rechten Seite von (1.29) für alle $\varrho = 0, \ldots, r-1$. Multipliziert man (1.29) mit λ^ϱ und summiert über ϱ,

so erhält man jetzt

$$\Delta = D_0 = \lambda^r + \sum_{\varrho=0}^{r-1} (-1)^{r-\varrho} N_{\varrho+1} \dots N_r p_\varrho \lambda^\varrho . \tag{1.32}$$

Diese Gestalt von Δ legt nun folgende Frage nahe: Gibt es, falls (1.31) gilt, Punkte $\mathfrak{p}$ in S_r, auf deren zugehörigem Kongruenzstrahl sämtliche r Brennpunkte zusammenfallen? Dazu ist notwendig und hinreichend, daß (1.32) die r-te Potenz eines linearen Polynoms $\lambda - \lambda_0$ wird.

Wir schreiben (1.32) unter Beachtung von (1.11) etwas um:

$$\Delta = \lambda^r + \sum_{\varrho=0}^{r-1} (-1)^{r+\varrho} \binom{r}{\varrho} \lambda^\varrho \left\{ \frac{(r-\varrho)!}{a_{r,r-\varrho}} (n-r)^{r-\varrho} p_\varrho \right\} . \tag{1.33}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist also gleich $\lambda_0^{r-\varrho}$ zu setzen, woraus sich die p_ϱ berechnen lassen:

$$p_\varrho = \frac{a_{r,r-\varrho}}{(r-\varrho)!} \left(\frac{\lambda_0}{n-r} \right)^{r-\varrho} ; \qquad \varrho = 0, \dots, r. \tag{1.34}$$

Setzt man noch

$$A = \frac{\lambda_0}{n-r} \tag{1.35}$$

und vergleicht mit (1.6), so sieht man, daß (1.34) die Parameterdarstellung der H-C_r ist. Damit haben wir:

Wenn $e_0 = e_1 = \dots = e_{r-1} = 0$ ist, so haben genau die Punkte der H-C_r die Eigenschaft, daß auf den zu ihnen gehörigen Bahntangenten von $\mathfrak{B}_r$ die r Brennpunkte der lokalen r-Kongruenz sämtlich zusammenfallen.

Es gilt aber auch die Umkehrung:

Fallen auf den Strahlen der lokalen r-Kongruenz von $\mathfrak{B}_r$, die von der H-C_r ausgehen, alle r Brennpunkte zusammen, so ist $e_0 = e_1 = \dots = e_{r-1} = 0$.

Zum Beweis setzen wir die Parameterdarstellung (1.34) der H-C_r in (1.29) ein und erhalten

$$\begin{aligned} D_\varrho = \lambda D_{\varrho+1} + (-1)^{r-\varrho} \binom{r}{\varrho} \lambda_0^{r-\varrho} - \\ - \sum_{\sigma=0}^{r-\varrho-2} (-1)^\sigma N_{\varrho+1} \dots N_{\varrho+\sigma+1} b_{\varrho+\sigma+1,\sigma+1} D_{\varrho+\sigma+2} . \end{aligned} \tag{1.36}$$

Wie früher multiplizieren wir (1.36) mit λ^ϱ und summieren über ϱ:

$$D_0 = (\lambda - \lambda_0)^r - \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sum_{\sigma=0}^{r-\varrho-2} (-1)^\sigma N_{\varrho+1} \dots N_{\varrho+\sigma+1} b_{\varrho+\sigma+1,\sigma+1} D_{\varrho+\sigma+2} \lambda^\varrho . \tag{1.37}$$

Da alle Brennpunkte zusammenfallen, ist D_0 r-te Potenz eines linearen Polynoms; da weiter in der Doppelsumme λ höchstens in der $(r-2)$-ten Potenz auftritt[3]), ist dieses lineare Polynom gleich $\lambda - \lambda_0$, und die Doppelsumme muß identisch in λ verschwinden.

[3]) Man beachte die Bemerkung am Ende von 1.4.

$e_0 = 0$ gilt nach Definition. Sei schon gezeigt, daß $e_0 = \cdots = e_\varkappa = 0$ für $0 \leqq \varkappa < r - 1$. Die Doppelsumme in (1.37) schreibt sich dann

$$\sum_{\varrho=0}^{r-\varkappa-2} \sum_{\sigma=\varkappa}^{r-\varrho-2} (-1)^\sigma N_{\varrho+1} \cdots N_{\varrho+\sigma+1} b_{\varrho+\sigma+1,\sigma+1} D_{\varrho+\sigma+2} \lambda^\varrho . \tag{1.38}$$

Hierin tritt als höchste Potenz $\lambda^{r-\varkappa-2}$ mit dem Koeffizienten[3])

$$\begin{aligned} &\sum_{\varrho=0}^{r-\varkappa-2} (-1)^\varkappa N_{\varrho+1} \cdots N_{\varrho+\varkappa+1} b_{\varrho+\varkappa+1,\varkappa+1} \\ &= e_{\varkappa+1}(-1)^\varkappa (n-r)^{\varkappa+1} \sum_{\varrho=0}^{r-\varkappa-2} \frac{(\varrho+\varkappa+1)!}{\varrho!} \end{aligned} \tag{1.39}$$

auf. Da der Faktor von $e_{\varkappa+1}$ offensichtlich von Null verschieden ist, muß also $e_{\varkappa+1}$ verschwinden, wie zu zeigen war. Das Verfahren bricht nach $e_{r-1} = 0$ ab.

Auf jedem Strahl der r-Kongruenz, der von der H-C_r ausgeht, gibt es also einen ausgezeichneten Punkt, wenn (1.31) gilt. Wir wollen die von diesen Punkten erzeugte Kurve des S_{r+1} als *r-te Fokalkurve* bezeichnen und sie aufsuchen.

Zunächst ergibt sich bei Berücksichtigung von (1.34), (1.35) für (1.9)

$$\mathfrak{p} = \sum_{\mu=0}^{r} a_{r,r-\mu} \frac{A^{r-\mu}}{(r-\mu)!} \mathfrak{x}_\mu = \bar{\mathfrak{x}}_r \tag{1.40}$$

und für (1.10)

$$\mathfrak{p}' = \sum_{\mu=0}^{r+1} N_\mu a_{r,r-\mu+1} \frac{A^{r-\mu+1}}{(r-\mu+1)!} \mathfrak{x}_\mu + a_{rr} e_r \mathfrak{x}_0 . \tag{1.41}$$

Daher erhält man als Fokalkurve mit $\lambda = \lambda_0 = (n-r)A$

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}' + \lambda \mathfrak{p} &= a_{rr} e_r \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_{r+1} + \\ &\quad + \sum_{\mu=0}^{r} \{N_\mu a_{r,r-\mu+1} + (n-r)\,(r-\mu+1) a_{r,r-\mu}\} \frac{A^{r-\mu+1}}{(r-\mu+1)!} \mathfrak{x}_\mu \\ &= a_{rr} e_r \mathfrak{x}_0 + \sum_{\mu=0}^{r+1} a_{r+1,r-\mu+1} \frac{A^{r-\mu+1}}{(r-\mu+1)!} \mathfrak{x}_\mu \\ &= a_{rr} e_r \mathfrak{x}_0 + \bar{\mathfrak{x}}_{r+1}, \end{aligned} \tag{1.42}$$

weil der zweite Bestandteil rechts nach (1.6) die Parameterdarstellung der H-C_{r+1} ist.

Die r-te Fokalkurve ist eine Normkurve $(r+1)$-ter Ordnung und liegt auf dem Kegel, der die H-C_{r+1} aus dem Kurvenpunkt projiziert.

(1.42) läßt weiter erkennen: *Die r-te Fokalkurve fällt sogar mit der H-C_{r+1} zusammen, wenn*

$$e_0 = e_1 = \cdots = e_r = 0 . \tag{1.43}$$

Differenziert man (1.6) partiell nach A, so folgt

$$\bar{\mathfrak{x}}_{rA} = a_r \bar{\mathfrak{x}}_{r-1}; \quad a_r = a_{r1} = r(n-r+1); \qquad r = 0, \ldots, n . \tag{1.44}$$

Daher sind die Geraden $(\bar{\mathfrak{x}}_r, \bar{\mathfrak{x}}_{r+1})$ Tangenten der H-C_{r+1}. Das bedeutet in unserem Falle:

Gilt (1.43), *so hüllen an der Stelle t die von den Punkten der H-C_r ausgehenden Bahntangenten von $\mathfrak{B}_r$ die H-C_{r+1} ein.*

Erinnern wir uns an die in (1.4) getroffene Festsetzung bezüglich h, so können wir unsere Ergebnisse auch so formulieren:

Für die H-Bewegungen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{h+1}$ ist die jeweils entsprechende H-$C_1, C_2, \ldots, C_{h+1}$ Ort der Punkte, auf deren Bahntangenten sämtliche Brennpunkte zusammenfallen. Für $\mathfrak{B}_{h+2}$ gilt der Satz nicht mehr; für $\mathfrak{B}_1$ ist er trivial, da es nur einen Brennpunkt gibt.

Weiter gilt: *Für $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_h$ fällt die jeweilige Fokalkurve sogar mit der H-$C_2, \ldots, C_{h+1}$ zusammen.*

Nichttriviale Fälle treten nur für $h \geqq 1$ auf, wenn also $e_1 = 0$, d. h. falls die zu $\mathfrak{B}_r$ gehörige Halbinvariante g eine Nullstelle hat oder falls sogar die Nullklasse $\{0\}$ vorliegt. Gelten die Sätze noch für $h > 1$, so liegen darin geometrische Kennzeichnungen der Kurvenklassen, die durch das Verschwinden der Halbinvarianten $e_2, \ldots, e_h$ charakterisiert sind[4]).

Wir weisen noch, ohne sie explizit zu formulieren, auf die dualen Ergebnisse hin, die man entsprechend gewinnt, wenn man die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ als Erzeugnis ihrer Schmieghyperebenen auffaßt[5]).

1.6. Wir besprechen nun noch die einfachsten Spezialfälle $r = 1$ und $r = 2$.

Für $r = 1$, also bei der H-Bewegung $\mathfrak{B}_1$, besteht unsere 1-Kongruenz aus den Bahntangenten längs der Tangente S_1 an einer Stelle t. Es handelt sich um eine Geradenschar in S_2 mit der Einhüllenden (der Fokalkurve) (1.42), also

$$\bar{\mathfrak{x}}_2 + n e_1 \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}_2 + 2(n-1) A \mathfrak{x}_1 + [n(n-1)A^2 + n e_1]\mathfrak{x}_0 . \tag{1.45}$$

In lokalen Koordinaten p_0, p_1, p_2 bezüglich $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ ist das der Kegelschnitt mit der Gleichung

$$n p_1^2 - 4(n-1) p_0 p_2 + 4n(n-1) e_1 p_2^2 = 0 . \tag{1.46}$$

Da der H-Kegelschnitt nach (1.6) die Gleichung

$$n p_1^2 - 4(n-1) p_0 p_2 = 0 \tag{1.47}$$

hat, so gilt:

Für $\mathfrak{B}_1$ ist die Fokalkurve ein Kegelschnitt, der im Büschel des H-Kegelschnitts und der doppeltzählenden Kurventangente enthalten ist. Sie fällt genau dann mit dem H-Kegelschnitt zusammen, wenn an der betrachteten Stelle die zu $\mathfrak{B}_1$ gehörende Halbinvariante g eine Nullstelle hat[6]).

1.7. Für $r = 2$ $(n \geqq 3)$ haben wir an jeder Kurvenstelle t eine Geradenkongruenz in S_3 im gewöhnlichen Sinne. In lokalen Koordinaten bezüglich $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ ist

$$\mathfrak{p} = \{p_0, p_1, p_2, 0\} , \tag{1.48}$$

$$\mathfrak{p}' = \left\{n e_1 p_1 + 2n(n-1) e_2 p_2, \frac{n-2}{n} p_0 + 2(n-1) e_1 p_2, \frac{n-2}{n-1} p_1, p_2\right\}, \tag{1.49}$$

---

[4]) Man vgl. hierzu (I.3) und (I.4).

[5]) Man vgl. (I.2.2).

[6]) Dieses Ergebnis hat für $n = 2$ G. BOL angegeben (mündliche Mitteilung).

so daß sich die vermöge

$$(1.50)\qquad g_{01}(\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1) + g_{02}(\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_2) + g_{03}(\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_3) + g_{23}(\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3) + g_{31}(\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1) + g_{12}(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2)$$

definierten Plückerschen Geradenkoordinaten g_{ik} des Kongruenzstrahls $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ wie folgt berechnen:

$$(1.51)\qquad \begin{aligned} g_{01} &= \frac{n-2}{n} p_0^2 + 2(n-1)e_1 p_0 p_2 - n e_1 p_1^2 - 2n(n-1)e_2 p_1 p_2 \\ g_{02} &= \frac{n-2}{n-1} p_0 p_1 - n e_1 p_1 p_2 - 2n(n-1)e_2 p_2^2 \\ g_{03} &= p_0 p_2 \\ g_{23} &= p_2^2 \\ g_{31} &= -p_1 p_2 \\ g_{12} &= \frac{n-2}{n-1} p_1^2 - \frac{n-2}{n} p_0 p_2 - 2(n-1) e_1 p_2^2 . \end{aligned}$$

Wie man leicht bestätigt, genügen diese g_{ik} den beiden quadratischen Gleichungen

$$(1.52)\qquad \begin{aligned} &g_{23}g_{12} + \frac{n-2}{n} g_{03}g_{23} - \frac{n-2}{n-1} g_{31}^2 + 2(n-1)e_1 g_{23}^2 = 0 , \\ &g_{02}g_{23} + \frac{n-2}{n-1} g_{03}g_{31} - n e_1 g_{23}g_{31} + 2n(n-1)e_2 g_{23}^2 = 0 . \end{aligned}$$

Unsere lokale 2-Kongruenz von $\mathfrak{B}_2$ ist also der Durchschnitt zweier quadratischer Komplexe[7]).

Wie man aus (1.52) abliest, gehört die Gerade $(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3)$ und damit jede Tangente der H-C_3 der Kongruenz an, wenn $e_1 = e_2 = 0$. Das ist nichts anderes als der schon in 1.5 allgemein erörterte Sachverhalt, daß jetzt die H-C_3 Fokalkurve ist.

Die Gleichung (1.21) für die Brennpunkte eines Strahls nimmt für $r = 2$ die Gestalt an

$$(1.53)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda & b_{11} & p_0 \\ N_1 & \lambda & p_1 \\ 0 & N_2 & p_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 p_2 - \lambda \frac{n-2}{n-1} p_1 + \frac{(n-2)^2}{n(n-1)} p_0 - (n-2)e_1 p_2 = 0 .$$

Die beiden Wurzeln von (1.53) fallen genau dann zusammen, wenn

$$(1.54)\qquad n p_1^2 - 4(n-1) p_0 p_2 + \frac{4n(n-1)^2}{n-2} e_1 p_2^2 = 0 .$$

Die Punkte $\mathfrak{p} \in S_2$, auf deren Bahntangenten bezüglich $\mathfrak{B}_2$ die beiden Brennpunkte zusammenfallen, liegen auf dem Kegelschnitt (1.54), *der dem Büschel des H-Kegelschnitts und der doppeltzählenden Kurventangente angehört.*

Ist $e_1 \neq 0$, so gilt weiter:

Das Doppelverhältnis, das vom H-Kegelschnitt, der doppeltzählenden Kurventangente, dem Hüllkegelschnitt (1.46) *von $\mathfrak{B}_1$ und dem Kegelschnitt* (1.54) *bestimmt wird, hat den Wert* $\frac{n-2}{n-1}$. Dieses Doppelverhältnis ist also weder von t, noch

[7]) Über solche Kongruenzen vgl. man etwa A. Voss [6].

von der gewählten Parameterklasse $\{g\}$, sondern nur von der Dimension n abhängig.

Wir schließen mit einer Bemerkung für den Fall $n = 3$ der gewöhnlichen Raumkurven: Berechnet man für die Kongruenzstrahlen durch (1.54) den jeweiligen Brennpunkt, so ergibt sich aus (1.53), (1.48) und (1.49) die C_3

$$\{6\tau^3 + 18e_1\tau + 12e_2, 6\tau^2 + 6e_1, 3\tau, 1\}. \tag{1.55}$$

Nun hat G. Bol[8]) sämtliche C_3 bestimmt, die eine Raumkurve an einer Stelle t vierpunktig berühren. Sie lassen sich darstellen in der Form

$$\{6\tau^3 + 6\beta\tau^2 + 3\delta\tau + \varepsilon, 6\tau^2 + 6\beta\tau + \gamma, 3\tau + 3\beta, 1\} \tag{1.56}$$

mit beliebigen Konstanten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.

Wählen wir

$$\beta = 0, \gamma = \delta = 6e_1, \varepsilon = 12e_2, \tag{1.57}$$

so sieht man: *Der Ort* (1.55) *der zusammenfallenden Brennpunkte ist eine* C_3, *die die Raumkurve* $\mathfrak{x}(t)$ *vierpunktig berührt.*

Die Berührung ist, wieder nach [1], genau dann sogar fünfpunktig, wenn

$$\beta = 0, 2\gamma - 3\delta = 0. \tag{1.58}$$

Nach (1.57) führt das auf $e_1 = 0$.

Die Berührung ist genau dann fünfpunktig, wenn die zu $\mathfrak{B}_2$ *gehörige Halbinvariante* g *eine Nullstelle hat.* (1.54) fällt dann mit dem H-Kegelschnitt zusammen, die C_3 (1.55) ist Fokalkurve im früher definierten Sinne.

Die Berührung ist genau dann sogar sechspunktig[9]), *wenn* $e_1 = e_2 = 0$, *also an einer Komplexstelle, die gleichzeitig Nullstelle von* g *ist.* Jetzt sind die H-C_3 und die Fokalkurve identisch.

2. Die Gesamtheit der Bahntangenten in einem Punkt. Gegenseitige Berührung von Bahnkurven

2.1. Bei unseren bisherigen Betrachtungen war stets eine Halbinvariante g gewählt und eine zugehörige H-Bewegung $\mathfrak{B}_r$ $(0 \leqq r \leqq n)$ zugrunde gelegt, die jedem (nicht momentan festen) Punkt $\mathfrak{p}$ des S_r eine wohldefinierte Fortschreitungsrichtung zuordnete. Wir wollen nun verschiedene H-Bewegungen gleichzeitig in Betracht ziehen und haben dabei zu beachten, daß eine H-Bewegung einerseits von der Ordnung r der für sie maßgebenden H-C_r, andererseits von der gewählten Parameterklasse $\{g\}$ abhängt. Wir gewinnen so einen Überblick über die Gesamtheit der Bahntangenten in $\mathfrak{p}$ und erhalten insbesondere Aussagen über gegenseitige Berührung von Bahnkurven.

In 2.1 und 2.2 sei zunächst r fest gewählt, und wir betrachten nur die Änderung der Fortschreitungsrichtung beim Übergang von der Klasse $\{g\}$ zur Klasse $\{g_1\}$. Als Urparameter t sei ein beliebiger Parameter aus $\{g\}$ gewählt; das zugehörige Bezugssystem, also die Gesamtheit der Begleitsimplexe

[8]) [1] § 55.

[9]) [1] § 42. Komplexstellen einer Raumkurve, wo deren Schmiegkomplex stationär ist, sind durch $e_2 = 0$ gekennzeichnet.

$\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n$ längs der Kurve, wird nach (1.6) in der (t, A)-Grundebene durch $A = 0$ dargestellt[10]). Aus der zu $\{g_1\}$ gehörigen H-Schar der Grundebene wählen wir die Kurve $A(t)$ mit dem Anfangswert

$$A(t_0) \doteq 0 \text{ [11])}. \tag{2.1}$$

Sie bestimmt ein zweites Bezugssystem; die beiden Bezugssysteme haben dann nach (2.1), (1.6) an der Kurvenstelle $t = t_0$ zusammenfallende Begleitsimplexe.

Wir können weiter erreichen, daß diese Begleitsimplexe sogar in der Normierung ihrer Eckenvektoren übereinstimmen. Wenn τ ein zum zweiten Bezugssystem $A(t)$ gehöriger Parameter ist, dann nach (1.5) auch

$$t^* = \alpha\tau + \beta; \quad \alpha, \beta = \text{const.} \tag{2.2}$$

Es ist

$$\varphi = \frac{dt^*}{dt} = \frac{dt^*}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \alpha \frac{d\tau}{dt}, \tag{2.3}$$

und wir können also t^* so wählen, daß

$$\varphi \doteq 1, \tag{2.4}$$

wenn wir setzen

$$\alpha^{-1} = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{t=t_0}. \tag{2.5}$$

Bei einer Sterntransformation (1.5) $t = f(t^*)$ gehen dann an der Stelle $t = t_0$ nach (2.1), (2.4) die Beziehungen (1.6), (1.7) über in

$$\mathfrak{x}_\mu^* \doteq \mathfrak{x}_\mu; \qquad \mu = 0, \ldots, n, \tag{2.6}$$

$$e_\nu^* \doteq e_\nu; \qquad \nu = 2, \ldots, n, \tag{2.7}$$

$$e_1^* \doteq e_1 + A_0'. \tag{2.8}$$

Für die lokalen Koordinaten p_μ eines Punktes $\mathfrak{p}$ gilt bei unserer Sterntransformation an der Stelle t_0 wegen (2.6) offensichtlich

$$p_\mu^* \doteq p_\mu. \tag{2.9}$$

Die durch den Punkt

$$\mathfrak{p} = \sum_{\mu=0}^{r} p_\mu \mathfrak{x}_\mu \in S_r \tag{2.10}$$

gehende Bahntangente von $\mathfrak{V}_r$, die zur Klasse $\{g\}$ gehört, war nach (1.10) bestimmt durch

$$\mathfrak{p}' = \sum_{\mu=0}^{r} \sum_{\nu=\mu}^{r} p_\nu b_{\nu,\nu-\mu} \mathfrak{x}_\mu + \begin{cases} \sum_{\mu=0}^{r+1} N_\mu p_{\mu-1} \mathfrak{x}_\mu & \text{für } r < n, \\ 0 & \text{für } r = n. \end{cases} \tag{2.11}$$

Die zu $\{g_1\}$ gehörende Bahntangente aus $\mathfrak{p}$ geht dann durch $\frac{d\mathfrak{p}^*}{dt^*}$. Nach (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) erkennt man aber unmittelbar, daß man diesen Vektor für jede beliebige Klasse $\{g_1\}$ erhält, wenn man in (2.11) e_1 als Parameter ansieht.

[10]) Man vgl. auch (I.1.2).

[11]) Das Zeichen $\doteq$ zeigt im folgenden stets Gleichheit an der Stelle $t = t_0$ an.

Wir setzen

$$e_1^* = \eta, \quad \frac{d\mathfrak{p}^*}{dt^*} = \mathfrak{p}'_\eta \tag{2.12}$$

und erhalten

$$\mathfrak{p}'_\eta = \mathfrak{p}'_0 + \eta\,\mathfrak{q}\,, \tag{2.13}$$

wobei

$$\mathfrak{p}'_0 = \sum_{\mu=0}^{r-2} \sum_{\nu=\mu+2}^{r} p_\nu b_{\nu,\nu-\mu} \mathfrak{x}_\mu + \begin{cases} \sum\limits_{\mu=0}^{r+1} N_\mu p_{\mu-1} \mathfrak{x}_\mu & \text{für } r < n\,, \\ 0 & \text{für } r = n\,, \end{cases} \tag{2.14}$$

und

$$\mathfrak{q} = \sum_{\mu=0}^{r-1} a_{\mu+1} p_{\mu+1} \mathfrak{x}_\mu \qquad (a_\mu = a_{\mu 1})\,. \tag{2.15}$$

Aus (2.13) folgt: *Die von* $\mathfrak{p}$ *ausgehenden Bahntangenten von* $\mathfrak{B}_r$ *bei beliebiger Klasse gehören für festes* r *einem Büschel an, das in der Ebene* $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'_0, \mathfrak{q})$ *liegt.*

2.2. Die Gerade $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ des Büschels, die dem Parameterwert $\eta = \infty$ entspricht, gestattet eine bemerkenswerte geometrische Deutung. Wir betrachten dazu die von dem Vektor

$$\bar{\mathfrak{p}} = \sum_{\mu=0}^{n} p_\mu \bar{\mathfrak{x}}_\mu \tag{2.16}$$

in Abhängigkeit von A beschriebene Kurve, wo $\bar{\mathfrak{x}}_\mu$ wieder durch (1.6) erklärt ist. (2.16) stellt bei konstanten p_μ die durch $\mathfrak{p}$ gehende Bahnkurve jener projektiven Bewegung des P_n dar, die an der Kurvenstelle $t = t_0$ durch die mit A veränderliche Basis $\bar{\mathfrak{x}}_0, \ldots, \bar{\mathfrak{x}}_n$ bestimmt ist; $\bar{\mathfrak{x}}_\mu$ durchläuft dabei die H-C_μ. Wir nennen diese Bewegung die *lokale H-Bewegung* $\mathfrak{L}(t_0)$ *an der Stelle* t_0.

Setzt man (1.6) in (2.16) ein, so erhält man nach einfacher Umrechnung

$$\bar{\mathfrak{p}} = \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{n} \frac{a_{\nu,\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!} A^{\nu-\mu} p_\nu \mathfrak{x}_\mu\,, \tag{2.17}$$

woraus sich unmittelbar eine Darstellung für $\mathfrak{L}(t_0)$ ergibt:

$$\bar{p}_\mu = \sum_{\nu=\mu}^{n} \frac{a_{\nu,\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!} A^{\nu-\mu} p_\nu\,; \qquad \mu = 0, \ldots, n\,. \tag{2.18}$$

Aus (2.18) entnimmt man:

Die lokale H-Bewegung $\mathfrak{L}(t_0)$ *ist eine eingliedrige kommutative Gruppe. Nach (2.16) sind ihre Bahnkurven rationale Normkurven der Ordnungen* $0, 1, \ldots, n$, *und die Schmiegräume* S_μ *sind Fixräume der Gruppe.*

Weiter zeigt (2.16) für $A = \infty$ mittels (1.6):

Alle Bahnkurven von $\mathfrak{L}(t_0)$ *berühren im Fixpunkt* $\mathfrak{x}_0$ *die Kurve* $\mathfrak{x}(t)$.

Wenn wir (2.16) nach A differenzieren und dabei (1.44) beachten, erhalten wir

$$\bar{\mathfrak{p}}_A = \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu p_\mu \bar{\mathfrak{x}}_{\mu-1} = \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu+1} p_{\mu+1} \bar{\mathfrak{x}}_\mu\,. \tag{2.19}$$

$\bar{\mathfrak{p}}_A$ bestimmt die Fortschreitungsrichtung in $\bar{\mathfrak{p}}$ bezüglich $\mathfrak{L}(t_0)$.

Setzt man insbesondere in (2.16) und (2.19) $A = 0$, so fallen die Querstriche fort, und der Vergleich mit (2.10) und (2.15) zeigt nun:

Die Gerade $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ *des Büschels der Bahntangenten von* $\mathfrak{B}_r$ *in* $\mathfrak{p}$ *ist Bahntangente der lokalen H-Bewegung* $\mathfrak{L}(t_0)$.

Dabei hängt diese Bahntangente bei festgehaltenem $\mathfrak{p}$ nicht etwa von dem gewählten Basissimplex $\{\bar{\mathfrak{x}}_\mu\}_{A=0}$ ab, auf das $\mathfrak{p}$ bezogen ist, denn die Bahnkurven sind ja W-Kurven.

Nach obigem ist $\mathfrak{x}_0$ Fixpunkt von $\mathfrak{L}(t_0)$ (und nach (2.16), (2.19) sogar der einzige). Nach dem eben ausgesprochenen Satz entartet demnach das Büschel $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_0' + \eta\,\mathfrak{q})$ der Bahntangenten von $\mathfrak{B}_r$ für $\mathfrak{x}_0$ in die Gerade $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_0')$, also nach (2.14) in die Kurventangente $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1)$. Wir haben:

Im Kurvenpunkt $\mathfrak{x}_0$ *berühren die Bahnkurven aller Harmonikal-Bewegungen* $\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}$ *bei beliebig gewählter Klasse* $\{g\}$ *die Kurve* $\mathfrak{x}(t)$. Für $\mathfrak{B}_n$ ist nach (I.3) $\mathfrak{x}_0$ momentaner Fixpunkt.

Wir fragen sogleich, für welche anderen Punkte das Bahntangentenbüschel entarten kann.

Sei p_m $(0 < m \leqq r)$ die letzte von Null verschiedene Koordinate von $\mathfrak{p}$. Dann ist

$$
(2.20)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{p} &= p_m \mathfrak{x}_m + \cdots\\
\mathfrak{q} &= a_m p_m \mathfrak{x}_{m-1} + \cdots\\
\mathfrak{p}_0' &= \sum_{\mu=0}^{m-2} \sum_{\nu=\mu+2}^{m} p_\nu b_{r,\nu-\mu} \mathfrak{x}_\mu + \begin{cases} N_{m+1} p_m \mathfrak{x}_{m+1} + \cdots & \text{für } r < n,\\ 0 & \text{für } r = n,\end{cases}
\end{aligned}
$$

wo die Punkte Glieder mit abnehmenden Indizes andeuten. Für $r < n$ entartet das Büschel also niemals, für $r = n$ dagegen genau für

$$
(2.21)\qquad \mathfrak{p}_0' = 0\,,
$$

das bedeutet aber, daß $\mathfrak{p}$ für die Nullklasse $\{0\}$ momentaner Fixpunkt von $\mathfrak{B}_n$ ist. Nach (I.3) enthält genau der Schmiegraum S_h diese momentanen Fixpunkte, wobei h durch (1.4) erklärt ist.

Das Büschel $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_0' + \eta\,\mathfrak{q})$ *der Bahntangenten von* $\mathfrak{B}_r$ *aus einem von* $\mathfrak{x}_0$ *verschiedenen Punkt* $\mathfrak{p}$ *entartet genau dann, wenn* $r = n$ *ist und wenn* $\mathfrak{p}$ *im Fixraum* S_h *der zur Nullklasse gehörigen Bewegung* $\mathfrak{B}_n$ *liegt. In den Punkten von* S_h *berühren also die zu* $\mathfrak{B}_n$ *gehörigen Bahnkurven aller Klassen* $\{g\}$ $(g(t_0) \neq 0)$ *die durch* $\mathfrak{p}$ *gehende Bahnkurve der lokalen H-Bewegung* $\mathfrak{L}(t_0)$.

Man kann das kurz so aussprechen: $\mathfrak{B}_n$ *berührt an jeder Stelle* $t = t_0$ *die lokale H-Bewegung* $\mathfrak{L}(t_0)$ *in* S_h.

2.3. Nachdem wir bisher die Bahntangenten von $\mathfrak{B}_r$ bei festem r und variabler Klasse $\{g\}$ betrachtet haben, ziehen wir jetzt auch die Abhängigkeit der Fortschreitungsrichtung von r in Betracht.

Sei für $\mathfrak{p}$ wieder p_m die letzte von Null verschiedene Koordinate,

$$
(2.22)\qquad \mathfrak{p} = \sum_{\mu=0}^{m} p_\mu \mathfrak{x}_\mu,\quad p_m \neq 0\,;\qquad 0 \leqq m < n\,,
$$

so daß $\mathfrak{p}$ nicht in S_{m-1}, jedoch in $S_m, \ldots, S_n$ liegt. Dann ordnen $\mathfrak{B}_m, \ldots, \mathfrak{B}_n$ dem Punkt $\mathfrak{p}$ je ein Büschel von Bahntangenten zu. Dabei setzen wir $m < n$ voraus, es gibt also mindestens zwei (gegebenenfalls entartende) Büschel dieser Art.

Für $\mathfrak{B}_r$ $(m \leqq r \leqq n)$ ist die Büschelebene nach (2.15), (2.14) bestimmt durch $\mathfrak{p}$ und

$$\mathfrak{q} = \sum_{\mu=0}^{m-1} a_{\mu+1} p_{\mu+1} \mathfrak{x}_\mu , \tag{2.23}$$

$$\mathfrak{p}_0' = \mathfrak{s} + (n - r)\mathfrak{r} , \tag{2.24}$$

wobei gesetzt wurde

$$\mathfrak{s} = \sum_{\mu=0}^{m-2} \sum_{\nu=\mu+2}^{m} p_\nu b_{r,\nu-\mu} \mathfrak{x}_\mu , \tag{2.25}$$

$$\mathfrak{r} = \sum_{\mu=0}^{m+1} \frac{1}{n-\mu+1} p_{\mu-1} \mathfrak{x}_\mu . \tag{2.26}$$

Da jetzt $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ von r unabhängig sind, haben wir:

Die $n - m + 1$ Büschel von Bahntangenten aus $\mathfrak{p}$, die jeweils einer der H-Bewegungen $\mathfrak{B}_m, \ldots, \mathfrak{B}_n$ zugeordnet sind, gehören dem dreidimensionalen Unterraum $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s})$ an und haben die Bahntangente $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ der lokalen H-Bewegung $\mathfrak{L}(t_0)$ gemeinsam.

Für festes η, also für dieselbe Klasse, gehen die Bahntangenten von $\mathfrak{B}_m, \ldots, \mathfrak{B}_n$ durch $\mathfrak{p}$ und

$$\mathfrak{p}_\eta' = \mathfrak{p}_0' + \eta\mathfrak{q} = \mathfrak{s} + \eta\mathfrak{q} + (n - r)\mathfrak{r} . \tag{2.27}$$

Daher: *Für dieselbe Klasse liegen die Bahntangenten von $\mathfrak{B}_m, \ldots, \mathfrak{B}_n$ aus $\mathfrak{p}$ in der von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s} + \eta\mathfrak{q}$ aufgespannten Ebene.*

Können zwei dieser Bahntangenten zusammenfallen? Das ist nur möglich, wenn $\mathfrak{p}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s} + \eta\mathfrak{q}$ linear abhängig sind. Dann fallen überhaupt alle Bahntangenten derselben Klasse aus $\mathfrak{p}$ zusammen. Da $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{r}$ sicher linear unabhängig sind, tritt das nach (2.22), (2.23), (2.25), (2.26) genau dann ein, wenn

$$\mathfrak{s} + \eta\mathfrak{q} = (\mathfrak{p}_\eta')_{r=n} = 0 , \tag{2.28}$$

also wenn $\mathfrak{p}$ momentaner Fixpunkt von $\mathfrak{B}_n$ ist. Nach (I.3) haben wir:

Die Bahnkurven von $\mathfrak{B}_m, \ldots, \mathfrak{B}_n$ derselben Klasse aus $\mathfrak{p}$ berühren sich genau dann, wenn $\mathfrak{p}$ im Fixraum S_h von $\mathfrak{B}_n$ liegt[12]).

Soll es außer dem Kurvenpunkt $\mathfrak{x}_0$ solche Berührstellen geben, so muß g an der Stelle t_0 eine Nullstelle haben. Insbesondere trifft das für die Nullklasse zu.

An einer solchen Berührstelle entartet das Bahntangentenbüschel von $\mathfrak{B}_n$ nach 2.2 in die Gerade $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$, die Büschel für $\mathfrak{B}_m, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}$ fallen zusammen, ohne daß allerdings die Bahntangenten von $\mathfrak{B}_m, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}$ für eine Klasse $\{g\}$ $(g(t_0) \neq 0)$ übereinstimmten. Dies liest man aus (2,27) ab, wenn man $\mathfrak{s} = 0$ beachtet.

---

[12]) Für $m = n - 1$ gibt es nur eine solche Bahntangente durch $\mathfrak{p}$, nämlich die zu $\mathfrak{B}_{n-1}$ gehörige, während $\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{B}_n$ stationär ist. Man wird auch dann sinngemäß von Berührung sprechen.

3. Bemerkungen zur Geometrie der Harmonikal-Flächen

3.1. Die r-te H-Fläche (C_r) wird von den H-C_r längs der Kurve erzeugt und läßt sich nach (1.6) durch

$$\bar{\mathfrak{x}}_r(t, A) = \sum_{\mu=0}^{r} a_{r_\mu} \frac{A^\mu}{\mu!} \mathfrak{x}_{r-\mu}; \qquad 0 \leq r \leq n \tag{3.1}$$

darstellen. Die Tangente an die H-C_r geht nach (1.44) durch den Punkt

$$\bar{\mathfrak{x}}_{rA} = a_r \bar{\mathfrak{x}}_{r-1}. \tag{3.2}$$

Durch nochmalige Differentiation nach A erhält man hieraus

$$\bar{\mathfrak{x}}_{rAA} = a_r a_{r-1} \bar{\mathfrak{x}}_{r-2}. \tag{3.3}$$

Durch (3.1), (3.2), (3.3) ist die Schmiegebene der H-C_r bestimmt.

Man sieht insbesondere für $A = 0$, daß die Tangente an die H-C_r in $\mathfrak{x}_r$ (für $r > 0$) durch $\mathfrak{x}_{r-1}$, die Schmiegebene (für $r > 1$) durch $\mathfrak{x}_{r-2}$ geht.

Es sei im folgenden stets $n \geqq 3$. Wir wollen untersuchen, ob die Schar der H-C_r auf der r-ten H-Fläche aus Asymptotenlinien bestehen kann, wann also längs der H-C_r Schmiegebene und Tangentenebene zusammenfallen. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß die lineare Abhängigkeit

$$(\bar{\mathfrak{x}}_r, \bar{\mathfrak{x}}_{rA}, \bar{\mathfrak{x}}_{rAA}, \bar{\mathfrak{x}}_r') = 0 \tag{3.4}$$

besteht. Das linke Glied ist dabei als Grassmannsches Produkt zu verstehen, d. h. als Gesamtheit der wesentlichen vierreihigen Unterdeterminanten der Matrix der vier Vektoren.

Für $r = 0$ ist unsere Fragestellung sinnlos, für $r = 1$ trivial, denn *die H-C_1, d. h. die Tangenten der Kurve $\mathfrak{x}(t)$, sind stets Asymptotenlinien auf (C_1).* Wir dürfen also $r > 1$ annehmen.

An der Stelle $A = 0$, also in $\mathfrak{x}_r$, geht (3.4) dann bei Beachtung der Ableitungsgleichungen (1.1) über in

$$\left(\mathfrak{x}_r, \mathfrak{x}_{r-1}, \mathfrak{x}_{r-2}, \mathfrak{x}_{r+1} + \sum_{\mu=3}^{r} b_{r\mu}\mathfrak{x}_{r-\mu}\right) = 0\,. \tag{3.5}$$

Daraus folgt: *Für $1 < r < n$ sind die H-C_r niemals Asymptotenlinien auf der von ihnen erzeugten H-Fläche.*

Anders für $r = n$, hier wird aus (3.5)

$$\left(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n-1}, \mathfrak{x}_{n-2}, \sum_{\mu=3}^{n} b_{n\mu}\mathfrak{x}_{n-\mu}\right) = 0\,, \tag{3.6}$$

also ist wegen $b_{n\mu} = a_{n\mu} e_\mu$ notwendig

$$e_3 = \cdots = e_n = 0\,. \tag{3.7}$$

(3.7) reicht aber auch hin! Denn durch Sterntransformation läßt sich $\mathfrak{x}_r$ in jeden beliebigen Punkt der H-C_r überführen; dort besteht Inzidenz von Schmieg- und Tangentenebene, wenn die gestirnten Relationen (3.7) gelten; wegen deren Halbinvarianz trifft das aber zu.

Genau dann, wenn (3.7) gilt, sind die H-C_n auf der n-ten H-Fläche Asymptotenlinien.

Dieses Ergebnis verallgemeinert ein von G. Bol[13]) für $n = 3$ gewonnenes Resultat: Auf der H-Fläche (C_3) beschreiben die H-C_3 genau dann Asymptotenlinien, wenn $e_3 = 0$, also wenn die Raumkurve eine Koinzidenzkurve ist.

3.2. Wir wenden uns nun noch der Vollständigkeit wegen den „transversalen" Asymptotenlinien einer H-Fläche zu, das sind solche, die jede H-C_r genau einmal treffen. Dabei schließen wir die auf (C_r) singuläre Kurve $\mathfrak{x}(t)$ als transversale Kurve aus.

Wenn es eine transversale Asymptotenlinie auf (C_r) gibt, so bestimmt die entsprechende Kurve $A = A(t)$ nach (I.1.2) ein zugehöriges Bezugssystem, und wir können nach geeigneter Parametertransformation annehmen, daß $\mathfrak{x}_r$ diese Asymptotenlinie durchläuft.

Dafür ist notwendig und hinreichend

$$(\mathfrak{x}_r, \mathfrak{x}_{r-1}, \mathfrak{x}'_r, \mathfrak{x}''_r) = 0 . \tag{3.8}$$

Nun ist nach (1.1)

$$\mathfrak{x}'_r = \mathfrak{x}_{r+1} + \sum_{\mu=0}^{r} b_{r\mu}\mathfrak{x}_{r-\mu} , \tag{3.9}$$

$$\mathfrak{x}''_r = \mathfrak{x}_{r+2} + \sum_{\mu=0}^{r} \left[b'_{r\mu} + b_{r,\mu+1} + b_{r+1,\mu+1} + \sum_{\sigma=0}^{\mu} b_{r\sigma} b_{r-\sigma,\mu-\sigma} \right] \mathfrak{x}_{r-\mu} . \tag{3.10}$$

Die Vektoren in (3.8) sind für $r < n - 1$ also sicher linear unabhängig: *Auf der H-Fläche (C_r) mit $r < n - 1$ gibt es keine transversalen Asymptotenlinien.*

Sei jetzt $r = n - 1$, so daß $\mathfrak{x}_{r+2} = 0$. (3.8) verlangt nun das Verschwinden des Vektors

$$\sum_{\mu=2}^{n-1} \left[b'_{n-1,\mu} + b_{n-1,\mu+1} + b_{n,\mu+1} + \sum_{\sigma=1}^{\mu-1} b_{n-1,\sigma} b_{n-\sigma-1,\mu-\sigma} \right] \mathfrak{x}_{n-\mu-1} , \tag{3.11}$$

und das führt auf die Relationen

$$R_\mu = b'_{n-1,\mu} + b_{n-1,\mu+1} + b_{n,\mu+1} + \sum_{\sigma=1}^{\mu-1} b_{n-1,\sigma} b_{n-\sigma-1,\mu-\sigma} = 0 , \qquad \mu = 2, \ldots, n-1 . \tag{3.12}$$

Eine weitere Asymptotenlinie kann man bei passend gewähltem Parameter t^* entsprechend von $\mathfrak{x}^*_r$ durchlaufen denken und findet

$$R^*_\mu = 0 . \tag{3.13}$$

Schreibt man (3.13) mittels der Formeln (1.7) für Sterntransformation auf den Urparameter t um und berücksichtigt (3.12), so erhält man

$$3A\, e_2 - (A' - A^2) e_1 - \frac{1}{2} (A' - A^2)^2 = 0 , \tag{3.14}$$

$$(\mu + 1) A\, e_\mu - (A' - A^2) e_{\mu-1} = 0 ; \quad \mu = 3, \ldots, n-1 . \tag{3.15}$$

---

13) [1] S. 184.

Setzt man den aus (3.14) sich ergebenden Ausdruck für $A' - A^2$ in (3.15) ein, so kommt

$$A^2(\mu+1)^2 e_\mu^2 + 2A\,[(\mu+1)e_1 e_{\mu-1} e_\mu - 3 e_2 e_{\mu-1}^2] = 0\,; \qquad \mu = 3, \ldots, n-1\,. \tag{3.16}$$

Soll es nun durch jeden Punkt der H-C_r eine Asymptotenlinie geben, so gilt (3.16) identisch in A, und es folgt

$$e_2 = \cdots = e_{n-1} = 0\,. \tag{3.17}$$

Für $n > 3$ liefert dann (3.12) noch

$$e_1 = e_n = 0\,, \tag{3.18}$$

unsere Kurve $\mathfrak{x}(t)$ ist also eine C_n[14]). Nach (3.14) ist jetzt $A' - A^2 = 0$, und nach (3.9), (3.10)

$$\mathfrak{x}_{n-1}' = \mathfrak{x}_n, \quad \mathfrak{x}_{n-1}'' = 0\,. \tag{3.19}$$

Wir fassen zusammen: *Für $n > 3$ gibt es auf der H-Fläche (C_{n-1}) genau dann eine Schar von Asymptotenlinien, wenn die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ eine C_n ist. Die Asymptotenschar ist die zur Nullklasse gehörige H-Schar auf (C_{n-1}) und besteht aus den Tangenten der Kurve $\mathfrak{x}(t)$.* Die $(n-1)$-te H-Fläche ist hier also Tangentenfläche der Kurve $\mathfrak{x}(t)$.

Nur für $n = 3$ kann es auf $(C_{n-1}) = (C_2)$ zwei verschiedene Scharen von Asymptotenlinien geben. Genau dann sind das nach (3.14) zwei H-Scharen, wenn $e_2 = 0$, also wenn die Kurve Komplexkurve ist. Nach (3.12) sind die beiden Scharen dann durch

$$e_1^2 + 3e_3 = 0 \tag{3.20}$$

bestimmt. Dieses Ergebnis für $n = 3$ hat schon G. Bol[15]) angegeben.

Man kann den Fall $r = n$ ganz analog diskutieren. Ohne die Rechnungen im einzelnen wiederzugeben, seien nur die Ergebnisse genannt.

Für $n > 3$ gibt es auf der H-Fläche (C_n) niemals eine Schar transversaler Asymptotenlinien.

Es gibt also nur für $n = 3$ solche transversalen Asymptotenscharen auf $(C_n) = (C_3)$. Es handelt sich dabei sogar um H-Scharen, wenn die Raumkurve Komplexkurve ($e_2 = 0$) oder Koinzidenzkurve ($e_3 = 0$) ist.

Ist sie *Komplexkurve*[16]), so sind die beiden H-Scharen durch $e_1^2 + 3e_3 = 0$ gegeben; das sind, in der (t, A)-Grundebene gedeutet, dieselben Scharen (3.20) wie schon im früheren Fall $r = n - 1 = 2$.

Hat man eine *Koinzidenzkurve*, so findet man die zur Nullklasse $\{0\}$ gehörige H-Schar als einzige Schar transversaler Asymptotenlinien auf $(C_n) = (C_3)$. Nach 3.1 bilden die H-C_2 dann die Asymptotenlinien der anderen Schar.

---

[14]) Eine Kurve $\mathfrak{x}(t)$ des P_n ist genau dann Normkurve n-ter Ordnung, wenn $e_1 = \cdots = e_n = 0$; sie ist dann mit ihrer H-C_n identisch.

[15]) [1] S. 211.

[16]) Dieses Ergebnis findet sich bei G. Bol [1] S. 190.

3.3. Da Asymptotenlinien nur in Ausnahmefällen auf Flächen des P_n existieren, hat E. BOMPIANI [3][17]) Quasi-Asymptotenlinien eingeführt, über die wir noch einige Bemerkungen anschließen.

Zur Vorbereitung für das Folgende betrachten wir auf (C_r) eine beliebige Kurve durch den Punkt $\mathfrak{x}_r$ der H-C_r an der Stelle $t = t_0$. Nach dem früher Gesagten durchläuft $\mathfrak{x}_r^*$ eine beliebige Kurve auf (C_r), die genau dann durch $\mathfrak{x}_r$ geht, wenn wir noch

$$A \triangleq 0^{18)} \tag{3.21}$$

setzen. Bei Verwendung der Beziehungen (3.9), (3.10) und der Formeln für Sterntransformation folgt dann für $t = t_0$

$$\mathfrak{x}_r^* \triangleq \varphi^{\frac{n}{2}-r}\,\mathfrak{x}_r \tag{3.22}$$

$$\frac{d\mathfrak{x}_r^*}{dt^*} \triangleq \varphi^{\frac{n}{2}-r-1}\,[\mathfrak{x}_r' + A' a_r \mathfrak{x}_{r-1}] \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathfrak{x}_r^*}{dt^{*2}} \triangleq \varphi^{\frac{n}{2}-r-2}\Big[&\mathfrak{x}_r'' + A'(a_r + a_{r+1})\mathfrak{x}_r + A'' a_r \mathfrak{x}_{r-1} + \\ &+ A'^2 a_{r2}\mathfrak{x}_{r-2} + 2A' \sum_{\mu=2}^{r} a_{r\mu} e_{\mu-1} \dot{\mathfrak{x}}_{r-\mu}\Big].\end{aligned} \tag{3.24}$$

Man nennt nun nach BOMPIANI eine Kurve auf einer Fläche des P_n eine ***Quasi-Asymptotenlinie*** Q_{jkm} $(j \geqq k > m \geqq 0)$, wenn an jeder Kurvenstelle die Dimension des Unterraums $\{S_j, S_{km}\}$ kleiner ist als für eine allgemeine Kurve auf der Fläche.

S_j ist dabei der j-te Schmiegraum der Kurve. Weiter ist S_{km} der Unterraum minimaler Dimension, der die Schmiegräume S_k jener Flächenkurven enthält, die mit der betrachteten Kurve die Schmiegräume $S_0, \ldots, S_m$ gemeinsam haben. $\{S_j, S_{km}\}$ schließlich ist der von S_j und S_{km} aufgespannte Unterraum.

Da diese Definition der Quasi-Asymptotenlinien erst für $j \geqq 2$ sinnvoll ist und andererseits dritte Ableitungen von $\mathfrak{x}_r$ unübersichtlich werden, beschränken wir uns auf $j = 2$, also auf die Quasi-Asymptotenlinien vom Typ Q_{210}, Q_{221}, Q_{220}.

Q_{210} sind die gewöhnlichen Asymptotenlinien, die wir bereits bestimmt haben, und auch die Bestimmung der Kurven vom Typ Q_{221} führt auf die Asymptotenlinien, wie man mit Hilfe der Gleichungen (3.22), (3.23), (3.24) leicht bestätigt. Es bleiben die Kurven Q_{220} zu betrachten.

Der Unterraum $\{S_2, S_{20}\} = S_{20}$ wird, da in (3.22), (3.23), (3.24) A' und A'' jetzt als unabhängige Parameter anzusehen sind, aufgespannt durch $\mathfrak{x}_r$, $\mathfrak{x}_{r-1}$, $\mathfrak{x}_{r-2}$, $\mathfrak{x}_r'$, $\mathfrak{x}_r''$, $\sum_{\mu=3}^{r} a_{r\mu} e_{\mu-1} \mathfrak{x}_{r-\mu}$.

Für $r = 1$ bzw. $r = 2$ sind also $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ bzw. $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4$ aufspannende Vektoren.

---

[17]) Man vgl. auch E. P. LANE [5].

[18]) Vgl. (1.6). Das Symbol $\triangleq$ bedeute wieder Gleichheit an der Stelle t_0.

Auf (C_1) und (C_2) läßt sich die Dimension von S_{20} an keiner Stelle der Fläche erniedrigen.

Sei jetzt $3 \leqq r \leqq n-2$. Längs der Kurve $\mathfrak{x}_r(t)$ erniedrigt sich die Dimension von S_{20}, wenn

$$\left(\mathfrak{x}_r, \mathfrak{x}_{r-1}, \mathfrak{x}_{r-2}, \mathfrak{x}_{r+1} + \sum_{\mu=3}^{r} b_{r\mu}\mathfrak{x}_{r-\mu}, \right. \tag{3.25}$$
$$\left. \mathfrak{x}_{r+2} + \sum_{\mu=3}^{r} \alpha_{r\mu}\mathfrak{x}_{r-\mu}, \sum_{\mu=3}^{r} a_{r\mu}e_{\mu-1}\mathfrak{x}_{r-\mu}\right) = 0^{19)},$$

also falls

$$e_2 = \cdots = e_{r-1} = 0\,. \tag{3.26}$$

Gilt umgekehrt (3.26), so erniedrigt sich in jedem Punkt der H-Fläche (C_r) die Dimension von S_{20}, weil die Bedingungen (3.26) bei Sterntransformation erhalten bleiben und also bei beliebiger Kurve $\mathfrak{x}_r^*$ Dimensionserniedrigung bewirken.

Gibt es eine (transversale) Kurve auf (C_r) für $3 \leqq r \leqq n-2$, längs der sich die Dimension von S_{20} von 5 auf 4 erniedrigt, so gilt das für jede Kurve der Fläche. Notwendig und hinreichend hierfür ist (3.26).

Da die Dimension von S_{20} mindestens 4 ist, gibt es also auch für $3 \leqq r \leqq$ $\leqq n-2$ in keinem Fall Kurven Q_{220}. In unserem Ergebnis liegt aber eine Kennzeichnung der Kurven $\mathfrak{x}(t)$ des P_n von der Art (3.26).

Für $r = n-1 \geqq 3$ haben wir als aufspannende Vektoren von S_{20} im Punkt $\mathfrak{x}_r$

$$\mathfrak{x}_{n-1}, \quad \mathfrak{x}_{n-2}, \quad \mathfrak{x}_{n-3}, \quad \mathfrak{x}_n + \sum_{\mu=3}^{n-1} b_{n-1,\mu}\mathfrak{x}_{n-\mu-1}\,,$$
$$\mathfrak{a} = \sum_{\mu=3}^{n-1} a_{n-1,\mu}e_{\mu-1}\mathfrak{x}_{n-\mu-1}\,, \tag{3.27}$$
$$\mathfrak{b} = \sum_{\mu=3}^{n-1}\left[b'_{n-1,\mu} + b_{n-1,\mu+1} + b_{n,\mu+1} + \sum_{\sigma=1}^{\mu-1} b_{n-1,\sigma}b_{n-\sigma-1,\mu-\sigma}\right]\mathfrak{x}_{n-\mu-1}\,.$$

Wir beschränken uns darauf zu untersuchen, wann sich die Dimension von S_{20} auf 3 erniedrigt. Das tritt genau für $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = 0$ ein. Aus $\mathfrak{a} = 0$ folgt zunächst

$$e_2 = \cdots = e_{n-2} = 0\,, \tag{3.28}$$

sodann aus $\mathfrak{b} = 0$ noch im Falle $n > 4$

$$e_{n-1} = e_n = 0\,. \tag{3.29}$$

Die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ ist also eine Normkurve n-ter Ordnung. Wir haben ähnlich wie oben:

Gibt es eine (transversale) Kurve auf (C_{n-1}) mit $n > 4$, längs der sich die Dimension von S_{20} von 5 auf 3 erniedrigt, so gilt das für jede Kurve der Fläche.

---

19) Die Größen $\alpha_{r\mu}$ interessieren nicht weiter.

Das tritt genau dann ein, wenn die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ eine C_n ist.

Für $n = 4$ gilt analog zu (3.28)

$$e_2 = 0\,, \tag{3.30}$$

an Stelle von (3.29) kommt aber aus $\mathfrak{b} = 0$ jetzt

$$e_3' + 4e_4 = 0\,. \tag{3.31}$$

Unterwirft man (3.30), (3.31) einer Sterntransformation, so erhält man die für einen beliebigen Parameter gültigen Beziehungen

$$e_2^* = \varphi^{-3} e_2 = 0\,, \tag{3.32}$$

$$\frac{de_3^*}{dt^*} + 4e_4^* = \varphi^{-5}(e_3' + 4e_4 - 8e_3 A) = 0\,. \tag{3.33}$$

(3.33) legt, falls e_3 nicht verschwindet[20]), genau eine Kurve $A(t)$ auf $(C_{n-1}) = (C_3)$ fest. Da sich für (3.32), (3.33) längs dieser Kurve die Höchstdimension 4 von S_{20} auf die Mindestdimension 3 erniedrigt, haben wir:

Für $n = 4$ gibt es dann und nur dann genau eine Quasi-Asymptotenlinie Q_{220} auf $(C_{n-1}) = (C_3)$, wenn für die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ $e_2 = 0$ und $e_3 \neq 0$ gilt.

Gibt es zwei Kurven auf $(C_{n-1}) = (C_3)$, längs denen sich die Dimension von S_{20} auf 3 erniedrigt, so gilt das für jede Kurve der Fläche. Das tritt genau dann ein, wenn die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ eine C_4 ist.

Denn (3.33) ist genau dann für zwei Werte von A und damit identisch in A erfüllt, wenn $e_3 = e_4 = 0$.

Mit diesen Bemerkungen wollen wir schließen, da die Frage der Dimensionserniedrigung von S_{20} auf 4 für $r = n - 1$ und der Fall $r = n$ auf wenig übersichtliche Verhältnisse führen.

Literatur

[1] Bol, G.: Projektive Differentialgeometrie, 1. Teil. Vandenhoeck und Ruprecht. Göttingen 1950.

[2] Bol, G.: Invarianten linearer Differentialgleichungen. Abhandl. math. Seminar Hamburg. Univ. **16**, 1—28 (1949).

[3] Bompiani, E.: Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi. Rend. Palermo **37**, 305—331 (1914).

[4] Kunle, H.: Zur projektiven Kinematik der Kurven des n-dimensionalen projektiven Raumes I. Math. Ann. **144**, 142—161 (1961).

[5] Lane, E. P.: A treatise on projective differential geometry. Chicago 1942.

[6] Voss, A.: Über Komplexe und Kongruenzen. Math. Ann. **9**, 55—162 (1876).

(Eingegangen am 26. März 1961)

[20]) Wir wollen dabei wie bisher $A = \infty$, also die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ auf (C_r), außer acht lassen.

KELLERER, H. G.
Math. Annalen 144, 323—344 (1961)

Funktionen auf Produkträumen mit vorgegebenen Marginal-Funktionen

Von
HANS G. KELLERER in München

Im Rahmen einer maßtheoretischen Fragestellung, die in einer späteren Arbeit behandelt werden wird, ist das folgende Problem von Bedeutung: Auf einem Produktraum sei die nicht-negative Funktion $g(x_1, x_2)$ definiert; welchen Bedingungen unterliegt dann das Funktionenpaar $(f_1(x_1), f_2(x_2))$, damit die Funktionen $f_i(x_i)$ die einfachen Integrale einer von $g(x_1, x_2)$ majorisierten nicht-negativen Funktion $f(x_1, x_2)$ sind?

Wird die Forderung $f \leqq g$ außer acht gelassen oder nur eine der beiden Funktionen f_1, f_2 berücksichtigt, so läßt sich die Frage sehr einfach beantworten (§ 1). Andernfalls läßt sich zunächst lediglich eine leicht einzusehende notwendige Bedingung (G) angeben (§ 2). Um nachzuweisen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, wird die Problemstellung folgendermaßen vereinfacht: einerseits durch die Annahme endlicher Grundmengen (§ 3), andererseits durch den Übergang von Funktionen g und f_i zu Maßen ϱ und ν_i (§ 4). Mit Hilfe der erhaltenen Ergebnisse läßt sich dann der Hauptsatz dieser Arbeit beweisen: Die Existenz einer Funktion f mit den geforderten Eigenschaften ist gleichwertig mit dem Bestehen der Bedingung (G) (§ 5). Abschließend wird gezeigt, daß eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes auf Funktionen von n Variablen nicht ohne weiteres möglich ist (§ 6).

Bezeichnungen

1. Für die mengenalgebraischen Verknüpfungsoperationen werden die folgenden Zeichen verwendet:

$$\left.\begin{array}{ll} A\,B \text{ bzw. } \Pi^{\cdot} A_n & \text{für den Durchschnitt} \\ A \dot{+} B \text{ bzw. } \sum^{\cdot} A_n & \text{für die Vereinigung} \end{array}\right\} \text{der Mengen } A, B \text{ bzw. } A_n$$

$$(A + B \text{ bzw. } \textstyle\sum A_n \quad \text{für die Vereinigung disjunkter Mengen})$$

sowie $A \dotplus B$ für den Unterschied der Mengen A und B, wobei insbesondere

$$A - B = A \dotplus B \quad \text{für} \quad B \subset A\,.$$
$$\bar{A} = M - A\,, \qquad \text{falls } M \text{ die Grundmenge}\,.$$

2. Ein Maßraum ist ein Tripel $(M, \mathfrak{R}, \mu)$ bestehend aus dem Maß μ auf dem σ-Körper $\mathfrak{R}$ über der Grundmenge M.

Der Maßraum heißt beschränkt, falls $\mu(M) < \infty$, und normal, falls in $\mathfrak{K}$ eine Zerlegung $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ mit $\mu(M_n) < \infty$ existiert.

3. Ist $\mathfrak{C}$ eine Gesamtheit von Teilmengen von M, so ist ${}^K\mathfrak{C}$ (${}^B\mathfrak{C}$) der kleinste $\mathfrak{C}$ umfassende Mengenkörper (σ-Körper).

Für $A \subset M$ ist ferner $A\mathfrak{C} = \{AC : C \in \mathfrak{C}\}$; ist also $\mathfrak{C}$ ein σ-Körper über M, so ist $A\mathfrak{C}$ ein σ-Körper über A.

4. $\mathscr{L}(\mu)$ bezeichnet den linearen Raum der $\mathfrak{K}$-meßbaren μ-integrierbaren Funktionen $f|M$ und $\mathscr{M}(\mu)$ den Raum aller $\mathfrak{K}$-meßbaren nicht-negativen und μ-fast endlichen Funktionen $f|M$; zwei Funktionen, die μ-fast übereinstimmen, werden dabei identifiziert.

5. $\mathscr{L}(\mu)$ und $\mathscr{M}(\mu)$ sind enthalten in der Gesamtheit

$$\mathscr{N}(\mu) = \{f|M : f\ \mathfrak{K}\text{-meßbar},\ \min\{0, f\} \in \mathscr{L}(\mu)\}\,.$$

Funktionen aus $\mathscr{N}(\mu)$, die im üblichen Sinne nicht integrierbar sind, wird allgemein der Integralwert $+\infty$ zugeschrieben.

In $\mathscr{N}(\mu)$ läßt sich dann — in Verallgemeinerung der schwachen Konvergenz in $\mathscr{L}(\mu)$ — der folgende Konvergenzbegriff einführen:

$$f_n \to f \quad \text{genau dann, wenn} \quad \int_M f_n g \, d\mu \to \int_M f g \, d\mu$$

für jede $\mathfrak{K}$-meßbare, nicht-negative und μ-fast beschränkte Funktion $g|M$.

6. $(M, \mathfrak{K}, \mu)$ heißt Produktraum der Maßräume $(M_i, \mathfrak{K}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$, falls

M die Produktmenge $(M_1, M_2) = \{(x_1, x_2) : x_i \in M_i\}$,

$\mathfrak{K}$ der σ-Körper $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2 = {}^B\{(X_1, X_2) : X_i \in \mathfrak{K}_i\}$,

μ das Produktmaß $\mu_1 \times \mu_2$ mit $\mu((X_1, X_2)) = \prod_{i=1,2} \mu_i(X_i)$

ist (entsprechend bei n-fachen Produkträumen).

7. Mehrmals wird der folgende einfache Approximationssatz verwendet:

Ist $\mu|{}^B\mathfrak{C}$ ein Maß mit einer normalen Zerlegung im Mengenkörper ${}^K\mathfrak{C}$, so existieren zu einer Menge $A \in {}^B\mathfrak{C}$ und zu $\varepsilon > 0$ stets Mengen $A_n \in {}^K\mathfrak{C}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty}{}^{\cdot} A_n \supset A$ derart, daß $\mu(\sum_{n=1}^{\infty}{}^{\cdot} A_n - A) < \varepsilon$.

Im übrigen sei bezüglich der verwendeten Definitionen und Sätze der Maßtheorie verwiesen auf [2] (siehe Literaturverzeichnis).

8. An logistischen Zeichen findet lediglich der definierende Doppelpunkt vor dem Gleichheitszeichen Verwendung.

Auf Satz ... wird allgemein durch [...] hingewiesen; das Symbol $\lrcorner$ dient dazu, das Ende eines Beweises zu kennzeichnen.

Schließlich bezeichnet $\chi_A(x)$ die charakteristische Funktion zur Menge A und Z die Gesamtheit der natürlichen Zahlen.

§ 1. Einleitung

$(M, \mathfrak{R}, \mu)$ sei der Produktraum der Maßräume $(M_1, \mathfrak{R}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathfrak{R}_2, \mu_2)$, die als normal vorausgesetzt seien, um die Existenz des Maßes $\mu|\mathfrak{R}$ sicherzustellen.

Für eine Funktion $f \in \mathscr{M}(\mu)$ gilt dann nach dem Satz von Fubini:

$$(*) \qquad f_1(x_1) := \int\limits_{M_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2 \quad \text{und} \quad f_2(x_2) := \int\limits_{M_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1$$

sind eindeutig definierte nicht-negative $\mathfrak{R}_i$-meßbare Funktionen mit

$$\int\limits_{M_1} f_1\, d\mu_1 = \int\limits_{M_2} f_2\, d\mu_2 = \int\limits_{M} f\, d\mu .$$

Diese Aussage läßt sich folgendermaßen umkehren:

Satz 1.1. $(M, \mathfrak{R}, \mu)$ *sei der Produktraum zweier normaler Maßräume* $(M_i, \mathfrak{R}_i, \mu_i)$ *mit* $\mu_i(M_i) > 0$. *Zu zwei Funktionen* $f_i \in \mathscr{M}(\mu_i)$ *mit*

$$\int\limits_{M_1} f_1\, d\mu_1 = \int\limits_{M_2} f_2\, d\mu_2 =: \gamma$$

existiert dann stets eine Funktion $f \in \mathscr{M}(\mu)$ *mit*

$$\int\limits_{M_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2 = f_1(x_1) \quad \textit{für alle} \quad x_1 \in M_1 ,$$

$$\int\limits_{M_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1 = f_2(x_2) \quad \textit{für alle} \quad x_2 \in M_2 .$$

B e w e i s. 1. Fall: $\gamma = 0$.
Nach Voraussetzung existieren Mengen $X_i \in \mathfrak{R}_i$ mit $0 < \mu_i(X_i) < \infty$; dann werden die Forderungen erfüllt von der Funktion

$$f(x_1, x_2) := \frac{\chi_{X_2}(x_2)}{\mu_2(X_2)} f_1(x_1) + \frac{\chi_{X_1}(x_1)}{\mu_1(X_1)} f_2(x_2) .$$

2. Fall: $0 < \gamma < \infty$.
Hier werden die Forderungen erfüllt von der Funktion

$$f(x_1, x_2) := \frac{1}{\gamma} f_1(x_1) f_2(x_2) .$$

3. Fall: $\gamma = \infty$.
Nach Voraussetzung lassen sich — ausgehend von einer normalen Zerlegung zu $\nu_i(X_i) := \int\limits_{X_i} f_i\, d\mu_i$ — alternierend Zerlegungen $M_i = \sum\limits_{Z} M_i^n$ in $\mathfrak{R}_i$ konstruieren mit

$$0 < \alpha_i^n < \infty \quad \text{für} \quad \alpha_i^n := \int\limits_{M_i^n} f_i\, d\mu_i ,$$

$$\beta_1^1 \leqq \beta_2^1 \leqq \beta_1^2 \leqq \beta_2^2 \leqq \cdots \quad \text{für} \quad \beta_i^n := \sum_{m \leqq n} \alpha_i^m .$$

Die folgende Funktion t ist daher in $\mathscr{M}(\mu)$ enthalten:

$$t(x_1, x_2) := \begin{cases} \dfrac{\beta_1^n - \beta_2^{n-1}}{\alpha_1^n \cdot \alpha_2^n} & \text{für} \quad (x_1, x_2) \in (M_1^n, M_2^n) \\ \dfrac{\beta_2^n - \beta_1^n}{\alpha_1^{n+1} \cdot \alpha_2^n} & \text{für} \quad (x_1, x_2) \in (M_1^{n+1}, M_2^n) \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Die Funktion

$$f(x_1, x_2) := t(x_1, x_2) f_1(x_1) f_2(x_2)$$

besitzt dann die geforderten Eigenschaften:

$$\int_{M_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2 = f_1(x_1) \left[\frac{\beta_2^{n-1} - \beta_1^{n-1}}{\alpha_1^n \cdot \alpha_2^{n-1}} \int_{M_2^{n-1}} f_2\, d\mu_2 + \frac{\beta_1^n - \beta_2^{n-1}}{\alpha_1^n \cdot \alpha_2^n} \int_{M_2^n} f_2\, d\mu_2 \right]$$

$$= \frac{f_1(x_1)}{\alpha_1^n} [(\beta_2^{n-1} - \beta_1^{n-1}) + (\beta_1^n - \beta_2^{n-1})] = f_1(x_1) \quad \text{für} \quad x_1 \in M_1^n$$

(im Fall $n = 1$ fehlt der erste Summand in $[\ldots]$),

$$\int_{M_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1 = f_2(x_2) \left[\frac{\beta_1^n - \beta_2^{n-1}}{\alpha_1^n \cdot \alpha_2^n} \int_{M_1^n} f_1\, d\mu_1 + \frac{\beta_2^n - \beta_1^n}{\alpha_1^{n+1} \cdot \alpha_2^n} \int_{M_1^{n+1}} f_1\, d\mu_1 \right]$$

$$= \frac{f_2(x_2)}{\alpha_2^n} [(\beta_1^n - \beta_2^{n-1}) + (\beta_2^n - \beta_1^n)] = f_2(x_2) \quad \text{für} \quad x_2 \in M_2^n . \;\lrcorner$$

Das Beispiel endlicher Grundmengen M_i zeigt, daß die Voraussetzung „$f_i(x_i) < \infty$ μ_i-fast" in diesem Satz notwendig ist; die Voraussetzung „$\mu_i(M_i) > 0$" ist dagegen lediglich im Fall $\gamma = 0$ erforderlich.

Die vorliegende Arbeit behandelt nun jene Probleme, die sich ergeben, wenn in [1.1] zusätzlich gefordert wird, daß die gesuchte Funktion $f \in \mathscr{M}(\mu)$ von einer gegebenen Funktion $g \in \mathscr{M}(\mu)$ majorisiert wird; es handelt sich also um eine allgemeine Untersuchung der Gesamtheit aller Paare von Funktionen, die sich für $0 \leqq f \leqq g$ in der Gestalt (*) ergeben (die Bedeutung dieses Problemkreises wird erst aus den Anwendungen in einer folgenden Arbeit voll ersichtlich sein).

Zunächst liegt die Vermutung nahe, daß sich eine der Funktionen f_i innerhalb der durch 0 und g gesetzten Grenzen beliebig vorgeben läßt.

Diese Annahme erweist sich als richtig:

Satz 1.2. *$(M, \mathfrak{R}, \mu)$ sei der Produktraum zweier normaler Maßräume $(M_i, \mathfrak{R}_i, \mu_i)$. Ist dann $g \in \mathscr{M}(\mu)$, so existiert zu einer Funktion $f_1 \in \mathscr{M}(\mu_1)$ mit*

$$f_1(x_1) \leqq \int_{M_2} g(x_1, x_2)\, d\mu_2 \quad \textit{für alle} \quad x_1 \in M_1$$

stets eine Funktion $f \in \mathscr{M}(\mu)$ mit $f \leqq g$ derart, daß

$$\int_{M_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2 = f_1(x_1) \quad \textit{für alle} \quad x_1 \in M_1 .$$

Beweis. 1. Ist $M_2 = \sum_Z M_2^n$ eine normale Zerlegung zu $\mu_2 | \mathfrak{R}_2$, so ist

$$g_2(x_2) := \sum_Z (1 + 2^n \mu(M_2^n))^{-1} \chi_{M_2^n}(x_2)$$

eine stets positive Funktion aus $\mathscr{L}(\mu_2)$; für $0 \leqq \alpha < \infty$ sei dann

$$g_\alpha(x_1, x_2) := \min\{g(x_1, x_2), \alpha g_2(x_2)\} .$$

Diese Funktionen sind monoton in α und $\mathfrak{R}$-meßbar in (x_1, x_2) mit

$$g_0 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \to \infty} g_\alpha = g ,$$

$$g_\alpha(x_1, x_2) \leqq g_{\alpha+\delta}(x_1, x_2) \leqq g_\alpha(x_1, x_2) + \delta g_2(x_2) \quad \text{für} \quad \delta > 0 .$$

Für die $\mathfrak{R}_1$-meßbaren Funktionen $h_\alpha(x_1) := \int\limits_{M_2} g_\alpha(x_1, x_2)\, d\mu_2$ gilt also:

$$(1) \qquad \begin{cases} h_\alpha(x_1) \quad \text{ist stetig in } \alpha\,, \\ h_0(x_1) = 0 \leqq f_1(x_1) \leqq \int\limits_{M_2} g(x_1, x_2)\, d\mu_2 = \lim\limits_{\alpha \to \infty} h_\alpha(x_1) \quad \text{für alle} \quad x_1 \in M_1\,, \end{cases}$$

wobei die Stetigkeit aus $\int\limits_{M_2} g_2\, d\mu_2 < \infty$ und die letzte Gleichung aus dem Satz über die Integration bei monotoner Konvergenz folgt.

2. Die Funktion

$$f(x_1, x_2) := \sup_{\alpha \text{ rational}} \chi_{\{h_\alpha \leqq f_1\}}(x_1) \cdot g_\alpha(x_1, x_2)$$

besitzt nun die geforderten Eigenschaften.

Zunächst ist f wegen $\{h_\alpha \leqq f_1\} \in \mathfrak{R}_1$ jedenfalls $\mathfrak{R}$-meßbar mit $0 \leqq f \leqq g$.

Ferner sind die Funktionen g_α bezüglich „$\leqq$" linear geordnet, so daß

$$\int\limits_{M_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2 = \sup \int\limits_{M_2} g_\alpha(x_1, x_2)\, d\mu_2\,,$$

wobei das Supremum über alle rationalen Zahlen α mit $x_1 \in \{h_\alpha \leqq f_1\}$ zu bilden ist; für $x_1 \in M_1$ gilt also stets:

$$\int\limits_{M_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2 = \sup\{h_\alpha(x_1) : \alpha \text{ rational}, h_\alpha(x_1) \leqq f_1(x_1)\}\,.$$

Da die rationalen Zahlen dicht liegen, folgt daraus wegen (1) die Behauptung. ⌋

Werden nun beide Funktionen f_i gleichzeitig betrachtet, so folgen aus den bisherigen Überlegungen als notwendige Bedingungen für ihr Auftreten in der Gestalt (*) mit $0 \leqq f \leqq g$ sofort:

$$\int\limits_{M_1} f_1\, d\mu_1 = \int\limits_{M_2} f_2\, d\mu_2$$

sowie

$$0 \leqq f_1(x_1) \leqq \int\limits_{M_2} g(x_1, x_2)\, d\mu_2 \quad \text{für alle} \quad x_1 \in M_1\,,$$

$$0 \leqq f_2(x_2) \leqq \int\limits_{M_1} g(x_1, x_2)\, d\mu_1 \quad \text{für alle} \quad x_2 \in M_2\,.$$

Daß diese Bedingungen nicht genügen, zeigt das folgende Beispiel.

Es seien $(M_i, \mathfrak{R}_i, \mu_i)$ zwei beschränkte Maßräume und $g := 1$. Ist dann f eine $\mathfrak{R}$-meßbare Funktion mit $0 \leqq f \leqq g$ derart, daß

$$f_1(x_1) := \int\limits_{M_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2 = \mu_2(M_2) \cdot \chi_{X_1}(x_1) \quad \text{für alle} \quad x_1 \in M_1$$

mit einer festen Menge $X_1 \in \mathfrak{R}_1$, so ist notwendigerweise

$$f_2(x_2) := \int\limits_{M_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1 = \mu_1(X_1) \quad \text{für } \mu_2\text{-fast alle} \quad x_2 \in M_2\,;$$

denn für jede Menge $X_2 \in \mathfrak{R}_2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{X_2} f_2\,d\mu_2 &= \int_{\bar X_1} f_1\,d\mu_1 + \int_{(X_1,X_2)} f\,d\mu - \int_{(\bar X_1,\bar X_2)} f\,d\mu \leqq \\
&\leqq 0 + \int_{(X_1,X_2)} g\,d\mu - 0 \\
&= \int_{X_2} \mu_1(X_1)\,d\mu_2 \\
&= \mu_1(X_1)\cdot\mu_2(M_2) + 0 - \int_{(X_1,\bar X_2)} g\,d\mu \leqq \\
&\leqq \int_{X_1} f_1\,d\mu_1 + \int_{(\bar X_1,X_2)} f\,d\mu - \int_{(X_1,\bar X_2)} f\,d\mu = \int_{X_2} f_2\,d\mu_2 .
\end{aligned}$$

Hier ist die Funktion f_2 also nicht innerhalb der durch $0 \leqq f_2 \leqq \mu_1(M_1)$ und $\int_{M_2} f_2\,d\mu_2 = \mu_1(X_1)\,\mu_2(M_2)$ gegebenen Grenzen beliebig wählbar, sondern durch die Funktion f_1 bereits im wesentlichen festgelegt.

§ 2. Problemstellung

Bevor im Anschluß an das Gegenbeispiel aus § 1 schärfere notwendige Bedingungen abgeleitet werden, ist es zweckmäßig, einige Bezeichnungen einzuführen.

Definition. 1. Ist $f \in \mathscr{M}(\mu)$, so werden die Funktionen

$$f_1(x_1) := \int_{M_2} f(x_1, x_2)\,d\mu_2 \quad \text{und} \quad f_2(x_2) := \int_{M_1} f(x_1, x_2)\,d\mu_1$$

als die „Marginal-Funktionen" der Funktion f bezeichnet; für das Paar (f_1, f_2) wird die Abkürzung $[f; \mu_i]$ verwendet.

2. Ist $g \in \mathscr{M}(\mu)$, so ist $\mathscr{F}_g[\mu]$ die Gesamtheit aller Paare $[f; \mu_i]$ zu Funktionen $f \in \mathscr{M}(\mu)$ mit $f \leqq g$; bei μ_i-fast endlichen Marginal-Funktionen von g ist $\mathscr{F}_g[\mu]$ enthalten in

$$\mathscr{M}[\mu] := (\mathscr{M}(\mu_1), \mathscr{M}(\mu_2)).$$

3. Gleichheit, Konvergenz, Addition und Multiplikation mit einem nichtnegativen Skalarfaktor werden in $\mathscr{M}[\mu]$ komponentenweise definiert; $\mathscr{M}[\mu]$ wird dadurch zu einem topologischen Raum derart, daß

$$\sum_{k=1,2} \alpha^k (f_1^k, f_2^k) \in \mathscr{M}[\mu], \quad \text{falls} \quad \alpha^k \geqq 0 \quad \text{und} \quad (f_1^k, f_2^k) \in \mathscr{M}[\mu] .$$

Mit diesen Bezeichnungen läßt sich nun sehr einfach eine wesentliche notwendige Bedingung für „$(f_1, f_2) \in \mathscr{F}_g[\mu]$" ableiten:

Ist $(f_1, f_2) = [f; \mu_i]$ mit $0 \leqq f \leqq g$, so gilt für Mengen $X_i \in \mathfrak{R}_i$ stets:

$$\begin{aligned}
\int_{X_1} f_1\,d\mu_1 = \int_{(X_1, M_2)} f\,d\mu \leqq \int_{(X_1,X_2)} f\,d\mu + \int_{(M_1,\bar X_2)} f\,d\mu \leqq \\
\leqq \int_{(X_1,X_2)} g\,d\mu + \int_{\bar X_2} f_2\,d\mu_2 .
\end{aligned}$$

Zusammen mit der durch Vertauschung von 1 und 2 entstehenden Ungleichung führt das zu der Bedingung

$$\text{(G)} \qquad \left|\begin{array}{ll} \text{I} & \int_{X_1} f_1\,d\mu_1 \leqq \int_{(X_1,X_2)} g\,d\mu + \int_{\bar X_2} f_2\,d\mu_2 \\ \text{II} & \int_{X_2} f_2\,d\mu_2 \leqq \int_{(X_1,X_2)} g\,d\mu + \int_{\bar X_1} f_1\,d\mu_1 \end{array}\right| \quad \text{für alle} \quad X_i \in \mathfrak{R}_i .$$

(G) ist tatsächlich eine Verschärfung der in § 1 angegebenen Bedingungen:

Satz 2.1. *Genügen die Funktionen* $g \in \mathscr{M}(\mu)$ *und* $f_i \in \mathscr{N}(\mu_i)$ *der Bedingung* (G), *so gilt insbesondere:*

$$\int_{M_1} f_1\, d\mu_1 = \int_{M_2} f_2\, d\mu_2 \quad \textit{und} \quad \mu_i\textit{-fast}$$

$$0 \leqq f_1(x_1) \leqq \int_{M_2} g(x_1, x_2)\, d\mu_2, \quad 0 \leqq f_2(x_2) \leqq \int_{M_1} g(x_1, x_2)\, d\mu_1 .$$

Beweis. Für $(X_1, X_2) = (M_1, 0)$ und $(X_1, X_2) = (0, M_2)$ führt (G) zu:

$$\int_{M_1} f_1\, d\mu_1 \leqq \int_{M_2} f_2\, d\mu_2 \leqq \int_{M_1} f_1\, d\mu_1 .$$

Für $X_2 = M_2$ in (G) I und $X_2 = 0$ in (G) II folgt ferner:

$$\int_{X_1} f_1\, d\mu_1 \leqq \int_{X_1} \left(\int_{M_2} g(x_1, x_2)\, d\mu_2 \right) d\mu_1 \quad \text{und} \quad 0 \leqq \int_{X_1} f_1\, d\mu_1 \quad \text{für alle} \quad X_1 \in \mathfrak{R}_1 ;$$

da bei Vertauschung von 1 und 2 entsprechende Ungleichungen gelten, ist also μ_i-fast

$$0 \leqq f_1(x_1) \leqq \int_{M_2} g(x_1, x_2)\, d\mu_2, \quad 0 \leqq f_2(x_2) \leqq \int_{M_1} g(x_1, x_2)\, d\mu_1 . \qquad \lrcorner$$

In einem wichtigen Fall läßt sich (G) etwas vereinfachen:

Satz 2.2. *Liegt die Funktion g in* $\mathscr{L}(\mu)$, *so ist die Bedingung* (G) *gleichwertig mit dem System*

$$\int_{M_1} f_1\, d\mu_1 = \int_{M_2} f_2\, d\mu_2 =: \gamma ,$$

$$\gamma \leqq \int_{(X_1, X_2)} g\, d\mu + \sum_{i=1,2} \int_{X_i} f_i\, d\mu_i \quad \text{für alle} \quad X_i \in \mathfrak{R}_i .$$

Beweis. 1. Aus (G) folgt nach [2.1] zunächst $\int_{M_1} f_1\, d\mu_1 = \int_{M_2} f_2\, d\mu_2$; Addition von $\int_{X_i} f_i\, d\mu_i$ auf beiden Seiten der i-ten Ungleichung in (G) ergibt ferner die angegebene Ungleichung.

2. Umgekehrt folgt aus

$$\int_{M_i} f_i\, d\mu_i \leqq \int_{(X_1, X_2)} g\, d\mu + \sum_{i=1,2} \int_{X_i} f_i\, d\mu_i$$

durch Subtraktion der wegen $\int_{M_i} f_i\, d\mu_i \leqq \int_{(M_1, M_2)} g\, d\mu$ endlichen Größe $\int_{X_i} f_i\, d\mu_i$ auf beiden Seiten die i-te Ungleichung in (G). $\lrcorner$

Ergänzend ist hier festzustellen, daß es genügt, die Ungleichung

$$\gamma \leqq \int_{(X_1, X_2)} g\, d\mu + \sum_{i=1,2} \int_{X_i} f_i\, d\mu_i$$

lediglich zu fordern für die Mengen X_i eines Mengenkörpers $\mathfrak{S}_i$ mit ${}^{B}\mathfrak{S}_i = \mathfrak{R}_i$.

Ist zunächst X_1^n, X_2^n eine in beiden Komponenten aufsteigende bzw. absteigende Folge von Mengenpaaren, die dieser Ungleichung genügen, so gilt dies auch für das Mengenpaar X_1^0, X_2^0 mit $X_i^0 := \sum_{Z}^{\cdot} X_i^n$ bzw. $X_i^0 := \prod_{Z}^{\cdot} X_i^n$, da die auftretenden Integrale nach Voraussetzung stets endlich sind.

Mit den Bezeichnungen $\varrho_1(Y_1) := \int\limits_{(Y_1, M_2)} g\, d\mu$ und $\varrho_2(Y_2) := \int\limits_{(M_1, Y_2)} g\, d\mu$ existieren nun nach dem zu Beginn angegebenen Approximationssatz zu $X_i \in \mathfrak{K}_i$ stets Mengen $X_i^{mn} \in \mathfrak{S}_i$ mit

$$\prod_{m\in Z}{}^{\cdot} \sum_{n\in Z}{}^{\cdot} X_i^{mn} \supset X_i \quad \text{und} \quad \varrho_i\Big(\prod_{m\in Z}{}^{\cdot} \sum_{n\in Z}{}^{\cdot} X_i^{mn} - X_i\Big) = 0\,,$$

wobei sich zusätzlich voraussetzen läßt:

$$X_i^{m1} \subset X_i^{m2} \subset \cdots, \quad \sum_{Z}{}^{\cdot} X_i^{1n} \supset \sum_{Z}{}^{\cdot} X_i^{2n} \supset \cdots.$$

Daraus folgt wegen $0 \leqq \int\limits_{Y_i} f_i\, d\mu_i \leqq \varrho_i(Y_i)$ die Behauptung.

Allgemein lassen sich, ohne die Funktion $g \in \mathcal{M}(\mu)$ gemäß [2.2] einzuschränken, die Ungleichungen so vereinfachen, daß in I und II jeweils nur eine variable Menge X_i auftritt. Dazu ist es notwendig, für $f_i \in \mathcal{M}(\mu_i)$ — bei festen Maßräumen $(M_i, \mathfrak{K}_i, \mu_i)$ — die folgenden Mengenfunktionen auf $\mathfrak{K}_i$ zu betrachten.

Definition. $\varphi_1(X_1; g; f_2) := \int\limits_{M_2} \min\Big\{f_2(x_2), \int\limits_{X_1} g(x_1, x_2)\, d\mu_1\Big\}\, d\mu_2\,,$

$$\varphi_2(X_2; g; f_1) := \int\limits_{M_1} \min\Big\{f_1(x_1), \int\limits_{X_2} g(x_1, x_2)\, d\mu_2\Big\}\, d\mu_1\,.$$

Diese Funktionen sind definiert, da die Integranden in $\mathcal{M}(\mu_i)$ liegen.

Mit ihrer Hilfe läßt sich (G) folgendermaßen umformen:

Satz 2.3. *Die Bedingung* (G) *ist gleichwertig mit den Ungleichungen*

$$\int\limits_{X_1} f_1\, d\mu_1 \leqq \varphi_1(X_1; g; f_2) \quad \textit{für alle} \quad X_1 \in \mathfrak{K}_1\,,$$

$$\int\limits_{X_2} f_2\, d\mu_2 \leqq \varphi_2(X_2; g; f_1) \quad \textit{für alle} \quad X_2 \in \mathfrak{K}_2\,.$$

Beweis. Die Behauptung folgt etwa für die erste Ungleichung sofort aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathfrak{K}_2}\Big(\int\limits_{(X_1, X_2)} g\, d\mu + \int\limits_{X_2'} f_2\, d\mu_2\Big)\\
&= \min_{\mathfrak{K}_2} \int\limits_{M_2} \Big[\chi_{X_2}(x_2) \cdot \int\limits_{X_1} g(x_1, x_2)\, d\mu_1 + \chi_{X_2'}(x_2) \cdot f_2(x_2)\Big]\, d\mu_2\\
&= \int\limits_{M_2} \min\Big\{\int\limits_{X_1} g(x_1, x_2)\, d\mu_1, f_2(x_2)\Big\}\, d\mu_2\\
&= \varphi_1(X_1; g; f_2) \quad \text{für alle} \quad X_1 \in \mathfrak{K}_1\,.
\end{aligned}$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß $\varphi_i | \mathfrak{K}_i$ Maßfunktionen sind; denn mit der Abkürzung $\varphi_1(X_1) := \varphi_1(X_1; g; f_2)$ bzw. $\varphi_2(X_2) := \varphi_2(X_2; g; f_1)$ gilt:

$$\varphi_i(0) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_i(X_i) \leqq \varphi_i(Y_i) \quad \text{für} \quad X_i \subset Y_i\,,$$

$$\varphi_i\Big(\sum_{Z} X_i^n\Big) \leqq \sum_{Z} \varphi_i(X_i^n) \quad \text{für} \quad X_i^n \in \mathfrak{K}_i\,.$$

Beim Nachweis der letzten Ungleichung ist lediglich zu beachten, daß für $\alpha, \beta_n \geqq 0$ stets

$$\min\Big\{\alpha, \sum_{Z} \beta_n\Big\} \leqq \sum_{Z} \min\{\alpha, \beta_n\}\,.$$

Wegen $f_i, g \geqq 0$ gilt also etwa für $i = 1$:

$$\min\left\{f_2(x_2), \sum_{Z} \int_{X_1^n} g(x_1, x_2)\, d\mu_1\right\} \leqq$$

$$\leqq \sum_{Z} \min\left\{f_2(x_2), \int_{X_1^n} g(x_1, x_2)\, d\mu_1\right\} \quad \text{für alle} \quad x_2 \in M_2;$$

das führt nach dem Satz über die Integration bei monotoner Konvergenz mit der Bezeichnung $g_n(x_2) := \min\left\{f_2(x_2), \int_{X_1^n} g(x_1, x_2)\, d\mu_1\right\}$ zu:

$$\varphi_1\left(\sum_{Z} X_1^n\right) \leqq \int_{M_2}\left(\sum_{Z} g_n\right) d\mu_2 = \sum_{Z} \int_{M_2} g_n\, d\mu_2 = \sum_{Z} \varphi_1(X_1^n)\,.$$

Nachdem in [2.1]—[2.3] einige einfache Eigenschaften der Bedingung (G) abgeleitet wurden, stellt sich nun als „Hauptproblem" die Frage:

Ist die für die Existenz einer Funktion $f \in \mathscr{M}(\mu)$ mit $f \leqq g$ und $[f; \mu_i] = (f_1, f_2)$ notwendige Bedingung (G) auch hinreichend?

Zur Untersuchung dieser Frage wird die Problemstellung zunächst in zwei Schritten vereinfacht.

Nach dem Übergang zu Maßen mittels

$$\varrho(A) := \int_A g\, d\mu \quad \text{für } A \in \mathfrak{R} \quad \text{und} \quad \nu_i(X_i) := \int_{X_i} f_i\, d\mu_i \quad \text{für } X_i \in \mathfrak{R}_i$$

lautet das Problem:

Wann existiert ein Maß $\nu | \mathfrak{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\nu(A) \leqq \varrho(A) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{R}\,,$$

$$\nu((X_1, M_2)) = \nu_1(X_1),\ \nu((M_1, X_2)) = \nu_2(X_2) \quad \text{für alle} \quad X_i \in \mathfrak{R}_i\ ?$$

Der Bedingung (G) entspricht hier die notwendige Bedingung

$$\text{(R)} \qquad \left\{\begin{matrix} \text{I} & \nu_1(X_1) \leqq \varrho((X_1, X_2)) + \nu_2(\overline{X}_2) \\ \text{II} & \nu_2(X_2) \leqq \varrho((X_1, X_2)) + \nu_1(\overline{X}_1) \end{matrix}\right\} \quad \text{für alle} \quad X_i \in \mathfrak{R}_i\,.$$

Unter der zusätzlichen Annahme endlicher Grundmengen

$$M_i := \{1, \ldots, n_i\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}_i := \{X_i : X_i \subset M_i\}$$

und mit den Abkürzungen

$$t(x_1, x_2) := \varrho(\{(x_1, x_2)\}) \quad \text{und} \quad s_i(x_i) := \nu_i(\{x_i\})$$

ergibt sich schließlich ein Problem für Matrizen:

Wann existiert eine Matrix $s | M$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$0 \leqq s(x_1, x_2) \leqq t(x_1, x_2)\,,$$

$$\sum_{M_2} s(x_1, x_2) = s_1(x_1),\ \sum_{M_1} s(x_1, x_2) = s_2(x_2) \quad \text{für alle} \quad x_i \in M_i\ ?$$

Der Bedingung (R) entspricht hier die notwendige Bedingung

$$\text{(T)} \qquad \left|\begin{matrix} \text{I} & \sum_{X_1} s_1(x_1) \leqq \sum_{(X_1, X_2)} t(x_1, x_2) + \sum_{\overline{X}_2} s_2(x_2) \\ \text{II} & \sum_{X_2} s_2(x_2) \leqq \sum_{(X_1, X_2)} t(x_1, x_2) + \sum_{\overline{X}_1} s_1(x_1) \end{matrix}\right| \quad \text{für alle} \quad X_i \subset M_i\,.$$

§ 3. Das Problem bei Matrizen

Das in § 2 formulierte Hauptproblem wird nun zunächst im Fall von Matrizen untersucht. Gegeben sind also eine nicht-negative Matrix $t|M$ und nicht-negative Vektoren $s_i|M_i$, die der Bedingung (T) genügen; gesucht ist eine nicht-negative Matrix $s|M$, die von $t|M$ majorisiert wird und die Reihensummen $s_i|M_i$ besitzt.

Im Fall der Existenz ist notwendigerweise stets $s(x_1, x_2) \leqq \min\limits_{i=1,2} s_i(x_i)$.

Daher ist die folgende Tatsache von Bedeutung:

Satz 3.1. *Genügen die Funktionen $t|M$ und $s_i|M_i$ mit $0 \leqq t$, $s_i \leqq \infty$ der Bedingung* (T), *so gilt dies auch, falls die Werte $t(x_1, x_2)$ ersetzt werden durch* $\min\{t(x_1, x_2), s_1(x_1), s_2(x_2)\}$.

Beweis. 1. Es genügt, zu zeigen, daß die Ungleichungen (T) beim Übergang zu $t'(x_1, x_2) := \min\{t(x_1, x_2), s_1(x_1)\}$ bestehen bleiben; denn ebenso läßt sich dann der Übergang zu $t''(x_1, x_2) := \min\{t'(x_1, x_2), s_2(x_2)\}$ rechtfertigen.

2. Für feste Mengen $X_i \subset M_i$ gelten mit der Bezeichnung

$$Y_1 := \{x_1 \in X_1 : t(x_1, x_2) < s_1(x_1) \text{ für } x_2 \in X_2\} \quad \text{und} \quad Z_1 := X_1 - Y_1$$

die folgenden Ungleichungen:

$$\text{I} \qquad \begin{aligned} \sum_{X_1} s_1 &= \sum_{Z_1} s_1 + \sum_{Y_1} s_1 \leqq \sum_{Z_1} s_1 + \sum_{(Y_1, X_2)} t + \sum_{\overline{X}_2} s_2 \leqq \\ &\leqq \sum_{Z_1} \sum_{X_2} \min\{t(x_1, x_2), s_1(x_1)\} + \sum_{(Y_1, X_2)} t + \sum_{\overline{X}_2} s_2 \\ &= \sum_{(Z_1, X_2)} t' + \sum_{(Y_1, X_2)} t' + \sum_{\overline{X}_2} s_2 = \sum_{(X_1, X_2)} t' + \sum_{\overline{X}_2} s_2, \end{aligned}$$

$$\text{II} \qquad \begin{aligned} \sum_{X_2} s_2 &\leqq \sum_{(Y_1, X_2)} t + \sum_{\overline{Y}_1} s_1 = \sum_{(Y_1, X_2)} t + \sum_{Z_1} s_1 + \sum_{\overline{X}_1} s_1 \leqq \\ &\leqq \sum_{(Y_1, X_2)} t + \sum_{Z_1} \sum_{X_2} \min\{t(x_1, x_2), s_1(x_1)\} + \sum_{\overline{X}_1} s_1 \\ &= \sum_{(Y_1, X_2)} t' + \sum_{(Z_1, X_2)} t' + \sum_{\overline{X}_1} s_1 = \sum_{(X_1, X_2)} t' + \sum_{\overline{X}_1} s_1. \end{aligned}$$

Noch wichtiger als diese Reduktionsmöglichkeit ist eine zweite.

Die Bedingung (T) leitet sich etwa für die Ungleichung I folgendermaßen ab:

$$\sum_{X_1} s_1 = \sum_{(X_1, M_2)} s \leqq \sum_{(X_1, X_2)} s + \sum_{(M_1, \overline{X}_2)} s \leqq \sum_{(X_1, X_2)} t + \sum_{\overline{X}_2} s_2.$$

Sind also für ein Paar Y_1, Y_2 die beiden Seiten der Ungleichung I endlich und gleich, so gilt:

$$\sum_{(\overline{Y}_1, \overline{Y}_2)} s = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{(Y_1, Y_2)} s = \sum_{(Y_1, Y_2)} t < \infty,$$

so daß wegen $0 \leqq s \leqq t$ notwendigerweise:

$$s = 0 \text{ auf } (\overline{Y}_1, \overline{Y}_2) \quad \text{und} \quad s = t \text{ auf } (Y_1, Y_2).$$

Wenn die Bedingung (T) wirklich hinreichend ist, so muß sie daher auch erfüllt sein für die Funktionen $t'|M$ und $s_i'|M_i$, die sich aus $t|M$ und $s_i|M_i$ unter Berücksichtigung der Eindeutigkeit von s auf der Menge $(Y_1, Y_2) + (\overline{Y}_1, \overline{Y}_2)$ ergeben.

Diese Folgerung erweist sich als richtig:

Satz 3.2. *Für die Funktionen $t|M$ und $s_i|M_i$ sei neben $0 \leqq t,\ s_i \leqq \infty$ die Bedingung* (T) *erfüllt. Sind dann für ein Paar Y_1, Y_2 die beiden Seiten der Ungleichung* I *oder* II *endlich und gleich, so erfüllen auch die folgenden Funktionen $t'|M$ und $s_i'|M_i$ neben $0 \leqq t',\ s_i' \leqq \infty$ die Bedingung* (T):

$$t'(x_1, x_2) := \begin{cases} 0 & \textit{auf} \quad (Y_1, Y_2) + (\overline{Y}_1, \overline{Y}_2) \\ t(x_1, x_2) & \textit{sonst} \end{cases}$$

und

$$s_1'(x_1) := s_1(x_1) - \chi_{Y_1}(x_1) \cdot \sum_{Y_2} t(x_1, x_2),$$

$$s_2'(x_2) := s_2(x_2) - \chi_{Y_2}(x_2) \cdot \sum_{Y_1} t(x_1, x_2).$$

Beweis. 1. Es sei etwa $\sum\limits_{Y_1} s_1 = \sum\limits_{(Y_1, Y_2)} t + \sum\limits_{\overline{Y}_2} s_2 < \infty$.

Da jedenfalls $s_i'(x_i) > -\infty$ für alle $x_i \in M_i$, genügt es, für die Funktionen $t'|M$ und $s_i'|M_i$ die Ungleichungen (T) nachzuweisen; denn $s' \geqq 0$ ist dann nach [2.1] eine Folgerung.

2. Zunächst gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\sum_{X_1 Y_1} s_1 \leqq \Big(\sum_{(X_1 Y_1, Y_2)} t + \sum_{(X_1 Y_1, X_2 \overline{Y}_2)} t\Big) + \sum_{\overline{X}_2 \overline{Y}_2} s_2 \qquad \text{(wegen (T) I)}$$

$$\sum_{X_1 \dotplus Y_1} s_1 \leqq \Big(\sum_{(Y_1, X_2 Y_2)} t + \sum_{(X_1 \overline{Y}_1, X_2 Y_2)} t\Big) + \sum_{\overline{X}_2 \dotplus \overline{Y}_2} s_2 \qquad \text{(wegen (T) II)}$$

$$-\sum_{Y_1} s_1 = \Big(-\sum_{(Y_1, X_2 Y_2)} t - \sum_{(Y_1, \overline{X}_2 Y_2)} t\Big) - \sum_{\overline{Y}_2} s_2 \qquad \text{(Voraussetzung)}$$

$$-\sum_{(X_1 Y_1, Y_2)} t = -\sum_{(X_1 \overline{Y}_1, Y_2)} t\,.$$

Da die negativen Glieder endlich sind, lassen sich diese Ungleichungen addieren; unter Beachtung von

$$\chi_{X_1} + \chi_{Y_1} = \chi_{X_1 Y_1} + \chi_{X_1 \dotplus Y_1}, \quad \chi_{\overline{X}_2} + \chi_{\overline{Y}_2} = \chi_{\overline{X}_2 \overline{Y}_2} + \chi_{\overline{X}_2 \dotplus \overline{Y}_2}$$

ergibt das:

$$\Big(\sum_{X_1} s_1 - \sum_{(X_1 Y_1, Y_2)} t\Big) \leqq \Big(\sum_{(X_1, X_2)(Y_1, \overline{Y}_2)} t + \sum_{(X_1, X_2)(\overline{Y}_1, Y_2)} t\Big) + \Big(\sum_{\overline{X}_2} s_2 - \sum_{(Y_1, \overline{X}_2 Y_2)} t\Big),$$

so daß nach Definition der Funktionen $t'|M$ und $s_i'|M_i$ stets

I $$\sum_{X_1} s_1' \leqq \sum_{(X_1, X_2)} t' + \sum_{\overline{X}_2} s_2' \quad \text{für} \quad X_i \subset M_i\,.$$

3. Ferner gelten die folgenden Ungleichungen:

$$-\sum_{\overline{X}_2 \overline{Y}_2} s_2 \leqq \Big(\sum_{(X_1 Y_1, Y_2)} t + \sum_{(X_1 Y_1, X_2 \overline{Y}_2)} t\Big) - \sum_{X_1 Y_1} s_1 \qquad \text{(wegen (T) I)}$$

$$\sum_{X_2 Y_2} s_2 \leqq \Big(\sum_{(Y_1, X_2 Y_2)} t + \sum_{(X_1 \overline{Y}_1, X_2 Y_2)} t\Big) + \sum_{\overline{X}_1 \overline{Y}_1} s_1 \qquad \text{(wegen (T) II)}$$

$$\sum_{\overline{Y}_2} s_2 = \Big(-\sum_{(X_1 Y_1, Y_2)} t - \sum_{(\overline{X}_1 Y_1, Y_2)} t\Big) + \sum_{Y_1} s_1 \qquad \text{(Voraussetzung)}$$

$$-\sum_{(Y_1, X_2 Y_2)} t = -\sum_{(Y_1, X_2 Y_2)} t\,.$$

Daraus folgt unter Beachtung von

$$\chi_{\bar X_1} + \chi_{X_1 Y_1} = \chi_{Y_1} + \chi_{\bar X_1 \bar Y_1}, \quad \chi_{X_2} + \chi_{\bar X_2 \bar Y_2} = \chi_{\bar Y_2} + \chi_{X_2 Y_2}$$

ähnlich wie in Teil 2:

$$\Big(\sum_{X_2} s_2 - \sum_{(Y_1, X_2 Y_2)} t\Big) \leqq \Big(\sum_{(X_1, X_2)(Y_1, \bar Y_2)} t + \sum_{(X_1, X_2)(\bar Y_1, Y_2)} t\Big) + \Big(\sum_{\bar X_1} s_1 - \sum_{(\bar X_1 Y_1, Y_2)} t\Big),$$

so daß nach Definition der Funktionen $t'|M$ und $s'_i|M_i$ stets

$$\text{II} \qquad \sum_{X_2} s'_2 \leqq \sum_{(X_1, X_2)} t' + \sum_{\bar X_1} s'_1 \quad \text{für} \quad X_i \subset M_i . \qquad \lrcorner$$

Mit Hilfe von [3.1] und [3.2] läßt sich nun zeigen, daß die notwendige Bedingung (T) tatsächlich auch hinreichend ist:

Satz 3.3. *Erfüllen die Funktionen $t|M$ und $s_i|M_i$ neben $0 \leqq t, s_i \leqq \infty$ die Bedingung* (T), *so existiert eine Funktion $s|M$ mit den folgenden Eigenschaften:*

$$0 \leqq s \leqq t ,$$

$$\sum_{M_2} s(x_1, x_2) = s_1(x_1), \sum_{M_1} s(x_1, x_2) = s_2(x_2) \quad \text{für alle} \quad x_i \in M_i .$$

Beweis. 1. Es wird vollständige Induktion nach $n := n_1 + n_2$ durchgeführt. Für $n = 2$ führt die Bedingung (T) nach [2.1] zu:

$$0 \leqq s_1(1) = \gamma = s_2(1) \leqq t(1, 1) .$$

Daher definiert $s := \gamma$ eine Lösung.

2. Für beliebiges n gilt bei geeigneter Numerierung:

$$s_i(x_i) < \infty \quad \text{für} \quad x_i \leqq m_i, \quad s_i(x_i) = \infty \quad \text{für} \quad x_i > m_i \qquad (0 \leqq m_i \leqq n_i).$$

Wegen [3.1] läßt sich also annehmen:

$$t(x_1, x_2) < \infty, \quad \text{falls} \quad x_1 \leqq m_1 \quad \text{oder} \quad x_2 \leqq m_2 .$$

Ferner läßt sich voraussetzen, daß sich die Werte der Funktion $t|M$ an diesen Stellen — soweit positiv — nicht verringern lassen, ohne die Bedingung (T) zu verletzen; denn andernfalls ist eine schrittweise Verkleinerung dieser Werte unter Berücksichtigung von jeweils 2^{n+1} Ungleichungen möglich.

3. Verschwindet die so reduzierte Funktion $t|M$ an allen Stellen (x_1, x_2) mit $x_1 \leqq m_1$ oder $x_2 \leqq m_2$, so ergibt

$$0 \leqq s_1(x_1) \leqq \sum_{M_2} t(x_1, x_2), 0 \leqq s_2(x_2) \leqq \sum_{M_1} t(x_1, x_2) \quad \text{für alle} \quad x_i \in M_i$$

die Gleichungen:

$$s_i(x_i) = 0 \quad \text{für} \quad x_i \leqq m_i ,$$

$$\sum_{M_2} t(x_1, x_2) = \infty = \sum_{M_1} t(x_1, x_2) \quad \text{für} \quad x_i > m_i .$$

Daher definiert in diesem Fall $s := t$ eine Lösung.

4. Ist dagegen $t(x_1^0, x_2^0) > 0$ mit $x_1^0 \leqq m_1$ oder $x_2^0 \leqq m_2$, so sind also für ein Paar Y_1, Y_2 mit $x_i^0 \in Y_i$ die beiden Seiten der Ungleichung I oder II gleich

und endlich, d. h. es ist etwa

$$\sum_{Y_1} s_1 = \sum_{(Y_1, Y_2)} t + \sum_{\overline{Y}_2} s_2 < \infty .$$

Daher ist $Y_1 \subset \{1, \ldots, m_1\}$ und $\overline{Y}_2 \subset \{1, \ldots, m_2\}$, also bei geeigneter Numerierung:

$$Y_1 = \{1, \ldots, l_1\} \quad \text{und} \quad Y_2 = \{l_2 + 1, \ldots, n_2\} \qquad (0 \leqq l_i \leqq m_i) .$$

5. Werden nun die Funktionen $t'|M$ und $s_i'|M_i$ gemäß [3.2] definiert, so gilt, da t' auf $(Y_1, Y_2) + (\overline{Y}_1, \overline{Y}_2)$ verschwindet:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & \sum\limits_{X_1} s_1' \leqq \sum\limits_{(X_1, X_2 + Y_2)} t' + \sum\limits_{Y_2 - X_2} s_2' = \sum\limits_{(X_1, X_2)} t' + \sum\limits_{Y_2 - X_2} s_2' \\ \text{II} & \sum\limits_{X_2} s_2' \leqq \sum\limits_{(X_1 + Y_1, X_2)} t' + \sum\limits_{Y_1 - X_1} s_1' = \sum\limits_{(X_1, X_2)} t' + \sum\limits_{Y_1 - X_1} s_1' \end{array}\right| \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} X_1 \subset Y_1 \\ X_2 \subset \overline{Y}_2 , \end{array}$$

und entsprechende Ungleichungen gelten im Rechteck $(\overline{Y}_1, Y_2)$.

Da wegen $Y_i \neq 0$ jedenfalls $l_1 + l_2 < n$ und $(n_1 - l_1) + (n_2 - l_2) < n$, existieren also nach Induktionsannahme Funktionen $s|(Y_1, \overline{Y}_2)$ bzw. $s|(\overline{Y}_1, Y_2)$ mit $0 \leqq s \leqq t'$ derart, daß

$$\sum_{x_2 \leqq l_2} s(x_1, x_2) = s_1'(x_1) \quad \text{für} \quad x_1 \leqq l_1 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{x_2 > l_2} s(x_1, x_2) = s_1'(x_1) \quad \text{für} \quad x_1 > l_1,$$

$$\sum_{x_1 \leqq l_1} s(x_1, x_2) = s_2'(x_2) \quad \text{für} \quad x_2 \leqq l_2 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{x_1 > l_1} s(x_1, x_2) = s_2'(x_2) \quad \text{für} \quad x_2 > l_2 .$$

Wird zusätzlich definiert:

$$s := t \text{ auf } (Y_1, Y_2) \quad \text{und} \quad s := 0 \text{ auf } (\overline{Y}_1, \overline{Y}_2) ,$$

so besitzt die Funktion $s|M$ offensichtlich alle geforderten Eigenschaften. ⌟

Von Interesse ist in diesem Zusammenhang, daß [3.3] die folgende Verschärfung gestattet:

Satz 3.4. *Sind in* [3.3] *die Funktionswerte von $t|M$ und $s_i|M_i$ ganze Zahlen, so ist dies auch für die Werte der Funktion $s|M$ erreichbar.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Tatsache, daß sich die Beweise zu [3.1]—[3.3] im vorliegenden Fall völlig im Bereich der ganzen Zahlen durchführen lassen. ⌟

Ist insbesondere $t = 1$, handelt es sich also um jene Matrizen, die nur die Elemente 0 und 1 besitzen, so ist die Frage nach den auftretenden — ganzzahligen — Reihensummen s_i besonders leicht zu beantworten.

Zunächst läßt sich durch geeignete Numerierung erreichen, daß

$$s_i(1) \geqq \cdots \geqq s_i(n_i) \quad \text{für} \quad i = 1, 2 .$$

Ferner läßt sich die Bedingung (T) gemäß [2.3] umformen zu

$$\sum_{X_1} s_1(x_1) \leqq \sum_{M_2} \min \left\{ s_2(x_2), \sum_{X_1} t(x_1, x_2) \right\} \quad \text{für alle} \quad X_1 \subset M_1 ,$$

$$\sum_{X_2} s_2(x_2) \leqq \sum_{M_1} \min \left\{ s_1(x_1), \sum_{X_2} t(x_1, x_2) \right\} \quad \text{für alle} \quad X_2 \subset M_2 .$$

Wegen $t = 1$ sind die rechten Seiten lediglich Funktionen der Mächtigkeit m_i von X_i, so daß bereits die Richtigkeit dieser Ungleichungen für die Mengen

$X_i = \{1, \ldots, m_i\}$ genügt, da dann — bei fester Mächtigkeit m_i — die linken Seiten wegen der Monotonie von s_i maximal sind.

Das liefert als gleichwertige Bedingung die $(n_1 + n_2)$ Ungleichungen

$$\sum_{x_1 \leq m_1} s_1(x_1) \leq \sum_{M_2} \min\{s_2(x_2), m_1\} \quad \text{für} \quad m_1 = 1, \ldots, n_1\,,$$

$$\sum_{x_2 \leq m_2} s_2(x_2) \leq \sum_{M_1} \min\{s_1(x_1), m_2\} \quad \text{für} \quad m_2 = 1, \ldots, n_2\,.$$

§ 4. Das Problem bei Maßen

Mit Hilfe der Ergebnisse aus § 3 wird das Hauptproblem nun im Fall von Maßen untersucht. Gegeben sind also ein Maß $\varrho|\mathfrak{R}$ und Maße $\nu_i|\mathfrak{R}_i$, die der Bedingung (R) genügen; gesucht ist ein Maß $\nu|\mathfrak{R}$, das von $\varrho|\mathfrak{R}$ majorisiert wird und die Marginalmaße $\nu_i|\mathfrak{R}_i$ besitzt.

Um die Existenz von $\nu|\mathfrak{R}$ beurteilen zu können, empfiehlt sich zunächst eine Verallgemeinerung von [3.3] auf abzählbare Matrizen:

Satz 4.1. *Die Behauptung von* [3.3] *gilt auch im Fall* $M_i = Z$, *falls die Summen* $\sum_{M_2} t(x_1, x_2)$ *und* $\sum_{M_1} t(x_1, x_2)$ *stets endlich sind.*

Beweis. 1. Auf den Mengen $M_i^n := \{1, \ldots, n\}$ bzw. $M^n := (M_1^n, M_2^n)$ seien die folgenden nicht-negativen Funktionen definiert:

$$s_i^n(x_i) := \sum_{Y_{x_i}^n} s_i \quad \text{bzw.} \quad t^n(x_1, x_2) := \sum_{(Y_{x_1}^n, Y_{x_2}^n)} t\,,$$

wobei

$$Y_m^n := \{m\} \quad \text{für} \quad m < n\,, \quad Y_n^n := \{m \in Z : m \geq n\}\,.$$

Dann genügen auch $t^n|\,M^n$ und $s_i^n|M_i^n$ der Bedingung (T); nach [3.3] existiert also eine Funktion $s^n|M^n$ mit $0 \leq s^n \leq t^n$ derart, daß

$$\sum_{M_2^n} s^n(x_1, x_2) = s_1^n(x_1), \sum_{M_1^n} s^n(x_1, x_2) = s_2^n(x_2) \quad \text{für alle} \quad x_i \in M_i^n\,.$$

Das führt etwa für $i = 1$ insbesondere zu:

$$\sum_{1 \leq x_2 \leq m} s^n(x_1, x_2) \leq s_1^n(x_1) \leq \sum_{1 \leq x_2 \leq m} s^n(x_1, x_2) + \sum_{m < x_2 \leq n} t^n(x_1, x_2)\,,$$

also nach Definition der Funktionen $t^n|M^n$ und $s_i^n|M_i^n$ zu:

$$(2) \qquad \sum_{x_2 \leq m} s^n(x_1, x_2) \leq s_1(x_1) \leq \sum_{x_2 \leq m} s^n(x_1, x_2) + \sum_{x_2 > m} t(x_1, x_2) \quad \text{für} \quad x_1, m < n\,.$$

2. Auf $M = (Z, Z)$ sei nun

$$s_0^n(x_1, x_2) := \begin{cases} s^n(x_1, x_2) & \text{für} \quad \max\{x_1, x_2\} < n \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Nach dem Cantorschen Diagonalverfahren läßt sich dann wegen

$$0 \leq s_0^n(x_1, x_2) \leq t(x_1, x_2) < \infty \quad \text{für alle} \quad x_i \in Z$$

eine Teilfolge $s_0^{n_k}|M$ dieser Funktionen finden, die an allen Stellen konvergiert.

Die Forderungen werden nun befriedigt durch die Funktion

$$s(x_1, x_2) := \lim_{k\to\infty} s_0^{n_k}(x_1, x_2) \quad \text{für} \quad x_i \in Z .$$

Zunächst ist $0 \leqq s \leqq t$; ferner gilt wegen (2):

$$\sum_{x_1 \leqq m} s_0^{n_k}(x_1, x_2) \leqq s_1(x_1) \leqq \sum_{x_1 \leqq m} s_0^{n_k}(x_1, x_2) + \sum_{x_1 > m} t(x_1, x_2) \quad \text{für} \quad x_1, m < n_k .$$

Der Grenzübergang $k \to \infty$ führt daraus zu:

$$\sum_{x_1 \leqq m} s(x_1, x_2) \leqq s_1(x_1) \leqq \sum_{x_1 \leqq m} s(x_1, x_2) + \sum_{x_1 > m} t(x_1, x_2) \quad \text{für} \quad x_1, m \in Z$$

und der Grenzübergang $m \to \infty$ wegen $\sum_{x_1 \in Z} t(x_1, x_2) < \infty$ zu:

$$\sum_{x_1 \in Z} s(x_1, x_2) \leqq s_1(x_1) \leqq \sum_{x_1 \in Z} s(x_1, x_2) + 0 \quad \text{für alle} \quad x_1 \in Z .$$

Da bei Vertauschung von 1 und 2 eine entsprechende Ungleichung gilt, folgt daraus die Behauptung. ⌟

Aus dem Beweis geht hervor, daß auch hier eine ganzzahlige Lösung existiert, falls die Funktionswerte von $t \mid M$ und $s_i \mid M_i$ stets ganze Zahlen sind.

Vor dem Übergang vom Matrizen-Problem zum Maß-Problem ist noch die hier verwendete Bedeutung des Begriffs „Separabilität" festzulegen:

1. Ein σ-Körper $\mathfrak{R}$ heißt separabel, falls eine Folge von Mengen $A_n \in \mathfrak{R}$ existiert derart, daß $\mathfrak{R} = {}^B\{A_n : n \in Z\}$.

2. Ein Maß $\mu \mid \mathfrak{R}$ heißt separabel, falls in der Gesamtheit der Mengen endlichen Maßes eine bezüglich der Quasimetrik $|A, B| := \mu(A \dotplus B)$ dichte abzählbare Teilmenge existiert.

Ferner wird das folgende Kompaktheitskriterium benötigt, das sich als einfache Folgerung aus einem Satz in [1] (S. 292) ergibt:

Ist $(M, \mathfrak{R}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum, so ist für $g^1, g^2 \in \mathscr{L}(\mu)$ die Menge $\{f \in \mathscr{L}(\mu) : g^1 \leqq f \leqq g^2\}$ bezüglich schwacher Konvergenz kompakt.

Nun läßt sich zeigen, daß die notwendige Bedingung (R) unter sehr einfachen Voraussetzungen auch hinreichend ist:

Satz 4.2. *Es sei ν_i ein Maß auf dem separablen σ-Körper $\mathfrak{R}_i$ über der Grundmenge M_i $(i = 1, 2)$; ferner sei ϱ ein Maß auf dem σ-Körper $\mathfrak{R} := \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ über der Grundmenge $M := (M_1, M_2)$ derart, daß die Maße $\varrho_1(X_1) := \varrho((X_1, M_2))$ und $\varrho_2(X_2) := \varrho((M_1, X_2))$ in $\mathfrak{R}_i$ eine normale Zerlegung besitzen. Genügen dann die Maße $\varrho \mid \mathfrak{R}$ und $\nu_i \mid \mathfrak{R}_i$ der Bedingung* (R), *so existiert ein Maß $\nu \mid \mathfrak{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

$$\nu(A) \leqq \varrho(A) \quad \textit{für alle} \quad A \in \mathfrak{R} ,$$

$$\nu((X_1, M_2)) = \nu_1(X_1),\ \nu((M_1, X_2)) = \nu_2(X_2) \quad \textit{für alle} \quad X_i \in \mathfrak{R}_i .$$

Beweis. 1. Es sei $\mathfrak{R}_i = {}^B\{X_i^n : n \in Z\}$ und $M_i = \sum_Z M_i^n$ eine normale Zerlegung zu $\varrho_i \mid \mathfrak{R}_i$. Die σ-Körper

$$\mathfrak{R}_i^n := {}^B(\{X_i^l : l \leqq n\} \dotplus \{M_i^l : l \in Z\})$$

bestimmen dann Zerlegungen $M_i^l = \sum_{(l-1)2^n < m \leq l \cdot 2^n} Y_{im}^n$ derart, daß

$$\mathfrak{K}_i^n = \left\{ \sum_{m \in T} Y_{im}^n : T \subset Z \right\}.$$

Die nicht-negativen Funktionen

$$t^n(x_1, x_2) := \varrho((Y_{1x_1}^n, Y_{2x_2}^n)) \quad \text{und} \quad s_i^n(x_i) := \nu_i(Y_{ix_i}^n) \quad \text{für} \quad x_i \in Z$$

genügen nach Voraussetzung der Bedingung (T), wobei zusätzlich gilt:

$$\sum_{x_2 \in Z} t^n(x_1, x_2) \leq \varrho((M_1^l, M_2)) < \infty \quad \text{für} \quad (l-1)2^n < x_1 \leq l \cdot 2^n,$$

$$\sum_{x_1 \in Z} t^n(x_1, x_2) \leq \varrho((M_1, M_2^l)) < \infty \quad \text{für} \quad (l-1)2^n < x_2 \leq l \cdot 2^n.$$

2. Nach [4.1] existiert also ein Maß ν^n auf $\mathfrak{K}^n := \mathfrak{K}_1^n \times \mathfrak{K}_2^n$ mit

(3) $\quad \nu^n(A) \leq \varrho(A) \quad$ für alle $\quad A \in \mathfrak{K}^n$

(4) $\quad \nu^n((X_1, M_2)) = \nu_1(X_1), \nu^n((M_1, X_2)) = \nu_2(X_2) \quad$ für alle $\quad X_i \in \mathfrak{K}_i^n$.

Wegen (3) existieren $\mathfrak{K}^n$-meßbare Funktionen f^n mit

(5) $\quad 0 \leq f^n \leq 1 \quad$ und $\quad \nu^n(A) = \int_A f^n \, d\varrho \quad$ für alle $\quad A \in \mathfrak{K}^n$.

Die erste Beziehung ermöglicht es, auf die Funktionen $\chi_{(M_1^{l_1}, M_2^{l_2})} \cdot f^n \in \mathscr{L}(\varrho)$ für feste $l_i \in Z$ das oben angegebene Kompaktheitskriterium anzuwenden; nach dem Cantorschen Diagonalverfahren läßt sich dann eine Teilfolge f^{n_k} finden, die auf jeder der Mengen $(M_1^{l_1}, M_2^{l_2})$ schwach gegen eine $\mathfrak{K}$-meßbare Funktion $\chi_{(M_1^{l_1}, M_2^{l_2})} \cdot f \in \mathscr{L}(\varrho)$ konvergiert. Für die Funktion f gilt also insbesondere:

(6) $\quad \int_A f^{n_k} \, d\varrho \to \int_A f \, d\varrho \quad$ für $\quad A \in (M_1^{l_1}, M_2^{l_2}) \mathfrak{K}$.

3. $\nu(A) := \int_A f \, d\varrho$ erfüllt nun die Forderungen.

Zunächst folgt aus (5) und (6) für $A \in (M_1^{l_1}, M_2^{l_2})\mathfrak{K}$ stets:

$$0 \leq \lim_{k \to \infty} \int_A f^{n_k} \, d\varrho = \nu(A) = \lim_{k \to \infty} \int_A f^{n_k} \, d\varrho \leq \varrho(A),$$

d. h. $\nu | \mathfrak{K}$ ist ein Maß mit $\nu(A) \leq \varrho(A)$ für alle $A \in \mathfrak{K}$.

Da die σ-Körper $\mathfrak{K}_i^n$ eine aufsteigende Folge bilden, gilt ferner für eine Menge $X_1 \in M_1^{l_1} \mathfrak{K}_1^n$ wegen (4)—(6):

$$\sum_{l_2 \in Z} \nu^{n_k}((X_1, M_2^{l_2})) = \nu_1(X_1) \quad \text{für} \quad n_k \geq n,$$

$$\nu^{n_k}((X_1, M_2^{l_2})) \to \nu((X_1, M_2^{l_2})) \quad \text{für} \quad k \to \infty.$$

Die Reihen $\sum_{l_2 \in Z} \nu^{n_k}((X_1, M_2^{l_2}))$ werden dabei gleichmäßig von der konvergenten Reihe $\sum_{l_2 \in Z} \varrho((M_1^{l_1}, M_2^{l_2}))$ majorisiert, so daß also

$$\nu((X_1, M_2)) = \nu_1(X_1) \quad \text{für} \quad X_1 \in M_1^{l_1} \mathfrak{K}_1^n.$$

Diese Gleichung gilt damit für jede Menge $X_1 \in \mathfrak{R}_1^n$ und daher allgemein auf dem Mengenkörper $\mathfrak{R}_1^0 := \sum_Z^{\cdot} \mathfrak{R}_1^n$. Die beiden Maße stimmen dann auch auf dem σ-Körper ${}^B\mathfrak{R}_1^0 = \mathfrak{R}_1$ überein; denn wegen (R) I gilt:

$$\nu_1(X_1) \leqq \varrho((X_1, M_2)) + \nu_2(\overline{M}_2) = \varrho_1(X_1) \quad \text{für alle} \quad X_1 \in \mathfrak{R}_1 ,$$

so daß $\nu_1 | \mathfrak{R}_1$ eine normale Zerlegung in $\mathfrak{R}_1^0$ besitzt.

Da Entsprechendes für $i = 2$ gilt, besitzt das Maß $\nu | \mathfrak{R}$ also alle geforderten Eigenschaften. ┘

In leichter Verschärfung von [4.2] läßt sich zeigen:

Satz 4.3. *Die Behauptung von* [4.2] *gilt auch, falls statt der σ-Körper $\mathfrak{R}_i$ die Maße $\varrho_i | \mathfrak{R}_i$ als separabel vorausgesetzt werden.*

Beweis. 1. Es sei $\{X_i^n : n \in Z\}$ eine abzählbare dichte Gesamtheit zu $\varrho_i | \mathfrak{R}_i$. Mit dem separablen σ-Körper $\mathfrak{H}_i := {}^B\{X_i^n : n \in Z\} \subset \mathfrak{R}_i$ gilt dann:

(7) $$\text{Zu } X_i \in \mathfrak{R}_i \text{ existiert } Y_i \in \mathfrak{H}_i \text{ mit } \varrho_i(X_i \dotplus Y_i) = 0 .$$

Ist zunächst $\varrho_i(X_i) < \infty$, so existieren nach Voraussetzung Mengen $Y_i^m \in \mathfrak{H}_i$ mit $\varrho_i(X_i \dotplus Y_i^m) < 2^{-m}$; wegen

$$X_i \dotplus \varlimsup_{m \to \infty} Y_i^m \subset \varlimsup_{m \to \infty} (X_i \dotplus Y_i^m) \subset \sum_{m > l}^{\cdot} (X_i \dotplus Y_i^m) \quad \text{für alle} \quad l \in Z$$

gilt mit $Y_i := \varlimsup_{m \to \infty} Y_i^m \in \mathfrak{H}_i$ also:

$$\varrho_i(X_i \dotplus Y_i) \leqq \sum_{m > l} \varrho_i(X_i \dotplus Y_i^m) < \sum_{m > l} 2^{-m} \to 0 \quad \text{für} \quad l \to \infty .$$

Ist daher $X_i \in \mathfrak{R}_i$ beliebig und $M_i = \sum_Z M_i^n$ eine normale Zerlegung zu $\varrho_i | \mathfrak{R}_i$, so existieren Mengen $Y_i^n \in \mathfrak{H}_i$ mit $\varrho_i(X_i M_i^n \dotplus Y_i^n) = 0$; das führt wegen $X_i = \sum_Z X_i M_i^n$ mit $Y_i := \sum_Z^{\cdot} Y_i^n \in \mathfrak{H}_i$ zu:

$$\varrho_i(X_i \dotplus Y_i) \leqq \varrho_i\Big(\sum_Z^{\cdot} (X_i M_i^n \dotplus Y_i^n)\Big) = 0 .$$

2. Nach [4.2] existiert ein Maß ν auf $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ mit

(8) $$\nu(A) \leqq \varrho(A) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{H}$$

(9) $$\nu((X_1, M_2)) = \nu_1(X_1),\ \nu((M_1, X_2)) = \nu_2(X_2) \quad \text{für alle} \quad X_i \in \mathfrak{H}_i .$$

Wegen (8) läßt sich — mittels einer Integraldarstellung — die Definition von ν auf $\mathfrak{R}$ ausdehnen, ohne diese Ungleichung zu verletzen. Für $X_1 \in \mathfrak{R}_1$ gilt dann mit einer nach (7) zugeordneten Menge $Y_1 \in \mathfrak{H}_1$ zunächst:

$$\nu((X_1 \dotplus Y_1, M_2)) \leqq \varrho((X_1 \dotplus Y_1, M_2)) = 0$$

und wegen (R) I:

$$\nu_1(X_1 \dotplus Y_1) \leqq \varrho((X_1 \dotplus Y_1, M_2)) + \nu_2(\overline{M}_2) = 0;$$

daraus folgt wegen (9):

$$\nu((X_1, M_2)) = \nu((Y_1, M_2)) = \nu_1(Y_1) = \nu_1(X_1) .$$

Da Entsprechendes für $i = 2$ gilt, übertragen sich also auch die beiden Gleichungen auf $\mathfrak{R}_i$. ⌟

Auf weitere Verallgemeinerungen, die keinerlei Separabilität verlangen, wird hier verzichtet.

§ 5. Der Beweis des Hauptsatzes

Nun sei wieder $(M, \mathfrak{R}, \mu)$ der Produktraum zweier Maßräume $(M_i, \mathfrak{R}_i, \mu_i)$.

Vor Anwendung der Ergebnisse aus § 4 auf das Hauptproblem empfiehlt sich eine einfache Bezeichnung für die Funktionen $g \in \mathscr{M}(\mu)$ mit μ_i-fast endlichen Marginal-Funktionen $[g; \mu_i]$, für die also $\mathscr{F}_g[\mu]$ eine Teilmenge von $\mathscr{M}[\mu]$ ist.

Definition.

$$\mathscr{G}(\mu) := \left\{ g \in \mathscr{M}(\mu) : \begin{array}{l} \int\limits_{M_2} g(x_1, x_2)\, d\mu_2 < \infty \;\; \mu_1\text{-fast} \\ \int\limits_{M_1} g(x_1, x_2)\, d\mu_1 < \infty \;\; \mu_2\text{-fast} \end{array} \right\}$$

$\mathscr{G}(\mu)$ enthält insbesondere alle Funktionen $g \in \mathscr{M}(\mu)$ mit $\int\limits_M g\, d\mu < \infty$.

Mit Hilfe von [4.2] läßt sich jetzt der folgende Hauptsatz beweisen:

Satz 5.1. *$(M, \mathfrak{R}, \mu)$ sei der Produktraum zweier normaler Maßräume $(M_i, \mathfrak{R}_i, \mu_i)$ und $g \in \mathscr{G}(\mu)$ eine feste Funktion. Dann gilt:*

$$\mathscr{F}_g[\mu] = \{(f_1, f_2) \in \mathscr{M}[\mu] : (G)\},$$

d. h. eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Funktion $f \in \mathscr{M}(\mu)$ mit $f \leqq g$ und $[f; \mu_i] = (f_1, f_2)$ ist neben $(f_1, f_2) \in \mathscr{M}[\mu]$ das Bestehen der Ungleichungen

$$\left. \begin{array}{l} \int\limits_{X_1} f_1\, d\mu_1 \leqq \int\limits_{(X_1, X_2)} g\, d\mu + \int\limits_{\bar{X}_2} f_2\, d\mu_2 \\ \int\limits_{X_2} f_2\, d\mu_2 \leqq \int\limits_{(X_1, X_2)} g\, d\mu + \int\limits_{\bar{X}_1} f_1\, d\mu_1 \end{array} \right\} \quad \textit{für alle} \quad X_i \in \mathfrak{R}_i .$$

Beweis. 1. Die Notwendigkeit der Bedingung (G) wurde bereits in § 2 gezeigt. $\mathscr{F}_g[\mu] \subset \mathscr{M}[\mu]$ ist eine Folge von $g \in \mathscr{G}(\mu)$.

2. Es seien nun umgekehrt die angegebenen Bedingungen erfüllt.

Da $\mu|\mathfrak{R}$ bereits im Mengenkörper $\mathfrak{S} := {}^K\{(X_1, X_2) : X_i \in \mathfrak{R}_i\}$ eine normale Zerlegung besitzt, läßt sich auf Mengen $A \in {}^B\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$ der zu Beginn angegebene Approximationssatz anwenden.

Zu jedem $n \in Z$ und zu jeder rationalen Zahl $r > 0$ existieren daher Mengen $X_{ir}^{mn} \in \mathfrak{R}_i$ mit

$$\sum_{m \in Z}^{\cdot} (X_{1r}^{mn}, X_{2r}^{mn}) \supset \{g \leqq r\} \quad \text{und} \quad \mu\Big(\sum_{m \in Z}^{\cdot} (X_{1r}^{mn}, X_{2r}^{mn}) - \{g \leqq r\}\Big) < \frac{1}{n};$$

für $A_r := \prod\limits_{n \in Z}^{\cdot} \sum\limits_{m \in Z}^{\cdot} (X_{1r}^{mn}, X_{2r}^{mn})$ gilt also:

$$A_r = \{g \leqq r\} + N_r \quad \text{mit} \quad N_r \in \mathfrak{R} \quad \text{und} \quad \mu(N_r) = 0 .$$

Ebenso existieren zu der Nullmenge $N := \sum\limits_{r > 0 \text{ rational}}^{\cdot} N_r \in \mathfrak{R}$ Mengen $X_{i0}^{mn} \in \mathfrak{R}_i$ mit

$$A_0 := \prod_{n \in Z}^{\cdot} \sum_{m \in Z}^{\cdot} (X_{10}^{mn}, X_{20}^{mn}) \supset N \quad \text{und} \quad \mu(A_0) = 0 .$$

3. Wird nun die Funktion $g' := \chi_{\bar{A}_0} \cdot g$ definiert, so gilt $\{g' \neq g\} \subset A_0$ und $\{g' \leq r\} = A_0 \dotplus \{g \leq r\}$ für rationales $r > 0$, d. h.

$$(10) \qquad \begin{cases} 0 \leq g' \leq g \quad \text{und} \quad \mu(\{g' \neq g\}) = 0\,, \\ \{g' \leq r\} = A_0 \dotplus A_r \quad \text{für rationales} \quad r > 0\,. \end{cases}$$

Ist ferner $M_i = \sum_Z M_i^n$ eine normale Zerlegung zu $\mu_i | \mathfrak{R}_i$ und $X_i^r := \{f_i \leq r\}$ für alle rationalen Zahlen r, so ist

$$\mathfrak{H}_i := {}^B(\{M_i^n : n \in Z\} \dotplus \{X_i^r : r \text{ rational}\} \dotplus \{X_{ir}^{mn} : m, n \in Z, r \geq 0 \text{ rational}\})$$

ein in $\mathfrak{R}_i$ enthaltener separabler σ-Körper. Da die rationalen Zahlen dicht liegen, sind die Funktionen f_i dann $\mathfrak{H}_i$-meßbar sowie die Funktion g' wegen (10) $\mathfrak{H}$-meßbar mit $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{R}$.

4. Nach Voraussetzung genügen die Maße

$$\varrho(A) := \int_A g'\, d\mu \quad \text{für} \quad A \in \mathfrak{H} \quad \text{und} \quad \nu_i(X_i) := \int_{X_i} f_i\, d\mu_i \quad \text{für} \quad X_i \in \mathfrak{H}_i$$

wegen (10) der Bedingung (R). Da die Marginal-Funktionen zu g' wegen Teil 3 $\mathfrak{H}_i$-meßbar und wegen $g' \leq g \in \mathscr{G}(\mu)$ auch μ_i-fast endlich sind, sowie in $\mathfrak{H}_i$ eine normale Zerlegung zu $\mu_i | \mathfrak{R}_i$ existiert, ist außerdem die in [4.2] geforderte Voraussetzung bezüglich der Maße ϱ_i erfüllt.

5. Es existiert also ein Maß $\nu | \mathfrak{H}$ mit

$$(11) \qquad \nu(A) \leq \varrho(A) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{H}$$

$$(12) \qquad \nu((X_1, M_2)) = \nu_1(X_1),\ \nu((M_1, X_2)) = \nu_2(X_2) \quad \text{für alle} \quad X_i \in \mathfrak{H}_i\,.$$

Wegen (11) und der Normalität des Maßraumes $(M, \mathfrak{H}, \varrho)$ existiert daher nach dem Satz von Radon-Nikodym eine $\mathfrak{H}$-meßbare Funktion h mit $0 \leq h \leq 1$ derart, daß

$$\nu(A) = \int_A h\, d\varrho = \int_A h g'\, d\mu \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{H}\,.$$

Wegen $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{R}$ ist die Funktion $f := hg'$ auch $\mathfrak{R}$-meßbar und wegen (10) gilt $0 \leq f \leq g$. Ferner ergibt (12):

$$\int_{X_1} \left(\int_{M_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2 \right) d\mu_1 = \nu((X_1, M_2)) = \nu_1(X_1) = \int_{X_1} f_1\, d\mu_1 \quad \text{für alle} \quad X_1 \in \mathfrak{H}_1\,.$$

Da die beiden Integranden $\mathfrak{H}_1$-meßbar sind, folgt daraus:

$$\int_{M_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2 = f_1(x_1) \quad \mu_1\text{-fast}\,,$$

und eine entsprechende Gleichung gilt bei Vertauschung von 1 und 2.

Die Funktion f besitzt also alle geforderten Eigenschaften. ⌟

Daß die vorhandene Lösung $f \in \mathscr{M}(\mu)$ nicht notwendig eindeutig ist, zeigt das folgende einfache Beispiel.

Es sei $M_i := \{0, 1\}$, $\mathfrak{R}_i := \{X_i : X_i \subset M_i\}$, $\mu_i(X_i) := \sum_{X_i} 1$ für $i = 1, 2$. Ist dann $g := 1 \in \mathscr{G}(\mu)$ und $f_i := 1 \in \mathscr{M}(\mu)$, so wird durch

$$f(0, 0) = \vartheta = f(1, 1)\,, \quad f(0, 1) = 1 - \vartheta = f(1, 0)$$

für $0 \leq \vartheta \leq 1$ stets eine Lösung definiert.

Allgemein ist ohne weiteres einzusehen, daß die Gesamtheit

$$\{f' \in \mathscr{M}(\mu) : f' \leqq g, [f'; \mu_i] = [f; \mu_i]\}$$

für jede Funktion $f \in \mathscr{M}(\mu)$ eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge von $\{f' \in \mathscr{M}(\mu) : f' \leqq g\}$ darstellt.

In Verschärfung des Hauptsatzes läßt sich zeigen, daß punktweise Übereinstimmung der Marginal-Funktionen mit den Funktionen f_i erreichbar ist, sobald diese stets unterhalb der durch g gesetzten Grenze liegen.

Genauer gilt:

Satz 5.2. *Es seien die Voraussetzungen von* [5.1] *gegeben. Erfüllen dann die Funktionen $f_i \in \mathscr{M}(\mu_i)$ für $x_i \in M_i$ und $X_i' \in \mathfrak{R}_i$ stets*

$$f_1(x_1) \leqq \int_{M_2} g(x_1, x_2)\, d\mu_2 \quad \text{und} \quad \int_{X_1} f_1\, d\mu_1 \leqq \varphi_1(X_1; g; f_2),$$

$$f_2(x_2) \leqq \int_{M_1} g(x_1, x_2)\, d\mu_1 \quad \text{und} \quad \int_{X_2} f_2\, d\mu_2 \leqq \varphi_2(X_2; g; f_1),$$

so existiert eine Funktion $f \in \mathscr{M}(\mu)$ mit $f \leqq g$ derart, daß

$$\int_{M_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2 = f_1(x_1) \quad \textit{für alle} \quad x_1 \in M_1,$$

$$\int_{M_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1 = f_2(x_2) \quad \textit{für alle} \quad x_2 \in M_2.$$

Beweis. Da nach [2.3] die Bedingung (G) erfüllt ist, existiert nach [5.1] eine Funktion $f^0 \in \mathscr{M}(\mu)$ mit $f^0 \leqq g$ derart, daß

$$\int_{M_2} f^0(x_1, x_2)\, d\mu_2 = f_1(x_1) \quad \text{für} \quad x_1 \notin N_1 \in \mathfrak{R}_1 \quad \text{mit} \quad \mu_1(N_1) = 0,$$

$$\int_{M_1} f^0(x_1, x_2)\, d\mu_1 = f_2(x_2) \quad \text{für} \quad x_2 \notin N_2 \in \mathfrak{R}_2 \quad \text{mit} \quad \mu_2(N_2) = 0.$$

Nach [1.2] existieren ferner Funktionen $f^1, f^2 \in \mathscr{M}(\mu)$ mit

$$f^1 \leqq \chi_{(N_1, M_2)} \cdot g, \quad f^2 \leqq \chi_{(M_1, N_2)} \cdot g$$

derart, daß

$$\int_{M_2} f^1(x_1, x_2)\, d\mu_2 = \chi_{N_1} \cdot f_1(x_1) \quad \text{für alle} \quad x_1 \in M_1,$$

$$\int_{M_1} f^2(x_1, x_2)\, d\mu_1 = \chi_{N_2} \cdot f_2(x_2) \quad \text{für alle} \quad x_2 \in M_2.$$

Die Funktion

$$f := \chi_{(\bar N_1, \bar N_2)} \cdot f^0 + \max_{k=1,2} f^k \in \mathscr{M}(\mu)$$

ist dann geeignet; denn es gilt $f \leqq g$, und die Richtigkeit der Integralbeziehungen für alle $x_i \in M_i$ folgt aus den Gleichungen

$$\int_{M_i} f^{(k)}(x_1, x_2)\, d\mu_i = \int_{N_i} f^{(k)}(x_1, x_2)\, d\mu_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2. \qquad \lrcorner$$

In diesem Zusammenhang liegt die Frage nahe, welche Paare (f_1, f_2) sich ergeben, falls die Forderung $0 \leqq f \leqq g$ ersetzt wird durch die Forderung $g^1 \leqq f \leqq g^2$, wobei nun $g^1, g^2 \in \mathscr{L}(\mu)$ vorauszusetzen ist.

Dieses Problem läßt sich auf das im Hauptsatz gelöste zurückführen:

Satz 5.3. *$(M, \mathfrak{R}, \mu)$ sei der Produktraum zweier normaler Maßräume $(M_i, \mathfrak{R}_i, \mu_i)$; $g^1 \leqq g^2$ seien zwei Funktionen aus $\mathscr{L}(\mu)$. Dann ergeben sich in der Gestalt $(\int\limits_{M_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2, \int\limits_{M_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1)$ mit $f \in \mathscr{L}(\mu)$ und $g^1 \leqq f \leqq g^2$ genau jene Paare $(f_1, f_2) \in (\mathscr{L}(\mu_1), \mathscr{L}(\mu_2))$, die den folgenden Ungleichungen genügen:*

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_{X_1} f_1\, d\mu_1 &\leqq \Big(\int\limits_{(X_1, X_2)} g^2\, d\mu - \int\limits_{(\overline{X}_1, \overline{X}_2)} g^1\, d\mu\Big) + \int\limits_{\overline{X}_2} f_2\, d\mu_2 \\ \int\limits_{X_2} f_2\, d\mu_2 &\leqq \Big(\int\limits_{(X_1, X_2)} g^2\, d\mu - \int\limits_{(\overline{X}_1, \overline{X}_2)} g^1\, d\mu\Big) + \int\limits_{\overline{X}_1} f_1\, d\mu_1 \end{aligned}\right| \textit{für alle} \quad X_i \in \mathfrak{R}_i\,.$$

Beweis. In der angegebenen Gestalt ergeben sich genau jene Paare

$$\Big(\int\limits_{M_2} g^1(x_1, x_2)\, d\mu_2, \int\limits_{M_1} g^1(x_1, x_2)\, d\mu_1\Big) + (f_1', f_2')\,,$$

für die $(f_1', f_2') = [f'; \mu_i]$ mit $f' \in \mathscr{M}(\mu)$ und $f' \leqq g' := g^2 - g^1 \in \mathscr{G}(\mu)$.

Einsetzen der Funktionen g' und

$$f_1'(x_1) := f_1(x_1) - \int\limits_{M_2} g^1(x_1, x_2)\, d\mu_2,\; f_2'(x_2) := f_2(x_2) - \int\limits_{M_1} g^1(x_1, x_2)\, d\mu_1$$

in (G) gemäß [5.1] führt durch einfache Umformung zur Behauptung. ⌟

Da die Integrale $\int\limits_{M_i} f(x_1, x_2)\, d\mu_i$ hier nur außerhalb geeigneter Nullmengen definiert sind, ist selbstverständlich im allgemeinen keine punktweise Übereinstimmung erzielbar.

§ 6. N-fache Produkträume

Zum Abschluß wird im folgenden kurz auf jene Probleme eingegangen, die sich beim Versuch ergeben, den Hauptsatz auf den Produktraum $(M, \mathfrak{R}, \mu)$ von n Maßräumen $(M_i, \mathfrak{R}_i, \mu_i)$ zu verallgemeinern. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei dabei $(\widetilde{M}_i, \widetilde{\mathfrak{R}}_i, \tilde{\mu}_i)$ der Produktraum der Maßräume $(M_l, \mathfrak{R}_l, \mu_l)$ mit $l \neq i$.

Hier handelt es sich also um die Frage, wann zu einer Funktion $g \in \mathscr{M}(\mu)$ und zu n Funktionen $f_i \in \mathscr{M}(\mu_i)$ eine Funktion $f \in \mathscr{M}(\mu)$ mit $f \leqq g$ existiert derart, daß

$$\int\limits_{\widetilde{M}_i} f(x_1, \ldots, x_n)\, d\tilde{\mu}_i = f_i(x_i) \quad \mu_i\text{-fast} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Wird dabei $\int\limits_M g\, d\mu < \infty$ vorausgesetzt, so liegt — ausgehend von [2.2] — die Vermutung nahe, dies sei gleichwertig mit den folgenden Bedingungen:

$$\int\limits_{M_1} f_1\, d\mu_1 = \cdots = \int\limits_{M_n} f_n\, d\mu_n =: \gamma\,,$$

$$\gamma \leqq \int\limits_{(X_1, \ldots, X_n)} g\, d\mu + \sum_{1 \leqq i \leqq n} \int\limits_{\overline{X}_i} f_i\, d\mu_i \quad \text{für alle} \quad X_i \in \mathfrak{R}_i\,.$$

Das gilt jedoch nur zum Teil:

Satz 6.1. *$(M, \mathfrak{R}, \mu)$ sei der Produktraum der normalen Maßräume $(M_i, \mathfrak{R}_i, \mu_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $g \in \mathscr{L}(\mu)$ eine nicht-negative Funktion. Obenstehende Be-*

dingungen sind dann notwendig, jedoch nicht hinreichend dafür, daß zu n Funktionen $f_i \in \mathscr{L}(\mu_i)$ eine Funktion $f \in \mathscr{L}(\mu)$ mit $0 \leqq f \leqq g$ existiert derart, daß

$$\int_{\tilde{M}_i} f(x_1, \ldots, x_n)\, d\,\tilde{\mu}_i = f_i(x_i) \quad \mu_i\text{-fast} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Beweis. 1. Die Notwendigkeit der Bedingungen folgt sofort aus den beiden Relationen

$$\int_{M_i} f_i\, d\mu_i = \int_M f\, d\mu \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

$$M \subset (X_1, \ldots, X_n) + \sum_{1 \leqq i \leqq n}{}^{\!\cdot}\, (M_1, \ldots, M_{i-1}, \overline{X}_i, M_{i+1}, \ldots, M_n) \quad \text{für alle} \quad X_i \in \mathfrak{R}_i\,.$$

2. Daß die Bedingungen jedoch nicht hinreichen, ist aus dem folgenden Gegenbeispiel für $n = 3$ ersichtlich:

$$M_i := \{1, 2\}, \mathfrak{R}_i := \{X_i : X_i \subset M_i\}, \mu_i(X_i) := \sum_{X_i} 1\,;$$

$$g(x_1, x_2, x_3) := 1 + \sum_{1 \leqq i \leqq 3} x_i \;(\mathrm{mod}\, 2), f_i(x_i) := x_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Hier ist $\gamma = 3$, also zunächst die folgende Ungleichung nachzuweisen:

$$3 \leqq \int_{(X_1, X_2, X_3)} g\, d\mu + \sum_{1 \leqq i \leqq 3} \int_{X_i} f_i\, d\mu_i \quad \text{für alle} \quad X_i \subset M_i\,. \tag{13}$$

Ist insbesondere $X_3 = M_3$, so ist demnach zu zeigen:

$$3 \leqq \int_{(X_1, X_2)} 1\, d(\mu_1 \times \mu_2) + \sum_{i=1,2} \int_{X_i} f_i\, d\mu_i\,;$$

diese Ungleichung ist für alle Paare X_1, X_2 erfüllt, da das zugehörige „zweidimensionale" Problem (mit $g = 1$) die Lösung $f(x_1, x_2) := \max_{i=1,2} x_i - 1$ besitzt. Da die Definition der Funktionen g und f_i in i symmetrisch ist, läßt sich also beim Nachweis von (13) stets $X_i \neq M_i$ — und damit $\int_{X_i} f_i\, d\mu_i \geqq 1$ — voraussetzen; das ergibt die allgemeine Richtigkeit der Ungleichung.

Es werde nun angenommen, die Funktion f sei eine Lösung des Problems. Aus den Gleichungen

$$\int_{\tilde{M}_i} g(x_1, x_2, x_3)\, d\,\tilde{\mu}_i = 2 = f_i(x_i) \quad \text{für} \quad x_i = 2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

folgt dann $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3)$ für $(x_1, x_2, x_3) \neq (1, 1, 1)$, so daß wegen $g(1, 1, 1) = 0$ notwendigerweise $f = g$ und damit

$$\int_{\tilde{M}_i} f(x_1, x_2, x_3)\, d\,\tilde{\mu}_i = 2 \neq f_i(x_i) \quad \text{für} \quad x_i = 1 \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Die Annahme führt also zu einem Widerspruch. ┘

Literatur

[1] DUNFORD, N., and J. SCHWARTZ: Linear Operators; New York (1958).
[2] HALMOS, P.: Measure Theory; Princeton (1958).

(Eingegangen am 28. März 1961)

SCHEJA, G.
Math. Annalen 144, 345—360 (1961)

Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen

Von

GÜNTER SCHEJA in Münster (Westfalen)

Einleitung

Auf der Cauchyschen Integraldarstellung für holomorphe Funktionen beruht bekanntlich der 2. Riemannsche Hebbarkeitssatz: Eine außerhalb einer höchstens $(n-2)$-dimensionalen analytischen Menge in einem komplexen Zahlenraum $\mathbf{C}^n$ gegebene holomorphe Funktion ist stets eindeutig über diese Menge hinweg (holomorph) fortsetzbar. Beispielsweise lassen sich alle holomorphen Funktionen aus dem Gebiet $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ in den ganzen $\mathbf{C}^2$ fortsetzen; der Beweis ergibt sich sofort aus der Cauchyschen Integraldarstellung für holomorphe Funktionen im Produktgebiet $(\mathbf{C}^1 - \{0\}) \times (\mathbf{C}^1 - \{0\})$.

Ein Satz von H. CARTAN aus dem Jahre 1938 ([2]) nennt ein — nicht sofort als solches erkennbares — Analogon dieses Hebbarkeitssatzes im $\mathbf{C}^3$: Alle Cousin-I-Verteilungen des Gebietes $\mathbf{C}^3 - \{0\}$ lassen sich eindeutig in den ganzen $\mathbf{C}^3$ fortsetzen; wesentlicher Bestandteil des Beweises ist wieder die Cauchysche Integraldarstellung für holomorphe Funktionen im Produktgebiet $(\mathbf{C}^1 - \{0\})^3$, bzw. deren Laurent-Entwicklung. Das Ergebnis dieser Arbeit ist eine dieses Analogon sinnvoll einordnende Verallgemeinerung des Riemannschen Hebbarkeitssatzes. Es läßt sich von vorneherein nur in der Sprache der von H. CARTAN begründeten analytischen Cohomologietheorie (siehe etwa [3], 1953) formulieren und möge deshalb hier nur kurz angedeutet werden:

Besteht die abgeschlossene Teilmenge A des Gebietes G im $\mathbf{C}^n$ aus Stücken höchstens $(n-2)$-dimensionaler analytischer Mengen, dann bedeutet der klassische 2. Riemannsche Hebbarkeitssatz nichts anderes, als daß die natürliche Beschränkungsabbildung

$$H^p(G, \mathcal{O}) \to H^p(G - A, \mathcal{O})$$

für $p = 0$ bijektiv ist (dabei ist mit $\mathcal{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionselemente in G bezeichnet, die einfachste nichttriviale Koeffizientengarbe der analytischen Cohomologietheorie). Es gilt nun: Besteht A aus Stücken höchstens $(n-3)$-dimensionaler analytischer Mengen, dann ist die genannte Beschränkungsabbildung neben $p = 0$ auch für $p = 1$ bijektiv, usw.

Ein Beweis dieser Sätze findet sich in Abschnitt 3 der nachfolgenden Ausführungen, dem eine kurze Hilfsbetrachtung über Cohomologiegruppen (Abschnitt 1) und der auf der Cauchyschen Integraldarstellung fußende Beweis eines Kontinuitätssatzes für Cohomologieklassen (Abschnitt 2) vorausgehen. In den beiden letzten Abschnitten werden dann die neuen Hebbarkeitssätze auf Cohomologieklassen zu beliebigen kohärenten analytischen Koeffizientengarben in abstrakten komplex-analytischen Räumen übertragen.

Die Ergebnisse wurden in einer Comptes-Rendus-Note [11] angekündigt; in dieser Note wurden auch einige Folgerungen aus den allgemeinen Riemannschen Hebbarkeitssätzen für den Beweis einiger Sätze von K. OKA, W. ROTHSTEIN, W. THIMM und SH. ABHYANKAR angegeben[1]). Beispielsweise bedeutet die Fortsetzung von $H^1(G - A, \mathcal{O})$ nach G, falls A lokal höchstens $(n - 3)$-dimensional ist, daß sich alle Cousin-I-Verteilungen und Cousin-II-Verteilungen von $G - A$ nach G fortsetzen lassen; W. ROTHSTEIN bewies mit anderen Mitteln 1950 in [10] u. a. diese Erweiterung des anfangs angeführten Cartanschen Satzes, als das Prinzip des Beweises von H. CARTAN wegen der noch ausstehenden analytischen Cohomologietheorie nicht unmittelbar verallgemeinerungsfähig erschien.

Es sei noch erwähnt, daß die Hebbarkeitssätze in naher Beziehung stehen zu Sätzen von H. GRAUERT und A. ANDREOTTI über Fortsetzungen von Cohomologieklassen unter geeigneten Konvexitäts-Voraussetzungen[2]). Als ich Herrn Professor GRAUERT von den Hebbarkeitssätzen berichtete, stellte sich heraus, daß diese Sätze in den Fällen unschwer aus [6], § 4, herleitbar sind, in denen die Hindernismengen kompakt sind. Viele spezifische Anwendungen der Hebbarkeitssätze (siehe [11]) erfordern allerdings gerade die Fortsetzung über analytische Mengen in K-vollständigen Räumen, deren kompakte analytische Teilmengen nur aus isolierten Punkten bestehen.

1. Hilfsüberlegungen aus der Cohomologietheorie

Für eine Koeffizientengarbe $\mathfrak{S}$ abelscher Gruppen über dem topologischen Raum X sind die Cohomologiegruppen $H^p(X, \mathfrak{S})$, $p \geqq 0$, wohldefiniert; man erhält sie, indem man $\mathfrak{S}$ durch eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{W}_0 \xrightarrow{r_0} \mathfrak{W}_1 \xrightarrow{r_1} \cdots$$

mit welken Garben $\mathfrak{W}_p$ in genau festgelegter Weise auflöst (kanonische Auflösung von $\mathfrak{S}$) und die Cohomologiegruppen des von der Sequenz induzierten formalen Komplexes

$$0 \to \Gamma(X, \mathfrak{W}_0) \to \Gamma(X, \mathfrak{W}_1) \to \cdots$$

der globalen Schnittflächengruppen bildet. Für die Cohomologietheorie, die man hiervon ausgehend erhält, sei generell auf GODEMENT [5] verwiesen.

Beschränkt man die Auflösung von $\mathfrak{S}$ auf einen offenen Unterraum U von X, dann erhält man eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{S}(U) \to \mathfrak{W}_0(U) \to \mathfrak{W}_1(U) \to \cdots$$

mit welken Garben $\mathfrak{W}_p(U)$, die in natürlicher Weise zur kanonischen Auflösung von $\mathfrak{S}(U)$ isomorph ist; bezüglich dieser natürlichen Isomorphie können wir also die Cohomologiegruppen des formalen Komplexes

$$0 \to \Gamma(U, \mathfrak{W}_0) \to \Gamma(U, \mathfrak{W}_1) \to \cdots$$

als die Cohomologiegruppen $H^p(U, \mathfrak{S}(U))$ ansehen. Ferner sei die Beschränkung $\mathfrak{S}(U)$ von $\mathfrak{S}$ auf U nicht immer eigens aufgeführt, wenn dies zu keinen Mißverständnissen führt: Beispielsweise schreiben wir kurz $H^p(U, \mathfrak{S})$ statt

[1]) Eine genauere Ausführung dieser Anwendungen erscheint im Archiv der Mathematik.

[2]) Angekündigt in GRAUERT [6].

$H^p(U, \mathfrak{S}(U))$. Bemerken wir noch, daß die einfache Beschränkung von $\Gamma(X, \mathfrak{W}_p)$ auf $\Gamma(U, \mathfrak{W}_p)$ den natürlichen Beschränkungs-Homomorphismus

$$H^p(X, \mathfrak{S}) \to H^p(U, \mathfrak{S})$$

definiert, $p \geqq 0$.

Zur Berechnung einzelner Cohomologiegruppen oder -klassen verwendet man oft zweckmäßig Čechsche Cohomologiegruppen bezüglich Überdeckungen von X; hierzu sei neben [5] auch auf SERRE [12] verwiesen.

Sei $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ eine (offene) Überdeckung von X; die Čechschen Cokettengruppen $C^p(\mathcal{U}, \mathfrak{S})$ sind dann wohldefiniert und bilden mit der natürlichen Corandoperation den formalen Komplex

$$0 \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathfrak{S}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{U}, \mathfrak{S}) \xrightarrow{\delta^1} \cdots,$$

der die Cohomologiegruppen $H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{S})$ definiert. Wie man weiß, gibt es einen natürlichen Homomorphismus

$$\lambda^p : H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{S}) \to H^p(X, \mathfrak{S}),$$

der in bestimmten Fällen bijektiv ist (sog. *Leraysches Lemma*, siehe [5], cor. du th. II, 5.4.1) und damit eine Berechnung von $H^p(X, \mathfrak{S})$ durch die Gruppe $H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{S})$ gestattet, mit der man bei geeigneter Wahl von $\mathcal{U}$ etwas von der geometrischen Gestalt von X erfaßt hat.

Die Voraussetzungen des Lerayschen Lemmas sind jedoch für manche Zwecke zu summarisch; daher sollen in diesem Abschnitt einige Verschärfungen dieses Lemmas zusammengestellt werden. Zunächst sei die Konstruktion der Abbildung λ^p besprochen. Man hat das natürliche kommutative Spektraldiagramm

$$\begin{array}{ccccc}
C^0(\mathcal{U}, \mathfrak{W}_0) & \xrightarrow{\delta_0^0} & C^1(\mathcal{U}, \mathfrak{W}_0) & \xrightarrow{\delta_0^1} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \tau_0^0} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_0^1} & & \\
C^0(\mathcal{U}, \mathfrak{W}_1) & \xrightarrow{\delta_1^0} & C^1(\mathcal{U}, \mathfrak{W}_1) & \xrightarrow{\delta_1^1} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \tau_1^0} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_1^1} & & \\
\vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

mit den Corandhomomorphismen als horizontalen und den von den Garbenhomomorphismen τ_p induzierten Homomorphismen als vertikalen Abbildungen. Die erste Zeilen-Sequenz enthält offenbar den Unterkomplex $\{C^p(\mathcal{U}, \mathfrak{S})\}$ derjenigen Elemente, die von $\{\tau_0^p\}$ auf Null abgebildet werden; und die erste Spalten-Sequenz enthält den Unterkomplex $\{\Gamma(X, \mathfrak{W}_p)\}$ derjenigen Elemente, die von $\{\delta_p^0\}$ auf Null abgebildet werden. Sämtliche Zeilensequenzen sind exakt, da $H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{W}) = 0$ für $p \geqq 1$ bei jeder welken Garbe $\mathfrak{W}$ (siehe [5], th. II, 5.2.3). Dies setzt uns in Stand, den Homomorphismus λ^p zu definieren. λ^0 ist nichts anderes als die natürliche Isomorphie $H^0(\mathcal{U}, \mathfrak{S}) = \Gamma(X, \mathfrak{S})$; sei daher $p \geqq 1$. Sei $[f]$ eine Klasse aus $H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{S})$; wegen $\delta_0^p(f) = 0$ gibt es ein $g_1 \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathfrak{W}_0)$ mit $\delta_0^{p-1}(g_1) = f$; sei $g_2 := \tau_0^{p-1}(g_1)$; es gilt $\tau_1^{p-1}(g_2) = \tau_1^{p-1}\tau_0^{p-1}(g_1) = 0$ und $\delta_1^{p-1}(g_2) = \delta_1^{p-1}\tau_0^{p-1}(g_1) = \tau_0^p\delta_0^{p-1}(g_1) = \tau_0^p(f) = 0$. Man führt diesen Prozeß

(bei $p \geqq 2$) weiter und erhält so auf einem diagonalen Treppenzug durch das Diagramm auf natürliche Weise ein $f' \in C^0(\mathcal{U}, \mathfrak{W}_p)$ mit $\tau_p^0(f') = 0$ und $\delta_p^0(f') = 0$. $[f]$ kann nun als $\lambda^p([f])$ die Klasse $[f']$ in $H^p(X, \mathfrak{S})$ zugeordnet werden. Wie man leicht sieht, ist λ^p eine wohldefinierte Abbildung und ein Homomorphismus.

Man verifiziert sofort das

Lemma L_0: *λ^0 ist stets bijektiv, λ^1 ist stets injektiv.*

Hat man die Exaktheit an den Stellen $(p, 0), \ldots, (1, p-1)$ des Diagramms, wo die ersten Komponenten der Zahlenpaare die Zeilenzahl und die zweiten Komponenten die Spaltenzahl angeben, so kann offenbar die Umkehrung zu λ^p gefunden werden. Ferner sieht man leicht, daß unter derselben Voraussetzung auch λ^{p+1} injektiv ist. Die vertikale Exaktheit an einer Stelle $(p-q, q)$ bedeutet aber, daß jede Schnittfläche s in $\mathfrak{W}_{p-q}$ über einer Trägermenge $U_{i_0 \ldots i_q} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}$ mit $\tau_{p-q}(s) = 0$ das τ_{p-q-1}-Bild einer Schnittfläche in $\mathfrak{W}_{p-q-1}$ über $U_{i_0 \ldots i_q}$ ist. Dies gilt jedenfalls bei $H^{p-q}(U_{i_0 \ldots i_q}, \mathfrak{S}) = 0$. Daher gilt das

Lemma L_p, $p \geqq 1$: *Gilt $H^{p-q}(U_{i_0 \ldots i_q}, \mathfrak{S}) = 0$ für jedes q-Simplex $\langle i_0, \ldots, i_q \rangle$ und für jedes q mit $0 \leqq q \leqq p-1$, dann ist λ^p bijektiv und λ^{p+1} injektiv.*

Die Bedingung, daß ein $\alpha \in H^p(X, \mathfrak{S})$ in allen $H^p(U_i, \mathfrak{S})$ durch Beschränkung die Null ergibt, genügt offenbar, die Bedingung $H^p(U_i, \mathfrak{S}) = 0$ aus Lemma L_p zu ersetzen, wenn es nur darum geht, ob α zum λ^p-Bild gehört. Daher gilt:

Lemma L_p^*, $p \geqq 1$: *$\alpha \in H^p(X, \mathfrak{S})$ möge bei Beschränkung nach $H^p(U_i, \mathfrak{S})$ das Nullelement ergeben für jedes $i \in I$; im Falle $p \geqq 2$ möge außerdem $H^{p-q}(U_{i_0 \ldots i_q}, \mathfrak{S}) = 0$ gelten für jedes q-Simplex $\langle i_0, \ldots, i_q \rangle$ und für jedes q mit $1 \leqq q \leqq p-1$. Dann gehört α zum Bild des Homomorphismus λ^p.*

Noch eine Bemerkung zu den Beschränkungsabbildungen: Sei ${}^*X$ ein offener Unterraum von X; sei ${}^*\mathcal{U}$ die Beschränkung $\{U_i \cap {}^*X : i \in I\}$ von $\mathcal{U}$ auf ${}^*X$. Dann hat man eine natürliche Beschränkung $H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{S}) \to H^p({}^*\mathcal{U}, \mathfrak{S})$ und, wie unschwer zu sehen ist, das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{S}) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda^p"] & H^p({}^*\mathcal{U}, \mathfrak{S}) \arrow[d, "{}^*\lambda^p"] \\
H^p(X, \mathfrak{S}) \arrow[r] & H^p({}^*X, \mathfrak{S})
\end{tikzcd}$$

2. Ein Kontinuitätssatz für Cohomologieklassen

Den einfachsten Fall der analytischen Cohomologietheorie hat man in einem Bereich X eines komplexen Zahlenraumes $\mathbf{C}^n$ (Bereich: offener Unterraum). Die Garbe der Keime holomorpher Funktionen in X sei mit $\mathcal{O}$ bezeichnet; $\mathcal{O}$-Garben abelscher Gruppen heißen analytische Garben. Für kohärente analytische Garben (vgl. hierzu CARTAN [3] und SERRE [12]) $\mathfrak{S}$ in X hat man den als Theorem B schlechthin bekannten fundamentalen Verheftungssatz von H. CARTAN: $H^p(X, \mathfrak{S}) = 0$ für $p \geqq 1$, wenn X ein Holomorphiegebiet ist. Es ist von Bedeutung zu wissen, in welchen anderen Gebieten analytische Cohomologiegruppen noch verschwinden. In unserem Fall benötigen wir den

folgenden Satz, der bekannten Kontinuitätssätzen für Funktionen und Cousin-Verteilungen (W. ROTHSTEIN) entspricht:

Hilfssatz: *Es seien G_0 der Einheitspolyzylinder* $\{|z_\nu| < 1 : \nu = 1, \ldots, n\}$ *im* $\mathbb{C}^n$, $n \geqq 3$, *und* G_1 *der Polyzylinder* $\{|z_1| < \varepsilon\} \cap G_0$, $0 < \varepsilon < 1$. *Für das Gebiet* $G := G_1 \cup (G_0 - \{z_2 = \ldots = z_m = 0\})$, $3 \leqq m \leqq n$, *gilt dann:*

$$H^p(G, \mathcal{O}) = 0 \quad \text{für} \quad p = 1, \ldots, m-2\,.$$

Beweis: Sei $U_1 := G_1$ und $U_i := G_0 - \{z_i = 0\}$ für $i = 2, \ldots, m$; dann ist $\mathfrak{U} := \{U_i : i = 1, \ldots, m\}$ eine Überdeckung von G mit Holomorphiegebieten. Durchschnitte von Holomorphiegebieten sind wieder Holomorphiegebiete; Theorem B besagt daher, daß $\mathfrak{U}$ eine Leraysche Überdeckung von G für die Garbe $\mathcal{O}$ ist, d. h. daß $H^p(X, \mathcal{O})$ isomorph zur Čechschen Cohomologiegruppe $H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ bezüglich der Überdeckung $\mathfrak{U}$ ist. Es genügt daher, $H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = 0$ nachzuweisen.

Mit U wollen wir kurz die Menge $U_{1\ldots m} = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_m$ bezeichnen. Sämtliche holomorphen Funktionen, die zu einem Cozyklus aus $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ gehören, sind jedenfalls in U holomorph. Für eine in U holomorphe Funktion f gibt es in naheliegender Weise eine Cauchysche Integraldarstellung in Teilgebieten von U, deren Bestimmungsflächen Produkte von Kreislinien k_μ nahe bei 0 und K_μ nahe bei ε in den einzelnen Veränderlichen $z_2, \ldots, z_m$ sind. f stellt sich dar als Summe von Integralen über die Komponenten der Bestimmungsfläche (Laurent-Trennung); den Summanden, der sich durch Integration über das Produkt der Kreise k_μ in den Veränderlichen $\mu_2, \ldots, \mu_r$ und der Kreise K_μ in den übrigen Veränderlichen ergibt, wollen wir mit $C_M(f)$ bezeichnen, wobei $M := \{\mu_2, \ldots, \mu_r\}$. Wird nur über das Produkt der Kreise $K_2, \ldots, K_m$ integriert, dann nennen wir die erhaltene Funktion $C_M(f)$ mit $M = \emptyset$. Offenbar stellt C_M für jedes der angegebenen M einen Endomorphismus von $\Gamma(U, \mathcal{O})$ dar.

Nun betrachten wir das Bild von $f_{i_0\ldots i_p}$ unter C_M, wo $f_{i_0\ldots i_p}$ in $U_{i_0\ldots i_p} \supsetneqq U$ holomorph ist und p der Einschränkung $1 \leqq p \leqq m-2$ des Satzes unterliegt Es gilt zunächst:

(α) Kommt ein i in M, aber nicht in $\{i_0, \ldots, i_p\}$ vor, dann gilt: $C_M(f_{i_0\ldots i_p}) = 0$. Denn in diesem Fall wird bei C_M über den Kreis k_i integriert, in dessen Innern $f_{i_0\ldots i_p}$ holomorph ist. Wegen $1 + p < m$ folgt aus (α) sofort:

(β) $C_M(f_{i_0\ldots i_p}) = 0$ für $M = \{2, \ldots, m\}$.

Sodann ist für uns wichtig:

(γ) $C_M(f_{i_0\ldots i_p})$ ist in $U_{i_0\ldots i_p}$ holomorph.

Wegen (α) können wir gleich $M \subseteq \{i_0, \ldots, i_p\}$ annehmen. Für $M = \{\mu_2, \ldots, \mu_r\}$ ist $C_M(f_{i_0\ldots i_p})$ offenbar in $U_1 \cap U_{\mu_2\ldots\mu_r}$ holomorph; für $M = \emptyset$ ist $C_M(f_{i_0\ldots i_p})$ in U_1 holomorph. Gehört 1 nicht zu $\{i_0, \ldots, i_p\}$, dann lassen sich offenbar die K_μ bei 1 statt bei ε wählen, und es gilt: $C_M(f_{i_0\ldots i_p})$ ist in $U_{\mu_2\ldots\mu_r}$ bzw. sogar in G_0 holomorph. Hieraus resultiert: $C_M(f_{i_0\ldots i_p})$ ist sicher in $U_{i_0\ldots i_p}$ holomorph. q. e. d. Ferner hat man unmittelbar:

(δ) Für ein i mit $i \neq 1$, $i \notin M$ gilt: $C_M(f_{i i_0\ldots i_p})$ ist in $U_{i_0\ldots i_p}$ holomorph.

Nach (γ) induzieren die C_M Endomorphismen von $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Ihre Summe ist gleich der Identität. Es genügt daher zu zeigen, daß $C_M(f)$ ein Corand ist,

wenn f einen Cozyklus aus $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ darstellt. Wegen (β) können wir uns auf den Fall beschränken, daß es ein i mit $i \neq 1$, $i \notin M$ gibt. Nach (δ) können wir dann eine $(p-1)$-Cokette g folgendermaßen definieren:

$$g_{i_0 \ldots i_{p-1}} := C_M(f_{i i_0 \ldots i_p}) \,.$$

Wir verifizieren $\delta^{p-1}(g) = C_M(f)$:

$$\begin{aligned} \delta^{p-1}(g)_{i_0 \ldots i_p} &= \sum_{\pi=0}^{p} (-1)^\pi g_{i_0 \ldots \hat{i}_\pi \ldots i_p} \\ &= C_M\left(\sum_{\pi=0}^{p} (-1)^\pi f_{i i_0 \ldots \hat{i}_\pi \ldots i_p}\right) \\ &= C_M(f_{i_0 \ldots i_p}) \,. \end{aligned}$$

Es sei noch bemerkt, daß die letzte Gleichheit wegen des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen statthat.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

3. Hebbarkeitssätze für freie Koeffizientengarben

Es sei im folgenden X stets ein Bereich (d. h. ein offener Unterraum) im n-dimensionalen Zahlenraum $\mathbb{C}^n$. Kohärente analytische Garben $\mathfrak{S}$ in X, deren Halme $\mathfrak{S}_x$ entweder frei über $\mathcal{O}_x$ oder trivial sind ($x \in X$), heißen kurz *freie* Garben. Ist $\mathfrak{S}$ eine freie Garbe in X, dann besitzt jeder Punkt $x \in X$ offenbar eine Umgebung U_x, so daß $\mathfrak{S}(U_x)$ isomorph zur Nullgarbe oder isomorph zu einer Garbe $\mathcal{O}^q(U_x)$ ist, $q = q(x)$. Freie Garben sind beispielsweise die direkten Summen $\mathcal{O}^q$, $q \geq 1$, selbst. In diesem ganzen Abschnitt sei mit $\mathfrak{S}$ stets eine freie Garbe in X bezeichnet.

Cohomologieklassen sollen über Trümmer analytischer Mengen von X; d. h. über analytisch-dünne Mengen in X hinweg fortgesetzt werden. Im weiteren Sinne des Wortes kann jede abgeschlossene Teilmenge A von X als analytisch-dünne Menge angesehen werden. Die kleinste der Zahlen d_x, für die es eine Umgebung U_x von x in X gibt, so daß $A \cap U_x$ in einer analytischen Menge B_x in U_x der Dimension d_x enthalten ist, heißt die Dimension $\dim_x A$ der abgeschlossenen Menge A im Punkte x. $n - \dim_x A$ wird als Codimension $\operatorname{codim}_x A$ von A im Punkte x bezeichnet. $\sup\limits_{x \in X} \dim_x A$ und $\inf\limits_{x \in X} \operatorname{codim}_x A$ werden kurz mit $\dim A$ bzw. $\operatorname{codim} A$ bezeichnet. Abgeschlossene Mengen A mit $\operatorname{codim} A \geq 1$ liegen nirgends dicht in X und bilden genau die Mengen, die üblicherweise analytisch-dünn genannt werden. In den folgenden Sätzen bezeichnet A stets eine abgeschlossene Menge.

Es gilt nun:

Satz 1: *In jedem Punkte $x \in A$ sei $\mathfrak{S}_x = 0$ oder $p \leq \operatorname{codim}_x A - 1$. Dann ist die Beschränkungsabbildung*

$$H^p(X, \mathfrak{S}) \to H^p(X - A, \mathfrak{S})$$

injektiv.

Dieser Satz gibt ein Kriterium dafür an, daß sich die Cohomologieklassen aus $H^p(X - A, \mathfrak{S})$ höchstens auf eine Weise (also eindeutig) nach X fortsetzen lassen. Es gilt weiter:

Satz 2: *In jedem Punkte $x \in A$ sei $\mathfrak{S}_x = 0$ oder $p \leqq \operatorname{codim}_x A - 1$. Ein $\alpha \in H^p(X - A, \mathfrak{S})$ möge sich in die Umgebung eines jeden Punktes von A fortsetzen lassen; dann gehört α zum Bild der Beschränkungsabbildung $H^p(X, \mathfrak{S}) \to \to H^p(X - A, \mathfrak{S})$.*

Unter der genannten Voraussetzung läßt sich also jede Cohomologieklasse $\alpha \in H^p(X - A, \mathfrak{S})$ nach ganz X fortsetzen, wenn sie in die Umgebung eines jeden Punktes von A fortsetzbar ist, d. h. wenn es zu jedem $x \in A$ eine Umgebung U_x gibt, so daß α bei Beschränkung auf $U_x - A$ ein Element des Bildes von $H^p(U_x, \mathfrak{S}) \to H^p(U_x - A, \mathfrak{S})$ ergibt, oder, was dasselbe ist, ein Element des Bildes von $H^p((X - A) \cup U_x, \mathfrak{S}) \to H^p(X - A, \mathfrak{S})$ ist. Sodann gibt es ein wichtiges hinreichendes Kriterium für die lokale Fortsetzbarkeit:

Satz 3: *In einem Punkte $x_0 \in A$ sei $\mathfrak{S}_{x_0} = 0$ oder $p \leqq \operatorname{codim}_{x_0} A - 2$. Dann ist jedes Element von $H^p(X - A, \mathfrak{S})$ in eine Umgebung von x_0 fortsetzbar.*

Die vorstehenden Sätze ergeben unmittelbar das

Korollar: *In jedem Punkte $x \in A$ sei $\mathfrak{S}_x = 0$ oder $p \leqq \operatorname{codim}_x A - 2$. Dann ist die Beschränkungsabbildung*

$$H^p(X, \mathfrak{S}) \to H^p(X - A, \mathfrak{S})$$

bijektiv.

Beweis der Sätze: Wir führen eine Induktion über p durch. Induktionsbeginn: $p = 0$. Satz 1 bedeutet hier, daß sich die Schnittflächen in freien Garben höchstens eindeutig über A fortsetzen; das braucht nur lokal nachgeprüft zu werden, wo $\mathfrak{S}$ nicht trivial ist; Tupel holomorpher Funktionen (Schnittflächen in Garben $\mathcal{O}^q$) setzen sich aber als stetige Abbildungen höchstens eindeutig über nirgendsdichte Mengen fort. Wegen der damit bewiesenen Eindeutigkeit der Fortsetzung von Schnittflächen in $\mathfrak{S}$ ist Satz 2 für $p = 0$ evident. Satz 3 für $p = 0$ ist, wenn man von dem trivialen Fall $\mathfrak{S}_{x_0} = 0$ absieht, nichts anderes als der 2. Riemannsche Hebbarkeitssatz für Tupel holomorpher Funktionen in einer genügend klein gewählten Umgebung von x_0, in der man $\operatorname{codim} A \geqq 2$ hat.

Sei also nun $p \geqq 1$ und mögen die Sätze 1, 2 und 3 gelten für alle natürlichen Zahlen, die kleiner als p sind. Zunächst hat man immer das folgende zur Verfügung: Für jede beliebige Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X gilt, wenn $^*\mathfrak{U}$ die Beschränkung $\{U_\iota - A : \iota \in I\}$ von $\mathfrak{U}$ auf $X - A$ bezeichnet: Die Beschränkungsabbildung

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \to H^p(^*\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$$

ist bijektiv. Denn aus $1 \leqq p \leqq \operatorname{codim}_x A - 1$ folgt $\operatorname{codim}_x A \geqq 2$, so daß man aus der Isomorphie zwischen $\Gamma(U - A, \mathfrak{S})$ und $\Gamma(U, \mathfrak{S})$ für jede offene Menge U in X folgert, daß im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
C^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) & \xrightarrow{\delta^{p-1}} & C^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) & \xrightarrow{\delta^p} & C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C^{p-1}(^*\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) & \xrightarrow{^*\delta^{p-1}} & C^p(^*\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) & \xrightarrow{^*\delta^p} & C^{p+1}(^*\mathfrak{U}, \mathfrak{S})
\end{array}$$

die vertikalen Beschränkungshomomorphismen bijektiv sind, was unmittelbar die Behauptung ergibt.

Das Beweisprinzip bei den Sätzen 1 und 2 ist nun das folgende: Man betrachtet zu einer geeignet gewählten Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) & \xrightarrow{\text{bijektiv}} & H^p({}^*\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda^p} & & \downarrow{\scriptstyle {}^*\lambda^p} \\ H^p(X, \mathfrak{S}) & \longrightarrow & H^p(X - A, \mathfrak{S}) \end{array}$$

und bekommt die gewünschten Informationen über $H^p(X, \mathfrak{S}) \to H^p(X-A, \mathfrak{S})$ aus den Eigenschaften von λ^p und ${}^*\lambda^p$.

Zu Satz 1: Wählt man $\mathfrak{U}$ als eine Überdeckung, deren Elemente Holomorphiegebiete sind, dann ist λ^p offenbar surjektiv und es genügt, um $H^p(X, \mathfrak{S}) \to H^p(X - A, \mathfrak{S})$ als injektiv zu erweisen, den Beweis zu erbringen, daß ${}^*\lambda^p$ injektiv ist. Für $p = 1$ ist dies die Aussage von Lemma L_0. Bei $p \geqq 2$ genügt es nach Lemma L_{p-1} weiter zu zeigen, daß $H^{p-1-q}(U_{i_0 \ldots i_q} - A, \mathfrak{S}) = 0$ für jedes $\langle i_0, \ldots, i_q \rangle$ und für jedes q mit $0 \leqq q \leqq p-2$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt: $H^{p-1-q}(U_{i_0 \ldots i_q} - A, \mathfrak{S}) = H^{p-1-q}(U_{i_0 \ldots i_q}, \mathfrak{S})$. Die letztere Gruppe verschwindet aber, da $U_{i_0 \ldots i_q} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}$ ein Holomorphiegebiet ist. Damit ist alles gezeigt.

Zu Satz 2: Sei $\alpha \in H^p(X - A, \mathfrak{S})$ lokal nach X fortsetzbar. Dann gibt es eine Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i : i \in I\}$ von X mit Holomorphiegebieten, so daß α bei Beschränkung auf $U_i - A$ in das Nullelement von $H^p(U_i - A, \mathfrak{S})$ geht für jedes i. Die Induktionsvoraussetzung besagt nun gerade, daß Lemma L_p^* auf α und ${}^*\mathfrak{U} = \mathfrak{U} - A$ anwendbar ist, d. h. daß α zum Bild von ${}^*\lambda^p$ gehört. Das bedeutet aber, daß α zum Bild von $H^p(X, \mathfrak{S}) \to H^p(X - A, \mathfrak{S})$ gehört.

Zu Satz 3: Sehen wir von dem trivialen Fall $\mathfrak{S}_{x_0} = 0$ ab; dann ist $p \leqq \operatorname{codim}_{x_0} A - 2$ vorgegeben. Die Aussage von Satz 3 ist lokaler Art; daher können wir annehmen, daß in ganz X gilt: $p \leqq \operatorname{codim} A - 2$ und daß A in einer analytischen Menge B in X liegt, für die gilt: $\operatorname{codim} B = \operatorname{codim} A$. Da die Codimension der analytisch-dünnen Mengen in X nach oben beschränkt ist, können wir annehmen, daß Satz 3 für p und alle analytisch-dünnen Mengen A' mit $\operatorname{codim} A' > \operatorname{codim} A$ schon bewiesen ist. Insbesondere können wir dies voraussetzen für eine analytisch-dünne Menge C in X mit $\operatorname{codim} C > \operatorname{codim} B$, die alle nichtgewöhnlichen Punkte von B enthält. Betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, \mathfrak{S}) & \xrightarrow{(1)} & H^p(X - A, \mathfrak{S}) \\ \downarrow{\scriptstyle (5)} & \searrow{\scriptstyle (3)} & \downarrow{\scriptstyle (2)} \\ H^p(X - C, \mathfrak{S}) & \xrightarrow{(4)} & H^p(X - B, \mathfrak{S}) \end{array}$$

mit den Beschränkungsabbildungen (1), ..., (5). Nach Satz 1 ist (2) injektiv. Wegen $\operatorname{codim} C > \operatorname{codim} A$ ist (5) surjektiv. Können wir also noch zeigen, daß (4) surjektiv ist, dann folgt aus dem Diagramm, daß (3) und endlich (1)

surjektiv ist. B hat nur gewöhnliche Punkte in $X - C$. Wegen Satz 2 genügt es daher zu zeigen, daß Satz 3 für niederdimensionale Ebenenstücke gilt. Nach der Definition der lokalen Fortsetzbarkeit hat man eine geeignete Umgebung U von $x \in A$ anzugeben, so daß $H^p(U - A, \mathfrak{S}) = 0$ gilt. Wählt man U so klein, daß sich $\mathfrak{S}(U)$ jedenfalls als ein $\mathcal{O}^q(U)$ darstellt, dann hat man wegen der Isomorphie $H^p(U - A, \mathcal{O}^q) = (H^p(U - A, \mathcal{O}))^q$ nur noch zu zeigen: $H^p(U - A, \mathcal{O}) = 0$. Nach einer geeigneten Transformation hat man: U ist als Umgebung des Nullpunktes des $\mathbf{C}^n$ zu wählen und A stellt sich dar als $\{z_1 = \ldots = z_m = 0\}$ mit $p \leqq m - 2$. Sei U der Einheitspolyzylinder um den Punkt $\left(\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)$, $U_1 := \left\{\left|z_1 - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\} \cap U$ und $V := U_1 \cup (U - \{z_2 = \ldots = z_m = 0\})$. Offenbar gilt: $V \subsetneqq U - A$ und V unterscheidet sich von $U - A$ um eine $(m - 1)$-codimensionale analytisch-dünne Menge. Wir können daher wegen $p \leqq (m - 1) - 1$ Satz 1 heranziehen und erhalten: Die Beschränkung $H^p(U - A, \mathcal{O}) \to H^p(V, \mathcal{O})$ ist injektiv. Nach dem Hilfssatz aus Abschnitt 2 ist $H^p(V, \mathcal{O}) = 0$; deshalb ist auch $H^p(U - A, \mathcal{O}) = 0$. Und damit ist Satz 3 bewiesen.

Aus dem Hilfssatz läßt sich noch eine stärkere Aussage als die von Satz 3 herleiten. Machen wir die Voraussetzung $p \leqq \operatorname{codim} A - 1$ und betrachten wir ein $\alpha \in H^p(X - A, \mathfrak{S})$. Die Vereinigung von $X - A$ mit allen denjenigen Punkten von A, in deren Umgebung sich α fortsetzen läßt, definiert nach Satz 2 einen Bereich X_α mit $X - A \subsetneqq X_\alpha \subsetneqq X$, in den sich α eindeutig fortsetzen läßt und der alle Bereiche mit derselben Eigenschaft enthält. Man kann X_α den genauen Existenzbereich (oder den Holomorphiebereich) von α in X nennen. Es gilt nun:

Satz 4: *In jedem Punkte $x \in A$ sei $\mathfrak{S}_x = 0$ oder $p \leqq \operatorname{codim}_x A - 1$, und es sei $\alpha \in H^p(X - A, \mathfrak{S})$. Für den genauen Existenzbereich $X_\alpha \supsetneqq X - A$ von α in X gilt dann: $X - X_\alpha$ ist leer oder eine analytische Menge der reinen Codimension $p + 1$.*

Beweis: Der Satz ist lokaler Natur, da die Randpunkte von X_α in X die charakteristische Eigenschaft besitzen, daß α nicht lokal über sie hinaus fortgesetzt werden kann. Daher können wir annehmen, daß A in einer analytischen Menge der gleichen Codimension enthalten ist, und weiter wegen der eindeutigen Bestimmtheit von X_α (Satz 2), daß A selbst eine analytische Menge ist. Ein Punkt $x \in A$ mit $p \leqq \operatorname{codim}_x A - 2$ gehört jedenfalls zu X_α wegen Satz 3; deshalb können wir sofort annehmen, daß A eine analytische Menge der reinen Codimension $p + 1$ ist.

Sei A' die Vereinigung derjenigen irreduziblen Komponenten[3]) von A, die in $X - X_\alpha$ enthalten sind; wir werden zeigen, daß $X - X_\alpha = A'$ ist. Sei A'' die Vereinigung derjenigen Komponenten von A, die in X_α eindringen. Da A' diese Komponenten nicht zerlegt, dringen alle Komponenten der analytischen Menge $A''_0 := A'' - A'$ in $X - A'$ in den Bereich X_α ein. Es genügt zu zeigen,

[3]) Die hier und schon beim Beweis zu Satz 3 verwendeten Grundbegriffe und Grundlagen der Theorie der analytischen Mengen findet man etwa in [9] von R. Remmert und K. Stein.

daß α über A_0'' hinaus fortgesetzt werden kann. Mit A_1 sei eine analytisch-dünne Menge mit $\operatorname{codim} A_1 \geqq p+1$ in $X - A'$ bezeichnet, die alle nichtgewöhnlichen Punkte von A_0'' enthält, und mit B die analytische Menge $A_0'' - A_1$ in $X - A' - A_1$. Da α am Ende nach Satz 3 sicher über A_1 fortgesetzt werden kann, genügt es, α über B fortzusetzen. Da A_1 die Komponenten von A_0'' nicht zerlegt, kann man voraussetzen, daß alle Komponenten von B, und das sind, da B singularitätenfrei ist, alle Zusammenhangskomponenten von B, in X_α eindringen. Sei B_0 eine beliebige Komponente von B. $X_\alpha \cap B_0$ ist nichtleer; daher haben wir nur noch zu zeigen, daß es keinen Randpunkt von $X_\alpha \cap B_0$ in B_0 gibt. Das ist ein lokales Problem. Daher brauchen wir Satz 4 nur für Garben $\mathcal{O}^q$ zu beweisen. Bei $p = 0$ ist dies mit einem bekannten Kontinuitätssatz für holomorphe Funktionen in seiner einfachsten Form zu erreichen. Bei $p \geqq 1$ ist der Hilfssatz anwendbar, wie man leicht sieht.

Korollar: *A sei eine irreduzible $(p+1)$-codimensionale analytische Menge in X. Jede Cohomologieklasse aus $H^p(X - A, \mathfrak{S})$, die sich in die Umgebung eines Punktes von A fortsetzen läßt, kann dann nach X fortgesetzt werden.*

4. Hebbarkeitssätze für kohärente analytische Koeffizientengarben

Es sei im folgenden mit X stets ein Bereich im $\mathbf{C}^n$ bezeichnet und mit A eine analytisch-dünne Menge in X, über die Cohomologieklassen fortgesetzt werden sollen. Als Koeffizientengarben wollen wir jetzt beliebige kohärente analytische Garben $\mathfrak{S}$ in X zulassen. Wenn $\mathfrak{S}$ in den Punkten von A frei ist, haben wir die Ergebnisse des vorigen Abschnittes zur Verfügung. Andernfalls können wir eine Induktion über eine stufenartige Unterscheidung zu Garben $\mathcal{O}^q$ führen. In der Umgebung U eines jeden Punktes von A hat man ja eine exakte Garbensequenz

$$\mathcal{O}^q(U) \xrightarrow{h} \mathfrak{S}(U) \longrightarrow 0$$

mit einem analytischen Homomorphismus h. $\operatorname{Kern} h$ ist wieder eine kohärente analytische Garbe und gibt Anlaß zur exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Kern} h \longrightarrow \mathcal{O}^q(U) \xrightarrow{h} \mathfrak{S}(U) \longrightarrow 0\,,$$

aus der man mit den üblichen Methoden Kenntnisse über $\mathfrak{S}(U)$ beziehen kann, wobei einem zustatten kommt, daß $\operatorname{Kern} h$ eine einfacher geartete Garbe ist als $\mathfrak{S}(U)$, wenn $\mathfrak{S}(U)$ nicht schon frei ist.

Man präzisiert dies so: Als homologische Dimension $\operatorname{hd}_x \mathfrak{S}$ der Garbe $\mathfrak{S}$ im Punkte $x \in X$ bezeichnet man die Zahl -1 bei $\mathfrak{S}_x = 0$ und sonst die kleinste natürliche Zahl d, für die eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_x^{q_d} \to \cdots \to \mathcal{O}_x^{q_0} \to \mathfrak{S}_x \to 0$$

von $\mathcal{O}_x$-Homomorphismen möglich ist. Diese Zahl stimmt mit der sog. projektiven Dimension des $\mathcal{O}_x$-Moduls $\mathfrak{S}_x$ aus der homologischen Algebra überein[4]). Da $\mathcal{O}_x$ ein regulärer Stellenring der Dimension n ist, gilt stets $\operatorname{hd}_x \mathfrak{S} \leqq n$ (sog. Syzygiensatz von HILBERT, siehe [4], Kap. VIII).

[4]) Man benutze CARTAN-EILENBERG [4], prop. 2.1 (d), p. 110, und theorem 6.1', p. 157. Für kohärente algebraische Garben findet sich diese Überlegung bei SERRE [12], p. 268.

Ferner übernimmt man aus der Algebra sofort die Aussage: Gilt $\mathrm{hd}_x \mathfrak{S} > 0$, d. h. $\mathfrak{S}_x \neq 0$ und $\mathfrak{S}_x$ nicht $\mathcal{O}_x$-frei, und hat man die exakte Sequenz

$$\mathcal{O}_x^q \xrightarrow{h_x} \mathfrak{S}_x \longrightarrow 0\,,$$

dann gilt: $\mathrm{hd}\,\mathrm{Kern}\,h_x = \mathrm{hd}_x \mathfrak{S} - 1$. Für die exakte Sequenz

$$\mathcal{O}^q(U) \xrightarrow{h} \mathfrak{S}(U) \longrightarrow 0$$

in einer Umgebung U von x (siehe oben) bedeutet das: $\mathrm{hd}_x \mathrm{Kern}\,h = \mathrm{hd}_x \mathfrak{S} - 1$, d. h. $\mathrm{Kern}\,h$ ist in x einfacher geartet als $\mathfrak{S}$. Im Falle $\mathrm{hd}_x \mathfrak{S} \leqq 0$ gilt: $\mathrm{hd}_x \mathrm{Kern}\,h \leqq 0$.

Aus der Kohärenz der Garbe $\mathfrak{S}$ folgt die für uns wichtige Aussage: $\mathrm{hd}_x \mathfrak{S}$ ist eine in X nach oben halbstetige Funktion, d. h. in einer genügend kleinen Umgebung von $x \in X$ kann $\mathfrak{S}$ keine schwieriger gearteten Halme haben als $\mathfrak{S}_x$. Die Homomorphismen von Halmen kohärenter Garben werden nämlich auf eindeutige Weise durch lokale Garbenhomomorphismen repräsentiert[5]). Das bedeutet: Eine endliche Auflösung von $\mathfrak{S}_x$ durch Moduln $\mathcal{O}_x^q$ überträgt sich auf eine ganze Umgebung von x. Das beweist aber die Halbstetigkeit von $\mathrm{hd}_x \mathfrak{S}$. — Das $\sup\limits_{x \in X} \mathrm{hd}_x \mathfrak{S}$ bezeichnen wir auch kurz als $\mathrm{hd}\,\mathfrak{S}$, die homologische Dimension von $\mathfrak{S}$ in X. Freie Garben sind augenscheinlich die Garben der homologischen Dimension $\leqq 0$.

In einer Verallgemeinerung der Sätze 1 bis 4 hat $\mathrm{hd}\,\mathfrak{S}$ als Korrekturglied aufzutreten; statt $\mathrm{codim}_x A - 1$ tritt jetzt die nach unten halbstetige Funktion $(\mathrm{codim}_x A - 1) - \mathrm{hd}_x \mathfrak{S}$ auf.

Satz 1*: *In jedem Punkte $x \in A$ sei $\mathfrak{S}_x = 0$ oder $p \leqq (\mathrm{codim}_x A - 1) - \mathrm{hd}_x \mathfrak{S}$. Dann ist die Beschränkungsabbildung*

$$H^p(X, \mathfrak{S}) \to H^p(X - A, \mathfrak{S})$$

injektiv.

Satz 2*: *In jedem Punkte $x \in A$ sei $\mathfrak{S}_x = 0$ oder $p \leqq (\mathrm{codim}_x A - 1) - \mathrm{hd}_x \mathfrak{S}$. Ein $\alpha \in H^p(X - A, \mathfrak{S})$ möge sich in die Umgebung eines jeden Punktes von A fortsetzen lassen; dann gehört α zum Bild der Beschränkungsabbildung $H^p(X, \mathfrak{S}) \to H^p(X - A, \mathfrak{S})$.*

Satz 3*: *In einem Punkte $x_0 \in A$ sei $\mathfrak{S}_{x_0} = 0$ oder $p \leqq (\mathrm{codim}_{x_0} A - 2) - \mathrm{hd}_{x_0} \mathfrak{S}$. Dann ist jedes Element von $H^p(X - A, \mathfrak{S})$ in eine Umgebung von x_0 fortsetzbar.*

Korollar: *In jedem Punkte $x \in A$ sei $\mathfrak{S}_x = 0$ oder $p \leqq (\mathrm{codim}_x A - 2) - \mathrm{hd}_x \mathfrak{S}$. Dann ist die Beschränkungsabbildung*

$$H^p(X, \mathfrak{S}) \to H^p(X - A, \mathfrak{S})$$

bijektiv.

Auf Grund der vorstehenden Sätze 1* und 2* lassen sich wieder die genauen Existenzbereiche von Cohomologieklassen aus $H^p(X - A, \mathfrak{S})$ definieren. Es gilt:

Satz 4*: *In jedem Punkte $x \in A$ sei $\mathfrak{S}_x = 0$ oder $p \leqq (\mathrm{codim}_x A - 1) - \mathrm{hd}_x \mathfrak{S}$. Für den genauen Existenzbereich X_α eines $\alpha \in H^p(X - A, \mathfrak{S})$ zwischen*

[5]) Siehe Serre [12], p. 209, prop. 5.

$X - A$ und X gilt dann: $X - X_\alpha$ ist eine analytische Menge A_α mit $\operatorname{codim}_x A_\alpha = p + 1 + \operatorname{hd}_x \mathfrak{S}$ *für jedes $x \in A_\alpha$.*

Korollar 1: *Die Funktionen* $\operatorname{codim}_x A_\alpha = p + 1 + \operatorname{hd}_x \mathfrak{S}$ *und* $\operatorname{hd}_x \mathfrak{S} = \operatorname{codim}_x A_\alpha - p - 1$ *sind lokalkonstant auf A_α.*

Denn $\operatorname{codim}_x A_\alpha$ ist nach unten und $\operatorname{hd}_x \mathfrak{S}$ ist nach oben halbstetig.

Korollar 2: *A sei eine irreduzible analytische Menge in X, und es sei $p \leq (\operatorname{codim}_x A - 1) - \operatorname{hd}_x \mathfrak{S}$ in jedem Punkte $x \in A$. Jede Cohomologieklasse aus $H^p(X - A, \mathfrak{S})$, die sich in die Umgebung irgendeines Punktes von A fortsetzen läßt, kann dann nach X fortgesetzt werden. Dies ist insbesondere der Fall, wenn $\operatorname{hd}_x \mathfrak{S}$ nicht auf A konstant ist.*

Beweis: Die Korollare ergeben sich direkt. Satz 3* ist offenbar ein Spezialfall von Satz 4*. Es genügt daher, die Sätze 1*, 2* und 4* zu beweisen, und zwar durch Induktion über p. Dabei reduziert sich der Beweis leicht auf lokale Betrachtungen, weil es möglich ist, die Cohomologieklassen mit Hilfe des verallgemeinerten Lerayschen Lemmas über geeigneten Überdeckungen mit genügend kleinen Elementen zu repräsentieren, wie dies schon beim Beweis der Sätze 1 und 2 durchgeführt wurde.

Es bleibt zu zeigen, daß die Sätze 1* und 4* stets lokal gelten. Das heißt: Sind X, $\mathfrak{S}$, A und p vorgegeben und gilt in jedem Punkte $x \in A$ $\mathfrak{S}_x = 0$ oder $p \leq (\operatorname{codim}_x A - 1) - \operatorname{hd}_x \mathfrak{S}$, dann ist zu jedem $y \in A$ eine Umgebung U_y in X anzugeben, so daß die Sätze 1* und 4* für $\mathfrak{S}$, A und p in jedem Teilbereich V von U_y gelten. — Wir führen eine Induktion durch über die Zahlen d, die als homologische Dimension der Halme auftreten. Der Induktionsbeginn wird uns durch die Sätze 1 und 4 gegeben, da kohärente analytische Garben in einer ganzen Umgebung von Punkten frei sind, in denen ihre Halme frei sind. Nun haben wir den Schluß von d auf $d + 1$ auszuführen und können gleich annehmen, daß $\mathfrak{S}$ im Punkte $y \in A$ die Dimension $\operatorname{hd}_y \mathfrak{S} = d + 1 > 0$ hat. Zunächst wählen wir U_y so klein, daß für alle $z \in U_y$ gilt: $\operatorname{codim}_z A \geq \operatorname{codim}_y A$. Nach der Voraussetzung $p \leq (\operatorname{codim}_y A - 1) - \operatorname{hd}_y \mathfrak{S}$ hat man wegen $\operatorname{hd}_y \mathfrak{S} > 0$ offenbar: $\operatorname{codim}_z A \geq \operatorname{codim}_y A \geq p + 2$. Sodann läßt sich U_y so klein wählen, daß es eine exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{O}^q(U_y) \xrightarrow{h} \mathfrak{S}(U_y) \longrightarrow 0$$

gibt, in der mit $\mathfrak{R}$ die Garbe Kern h bezeichnet ist, für die gilt: $\operatorname{hd}_y \mathfrak{R} = \operatorname{hd}_y \mathfrak{S} - 1 \leq d$, und von der man somit annehmen kann, daß die Sätze 1* und 4* für sie in allen Teilbereichen V von U_y gelten; U_y kann jedenfalls so klein gewählt werden. Damit haben wir alle Einschränkungen an U_y bereits aufgezählt.

Mit W sei irgendein Teilbereich zwischen $V - A$ und V bezeichnet. Aus der exakten Cohomologiesequenz zu der angeführten Garbensequenz über U_y sowie über V und W erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^p(W,\mathfrak{R}) & \to & H^p(W,\mathcal{O}^q) & \to & H^p(W,\mathfrak{S}) & \longrightarrow & H^{p+1}(W,\mathfrak{R}) & \to & H^{p+1}(W,\mathcal{O}^q) \\
\downarrow{\scriptstyle (1)} & & \downarrow{\scriptstyle (2)} & & \downarrow{\scriptstyle (3)} & & \downarrow{\scriptstyle (4)} & & \downarrow{\scriptstyle (5)} \\
H^p(V-A,\mathfrak{R}) & \to & H^p(V-A,\mathcal{O}^q) & \to & H^p(V-A,\mathfrak{S}) & \xrightarrow{(6)} & H^{p+1}(V-A,\mathfrak{R}) & \to & H^{p+1}(V-A,\mathcal{O}^q)
\end{array}$$

mit den Beschränkungshomomorphismen (1) bis (5). Wir wünschen uns Auskünfte über (3). Nach dem Schema des bekannten 5er-Lemmas sind sie aus den Eigenschaften von (1), (2), (4) und (5) zu erhalten.

Nach Konstruktion von U_y gilt $\operatorname{codim}_z A \geqq p + 2$ in ganz U_y und damit in W. Daher ist (2) nach Satz 2 bijektiv und (5) nach Satz 1 injektiv.

Wenden wir uns der Garbe $\mathfrak{R}$ zu. Ist $\mathfrak{S}$ in der Umgebung von $z \in A \cap U_y$ frei, dann auch $\mathfrak{R}$, d. h. man hat $\operatorname{hd}_z \mathfrak{R} \leqq 0$, und aus $\operatorname{codim}_z A \geqq p + 2$ folgt sofort: $p \leqq (\operatorname{codim}_z A - 2) - \operatorname{hd}_z \mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{S}$ in der Umgebung von $z \in A \cap U_y$ nicht frei, dann erhält man unmittelbar durch Einsetzen von $\operatorname{hd}_z \mathfrak{S} = 1 + \operatorname{hd}_z \mathfrak{R}$ in die Ungleichung $p \leqq (\operatorname{codim}_z A - 1) - \operatorname{hd}_z \mathfrak{S}$, die nach Voraussetzung statt hat: $p \leqq (\operatorname{codim}_z A - 2) - \operatorname{hd}_z \mathfrak{R}$. In jedem Punkte $z \in A \cap U_y$ hat man also:

$$p \leqq (\operatorname{codim}_z A - 2) - \operatorname{hd}_z \mathfrak{R} \quad \text{und} \quad p + 1 \leqq (\operatorname{codim}_z A - 1) - \operatorname{hd}_z \mathfrak{R}\,.$$

Satz 4*, der für $\mathfrak{R}$ in $W \subseteq U_y$ gilt, ergibt nun: (1) ist surjektiv. Ebenso ergibt Satz 1* für $\mathfrak{R}$: (4) ist injektiv.

Setzen wir jetzt $W = V$. Da (1) surjektiv und (2), (4) injektiv sind, ist die Abbildung $H^p(V, \mathfrak{S}) \to H^p(V - A, \mathfrak{S})$ injektiv. Also gilt Satz 1* für $\mathfrak{S}$ in jedem Teilbereich V von U_y.

Betrachten wir nun ein $\alpha \in H^p(V - A, \mathfrak{S})$. Wichtig für die Fortsetzung von α ist das (6)-Bild β von α. Ist nämlich α nach W fortsetzbar, dann trivialerweise auch β. Da (5) injektiv ist und (2) surjektiv ist, kann aber auch α nach W fortgesetzt werden, wenn β nach W fortsetzbar ist. Daher stimmt der genaue Existenzbereich V_α von α in V mit dem genauen Existenzbereich V_β von β in V überein. Also ist $A_\alpha := V - V_\alpha$ eine analytische Menge in V. Berechnen wir noch $\operatorname{codim}_z A_\alpha$. Über die analytische Menge $A_\alpha = V - V_\beta$ wissen wir jedenfalls: $\operatorname{codim}_z A_\alpha = p + 2 + \operatorname{hd}_z \mathfrak{R}$. $\mathfrak{S}$ ist in der Umgebung von z nicht frei, da α sonst wegen $\operatorname{codim}_z A \geqq p + 2$ in eine Umgebung von z fortsetzbar wäre nach Satz 3. Da $\mathfrak{S}_z$ nicht frei ist, gilt $\operatorname{hd}_z \mathfrak{S} = 1 + \operatorname{hd}_z \mathfrak{R}$ und somit $\operatorname{codim}_z A_\alpha = p + 1 + \operatorname{hd}_z \mathfrak{S}$. — Damit ist Satz 4* für $\mathfrak{S}$ in allen Teilbereichen V von U_y nachgewiesen.

5. Hebbarkeitssätze für Koeffizientengarben in allgemeinen komplexen Räumen

Die Hebbarkeitssätze lassen sich auch für Koeffizientengarben in beliebigen Mannigfaltigkeiten (selbst ohne abzählbare Basis der Topologie) und schließlich in leicht abgeänderter Form bei den allgemeinen komplexen Räumen erhalten, wie sie H. GRAUERT in [7] eingeführt hat. Unter einem (allgemeinen) komplexen Raum versteht man danach, kurz gesagt, einen Hausdorffraum X, der mit einer Strukturgarbe $\mathcal{O}$ komplexer Algebren versehen ist, so daß jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, dergestalt, daß U nichts anderes ist[6]) als eine analytische Menge in einem Bereich $\hat{X}$ eines $\mathbf{C}^n$ und die triviale Fortsetzung $\hat{\mathcal{O}}$

[6]) Es ist hier keine genauere Beschreibung der natürlichen Isomorphismen nötig; siehe dazu [7], § 1.

von $\mathcal{O}(U)$ nach $\hat{X}$ nichts anderes ist als eine Quotientengarbe $\tilde{\mathcal{O}}/\tilde{\mathfrak{J}}$, wo $\tilde{\mathcal{O}}$ die Strukturgarbe von $\hat{X}$ und $\tilde{\mathfrak{J}}$ eine kohärente Idealgarbe in $\tilde{\mathcal{O}}$ ist, die U als genaue Nullstellenmenge hat. $\mathcal{O}$ ist eine kohärente Garbe von Ringen; $\mathcal{O}$-Garben abelscher Gruppen über X heißen *analytische Garben*. Die einzelnen Halme $\mathfrak{S}_x$ einer kohärenten analytischen Garbe $\mathfrak{S}$ über X brauchen keine endliche homologische Dimension über $\mathcal{O}_x$ mehr zu haben; daher werden wir den dualen Begriff der homologischen Codimension des Halmes $\mathfrak{S}_x$ bezüglich seines Operatorringes $\mathcal{O}_x$ verwenden[7]). Wir bemerken, daß $\mathfrak{S}_x$ ein endlich erzeugter Modul über dem noetherschen Stellenring (local ring) $\mathcal{O}_x$ ist.

Sei allgemein R ein noetherscher Stellenring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Eine Folge $(r_1, \ldots, r_q)$ von Elementen aus $\mathfrak{m}$ heißt eine *M-Folge*, wenn für jedes $i \leq q$ gilt: M ist verschieden vom Untermodul M_i, der von den Elementen $\{r_1 \cdot M, \ldots, r_{i-1} \cdot M\}$ erzeugt wird $(M_1 := 0)$, und jedes $m \in M$ mit $r_i m \in M_i$ gehört zu M_i. Die Zahl q heißt *Länge* der M-Folge. Eine M-Folge $(r_1, \ldots, r_q)$ heißt *maximal*, wenn es kein $r_{q+1} \in \mathfrak{m}$ gibt, so daß $(r_1, \ldots, r_q, r_{q+1})$ eine M-Folge bildet. Es gilt nun für alle R-Moduln $M \neq 0$: Jede M-Folge läßt sich zu einer maximalen M-Folge verlängern, und alle maximalen M-Folgen haben dieselbe Länge. Die solcherart eindeutig bestimmte Zahl wird als *homologische Codimension* von M bezüglich R bezeichnet. Diese Bezeichnung rührt von dem folgenden Satz her: Ist R ein regulärer Stellenring, dann stimmt die Summe aus homologischer Dimension und Codimension von $M \neq 0$ mit der (idealtheoretischen) Dimension von R überein. Im Gegensatz zur homologischen Dimension hängt die homologische Codimension der Moduln nicht vom Operatorring ab, das soll heißen: Ist R der Quotient eines beliebigen weiteren noetherschen Stellenringes S, dann läßt sich M in natürlicher Weise als S-Modul auffassen, und die homologischen Codimensionen von M bezüglich R und S stimmen überein.

Betrachten wir nun eine kohärente analytische Garbe $\mathfrak{S}$ über X. In allen Punkten $x \in X$ mit $\mathfrak{S}_x \neq 0$ sei mit $\operatorname{codh}_x \mathfrak{S}$ die homologische Codimension von $\mathfrak{S}_x$ bezüglich $\mathcal{O}_x$ bezeichnet; der Definitionsbereich der Funktion $\operatorname{codh}_x \mathfrak{S}$ ist eine abgeschlossene Untermenge von X. Die Eigenschaften von $\operatorname{codh}_x \mathfrak{S}$ werden aus den lokalen Einbettungen von X bestimmt. Ist nämlich U eine Umgebung in X, die in der oben beschriebenen Weise eine analytische Menge in einem Bereich $\hat{X}$ eines $\mathbf{C}^n$ ist, dann läßt sich $\mathfrak{S}(U)$ auf triviale Weise zu einer kohärenten $\tilde{\mathcal{O}}$-Garbe $\hat{\mathfrak{S}}$ in $\hat{X}$ fortsetzen (siehe [12]) und in jedem Punkte $x \in U$ mit $\mathfrak{S}_x \neq 0$ gilt $\hat{\mathfrak{S}}_x \neq 0$ und $\operatorname{codh}_x \mathfrak{S} = \operatorname{codh}_x \hat{\mathfrak{S}} = n - \operatorname{hd}_x \hat{\mathfrak{S}}$, da $\tilde{\mathcal{O}}_x$ ein regulärer Stellenring der Dimension n ist. Hieran sieht man unmittelbar, daß $\operatorname{codh}_x \mathfrak{S}$ eine nach unten halbstetige Funktion ist.

Weiter ist zu sehen, daß als Korrekturglied in den allgemeinen Hebbarkeitsbedingungen bei komplexen Räumen die nach unten halbstetige Funktion

---

[7]) Der Begriff der homologischen Codimension stammt von M. Auslander und D. A. Buchsbaum (siehe beispielsweise [1]); zum folgenden siehe auch die Ausführungen [13] von J. P. Serre über diesen Gegenstand.

$-(\dim_x X - \operatorname{codh}_x \mathfrak{S})$ die Stelle von $-\operatorname{hd}_x \mathfrak{S}$ einnehmen wird (bemerken wir noch, daß dabei stets gilt: $\dim_x X - \operatorname{codh}_x \mathfrak{S} \geqq 0$). Statt

$$p \leqq (\operatorname{codim}_x A - 1) - (\dim_x X - \operatorname{codh}_x \mathfrak{S})$$

läßt sich die Bedingung kürzer so fassen[8]):

$$\operatorname{codh}_x \mathfrak{S} \geqq \dim_x A + p + 1\,.$$

Sind die Hebbarkeitsbedingungen für $\mathfrak{S}(U)$ gegen A in U in der gedachten Weise gegeben, dann sind, wie man unmittelbar durch Einsetzen feststellt, die Hebbarkeitsbedingungen für $\hat{\mathfrak{S}}$ gegen A in $\hat{X}$ erfüllt, so daß man die Sätze 1* bis 4* heranziehen kann. Beachtet man endlich, daß es ein natürliches kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^p(U, \mathfrak{S}) & \longrightarrow & H^p(U - A, \mathfrak{S}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(\hat{X}, \hat{\mathfrak{S}}) & \longrightarrow & H^p(\hat{X} - A, \hat{\mathfrak{S}}) \end{array}$$

gibt, in dem die horizontalen Homomorphismen die Beschränkungen und die vertikalen natürliche Isomorphismen sind (siehe [5]), dann sieht man, daß die Hebbarkeitssätze sicher lokal in den komplexen Räumen gelten.

Wieder durch eine Induktion über p läßt sich jetzt einfach zeigen, daß die Hebbarkeitssätze generell gelten. Der Beweis verläuft wie in Abschnitt 3. Bei $p = 0$, d. h. bei Schnittflächen, lassen sich die Sätze sofort auf lokale Betrachtungen reduzieren. Bei $p > 0$ hat man sodann das verallgemeinerte Leraysche Lemma und Überdeckungen mit genügend kleinen Elementen heranzuziehen, wenn die Betrachtungen nicht sowieso schon lokaler Art sind wie etwa bei den genauen Existenzbereichen der Cohomologieklassen.

Zum Schluß seien die einzelnen Sätze in ihrer allgemeinsten Fassung angegeben; die Korollare ergeben sich unmittelbar dazu. Dabei seien X ein allgemeiner komplexer Raum, $\mathfrak{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf X und A eine abgeschlossene Teilmenge von X. Es gilt:

Satz I: *In jedem Punkte $x \in A$ sei $\mathfrak{S}_x = 0$ oder* $\operatorname{codh}_x \mathfrak{S} \geqq \dim_x A + p + 1$. *Dann ist die Beschränkungsabbildung*

$$H^p(X, \mathfrak{S}) \to H^p(X - A, \mathfrak{S})$$

injektiv.

Satz II: *In jedem Punkte $x \in A$ sei $\mathfrak{S}_x = 0$ oder* $\operatorname{codh}_x \mathfrak{S} \geqq \dim_x A + p + 1$. *Ein $\alpha \in H^p(X - A, \mathfrak{S})$ möge sich in die Umgebung eines jeden Punktes von A fortsetzen lassen; dann gehört α zum Bild der Beschränkungsabbildung $H^p(X, \mathfrak{S}) \to H^p(X - A, \mathfrak{S})$.*

Satz III: *In einem Punkte $x_0 \in A$ sei $\mathfrak{S}_{x_0} = 0$ oder* $\operatorname{codh}_{x_0} \mathfrak{S} \geqq \dim_{x_0} A + p + 2$. *Dann ist jedes Element von $H^p(X - A, \mathfrak{S})$ in eine Umgebung von x_0 fortsetzbar.*

---

[8]) Analytische Mengen in allgemeinen komplexen Räumen werden als abgeschlossene Teilmengen definiert, die lokal bei Konkretisierungen des betr. Raumes in Zahlenräumen analytisch sind. Dann macht es keine Schwierigkeiten, für abgeschlossene Teilmengen A überhaupt den Begriff der komplex-analytischen Dimension $\dim_x A$ so wie ähnlich wie in Abschnitt 3 einzuführen.

Korollar: *In jedem Punkte $x \in A$ sei $\mathfrak{S}_x = 0$ oder* $\operatorname{codh}_x \mathfrak{S} \geqq \dim_x A + p + 2$. *Dann ist die Beschränkungsabbildung*

$$H^p(X, \mathfrak{S}) \to H^p(X - A, \mathfrak{S})$$

bijektiv.

Satz IV: *In jedem Punkte $x \in A$ sei $\mathfrak{S}_x = 0$ oder* $\operatorname{codh}_x \mathfrak{S} \geqq \dim_x A + p + 1$. *Für den genauen Existenzbereich X_α eines $\alpha \in H^p(X - A, \mathfrak{S})$ zwischen $X - A$ und X gilt dann: $X - X_\alpha$ ist eine analytische Menge A_α mit $\mathfrak{S}_x \neq 0$ und* $\operatorname{codh}_x \mathfrak{S} = \dim_x A_\alpha + p + 1$ *für jedes $x \in A_\alpha$.*

Korollar 1: *Die Funktionen* $\operatorname{codh}_x \mathfrak{S}$ *und* $\dim_x A_\alpha$ *sind lokalkonstant auf A_α.*

Korollar 2: *A sei eine irreduzible analytische Menge in X, und in jedem Punkte $x \in A$ sei $\mathfrak{S}_x = 0$ oder* $\operatorname{codh}_x \mathfrak{S} \geqq \dim_x A + p + 1$. *Jede Cohomologieklasse aus $H^p(X - A, \mathfrak{S})$, die sich in die Umgebung irgendeines Punktes von A fortsetzen läßt, kann dann nach X fortgesetzt werden. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn $\mathfrak{S}_{x_0} = 0$ in einem Punkte $x_0 \in A$ oder wenn* $\operatorname{codh}_x \mathfrak{S}$ *nicht auf A konstant ist.*

Literatur

[1] AUSLANDER, M., and D. A. BUCHSBAUM: Homological dimension in local rings. Trans. Am. Math. Soc. **85**, 390—405 (1957).

[2] CARTAN, H.: Sur le premier problème de Cousin. C. R. Acad. Sci. (Paris) **207**, 558—560 (1938).

[3] CARTAN, H.: Variétés analytiques complexes et cohomologie. Coll. de Bruxelles, 41—55 (1953).

[4] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological Algebra. Princeton Math. Ser. **19**, (1956).

[5] GODEMENT, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Paris: Hermann 1958.

[6] GRAUERT, H.: Une notion de dimension cohomologique dans la théorie des espaces complexes. Bull. soc. math. France **87**, 341—350 (1959).

[7] GRAUERT, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Moduläume komplexer Strukturen. Inst. des Hautes Etudes Scientifiques, Publications Mathématique, N° 5. Paris (1960).

[8] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245—318 (1958).

[9] REMMERT, R., u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953).

[10] ROTHSTEIN, W.: Die Fortsetzung vier- und höherdimensionaler analytischer Flächen des R_{2n} ($n \geqq 3$). (Cousinsche Verteilungen 2. Art.) Math. Ann. **121**, 340—355 (1950).

[11] SCHEJA, G.: Prolongement de Riemann concernant les classes de cohomologie. C. R. Acad. Sci. (Paris) **251**, 2863—2864 (1960).

[12] SERRE, J. P.: Faisceaux algébriques cohérents. Ann. Math. **61**, 197—278 (1955).

[13] SERRE, J. P.: Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens. Proc. Int. Symp. on Algebraic Number Theory, Tokyo. 175—189 (1955).

(Eingegangen am 24. April 1961)

HUBER, P. J.
Math. Annalen 144, 361—385 (1961)

Homotopy Theory in General Categories

By
PETER J. HUBER *) in Zürich and Geneva

Introduction

The homotopy groups of topological spaces have been generalized by ECKMANN-HILTON to two-space homotopy groups $\Pi_n(X, Y)$ that contain homotopy groups and cohomology groups (both with arbitrary coefficients) as well as their exact sequences, as special cases; the classical homotopy and cohomology are dual to each other in the sense of a simple (heuristic) duality that consists in interchanging X and Y. Furthermore, there is, in the category of modules over a ring — or more generally in any abelian category with sufficiently many injectives and projectives — an analogous homotopy theory and its dual (cf. ECKMANN [1]); here, the duality is not only heuristic, as in the category of spaces, but follows automatically. By the analogy in question, the imbedding of a topological space X into the cone CX, for instance, corresponds to the imbedding of a module X into an injective module $\overline{X}$; the topological suspension $\Sigma X = CX/X$ corresponds to the algebraic suspension $\Sigma X = \overline{X}/X$; and, in both categories, the homotopy groups may be defined with the aid of iterated suspensions.

These two heuristic principles
(a) the duality in the category of spaces,
(b) the analogy between spaces and modules,
have much stimulated the development of the Eckmann-Hilton homotopy theory. It will be shown in the present paper that these principles can be given a theoretical foundation.

For this purpose, we shall develop a semisimplicial homotopy theory in the framework of general categories, such that the homotopy theory of spaces and the one of modules are included as special cases, as well as the homotopy theory of maps of spaces, etc. Moreover, in all cases where this homotopy theory can be defined, full duality is obtained automatically, from the general duality principle in categories. Thereby, not only is a precise notion of the analogy between the homotopy theories for modules and spaces achieved, but it is also possible to simplify substantially some proofs. For instance, the exactness of the homotopy sequences in the categories of modules, of spaces, of pairs of

*) This research was partly supported by the U. S. Department of Army through its European Research Office.

modules, of pairs of spaces, of pairs of pairs, etc., may be established in one and the same proof; and it is to be noted that this single proof gives, by strict duality, both sides of the picture, e.g. the homotopy as well as the cohomology sequences in the category of spaces.

Our main tool will be the semisimplicial standard construction, originally devised by R. GODEMENT [4] to generate flabby resolutions in the category of sheaves. Since also the Hochschild homology theory of associative algebras (cf. [4]) and, moreover, the whole theory of derived functors in the categories of modules may be obtained with the aid of standard constructions, these turn out to be one of the most powerful tools of homological and homotopical algebra.

The standard constructions may be considered as being a generalization of the path space and cone constructions in topology. For instance, the triple $\{E, k, p\}$, consisting of the path functor E, of the natural fibre map $k(Y): EY \to Y$ and of a hitherto scarcely noticed natural map $p(Y): EY \to EEY$, constitutes a standard construction. Dually, the cone functor C, the natural imbedding $k(X): X \to CX$, and a certain map $p(X): CCX \to CX$ constitute a dual standard construction.

Section 1 introduces the terminology to be used in this paper, section 2 contains the definition of the standard construction, and in section 3 the semi-simplicial complex associated with each standard construction is introduced, together with a preliminary discussion of its Kan homotopy groups. In section 5, the homotopy groups in the categories of modules will be treated. To simplify the pertinent proofs, large parts of them will be dealt with in the framework of general categories (parts of section 3, and section 4). Section 6 discusses the homotopy groups of topological spaces; section 7 contains, among other topics, an interesting generalization of the singular complex of a space. In section 8, the exactness of the homotopy sequence is proved for general categories. Section 9 contains a treatment of fibrations and cofibrations; it turns out that one may define the analogue, and establish the main properties, of the suspension ΣX (the cofibre of $k(X): X \to CX$) and of the loop space ΩX (the fibre of $k(Y): EY \to Y$) in the framework of general categories.

The author is greatly indebted to Professor ECKMANN for many hours of helpful and stimulating discussions.

1. Categories and Functors

A *category* $\mathfrak{K}$ consists of a non-empty class $\mathfrak{K}$ of *objects* $X, Y, \ldots$, together with sets $\mathrm{Hom}(X, Y)$ of *morphisms* $u: X \to Y$ $(X, Y \in \mathfrak{K})$, and of an associative *composition* of morphisms $\circ: \mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$, $(u, v) \to$ $\to v \circ u$, which has both-sided *identities* $1_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$.

A morphism $u: X \to Y$ is an *isomorphism* if there exists a morphism $v: Y \to X$, such that $u \circ v$ and $v \circ u$ are the respective identities. X and Y then are said to be *isomorphic*.

An object $O \in \mathfrak{K}$ is called a *zero object* if, for all $X \in \mathfrak{K}$, the sets $\mathrm{Hom}(X, O)$ and $\mathrm{Hom}(O, X)$ consist of exactly one element 0_{XO} and 0_{OX} respectively. Two

zero objects O, O' are always isomorphic, and we have $0_{OY} \circ 0_{XO} = 0_{O'Y} \circ 0_{XO'}$. If $\mathfrak{K}$ has a zero object, then in each set $\mathrm{Hom}(X, Y)$ we have a distinguished morphism $0 = 0_{XY} = 0_{OY} \circ 0_{XO}$, the *zero morphism*.

Let $\mathfrak{K}$ and $\mathfrak{L}$ be arbitrary categories. A *covariant functor* $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ assigns to each object $X \in \mathfrak{K}$ an object $F(X) \in \mathfrak{L}$, and to each morphism $u : X \to Y$ a morphism $F(u) : F(X) \to F(Y)$, such that $F(u \circ v) = F(u) \circ F(v)$, and that $F(1_X) = 1_{F(X)}$. If both categories $\mathfrak{K}$ and $\mathfrak{L}$ contain a zero object, then we shall mostly require that zero objects are preserved under F.

Let $F, G : \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ be covariant functors. A *functor morphism* (or *natural transformation*) $\vartheta : F \to G$ consists of a family of morphisms $\vartheta(X) : F(X) \to G(X)$, such that the following diagram is commutative for all objects $X, Y \in \mathfrak{K}$ and all morphisms $u : X \to Y$.

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "\vartheta(X)"'] & F(Y) \arrow[d, "\vartheta(Y)"] \\ G(X) \arrow[r, "G(u)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

The compositions $F \circ G$ of functors and $\vartheta' \circ \vartheta''$ of functor morphisms are defined in the obvious way. Mostly, we shall abbreviate $F \circ G$ to FG. Each functor morphism $\vartheta : F \to G$ induces a morphism of the compositions of F and G with covariant functors U, V:

$$U * \vartheta * V : UFV \to UGV,$$

which is defined by $(U * \vartheta * V)(X) = U\big(\vartheta(V(X))\big)$. If U (or V) is the identity functor I, then we abbreviate $U * \vartheta * V$ to $\vartheta * V$ (or $U * \vartheta$ respectively). The *identity morphism* $\iota : I \to I$ is defined by $\iota(X) = 1_X$; obviously, we have $F * \iota = \iota * F$ for any functor F.

For any category $\mathfrak{K}$, one defines the *dual category* $\mathfrak{K}'$, which consists of the same objects as $\mathfrak{K}$; the set $\mathrm{Hom}'(X, Y)$ of morphisms $X \to Y$ in $\mathfrak{K}'$ is identical with the set $\mathrm{Hom}(Y, X)$ of morphisms $Y \to X$ in $\mathfrak{K}$, and the composition of two morphisms u, v in $\mathfrak{K}'$ is defined as being the composition of v and u in $\mathfrak{K} : u \circ' v = v \circ u$. Evidently, $\mathfrak{K}'$ is a category, and we have $(\mathfrak{K}')' = \mathfrak{K}$.

Thus, one may say that $\mathfrak{K}$ and $\mathfrak{K}'$ are the same things, being described in two different languages; each statement S about the category $\mathfrak{K}$ may be translated into a statement about $\mathfrak{K}'$, and vice versa. This seems quite trivial. Now we consider a statement S about $\mathfrak{K}$, which belongs to the theory of categories (that means that S is composed only from logical terms and terms such as "object", "morphism", etc., and thus makes sense in arbitrary categories); then the same statement S makes sense in $\mathfrak{K}'$, since $\mathfrak{K}'$ is a category. Hence, S in $\mathfrak{K}'$ may be translated into a statement S' about $\mathfrak{K}$; S' again belongs to the theory of categories. These two statements S and S', both making sense in arbitrary categories, are called *dual* to each other. It follows that, if S can be proved from some axioms $A_1, A_2, \ldots$, these axioms as well as the proof belonging to the theory of categories, then the dual statement S' can be proved from the

dual axioms $A_1', A_2', \ldots$. This *duality principle* will be used extensively in the sequel; mostly, however, it will be left to the reader to formulate the dual definitions and theorems.

Sometimes, the explicit introduction of the dual category has not only conceptual, but also technical advantages. For instance, a *contravariant functor* $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ is the same as a covariant functor $F : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{L}$ or $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}'$, so that it suffices, at least in principle, to consider covariant functors only. This works for $\mathfrak{K} = \mathfrak{L}$, too; but if one tries to handle contravariant functors with the aid of the duality principle, without introducing explicitly the dual category, the case $\mathfrak{K} = \mathfrak{L}$ needs a rather awkward special treatment.

The following five formulas are valid for any covariant functors and any functor morphisms, as soon as they make sense (cf. GODEMENT [4], Appendice).

(I) $(U \circ V) * \vartheta = U * (V * \vartheta)$

(II) $\vartheta * (U \circ V) = (\vartheta * U) * V$

(III) $(U * \vartheta) * V = U * \vartheta * V = U * (\vartheta * V)$

(IV) $U * (\vartheta' \circ \vartheta'') * V = (U * \vartheta' * V) \circ (U * \vartheta'' * V)$

(V) $(\psi * G) \circ (U * \varphi) = (V * \varphi) \circ (\psi * F)$

for any two functor morphisms $\varphi : F \to G$, $\psi : U \to V$.

Rule (V) may be remembered with the aid of the commutative diagram:

$$\begin{tikzcd} U \circ F \arrow[r, "U * \varphi"] \arrow[d, "\psi * F"'] & U \circ G \arrow[d, "\psi * G"] \\ V \circ F \arrow[r, "V * \varphi"] & V \circ G \end{tikzcd}$$

2. Definition of the Standard Construction

Let $\mathfrak{K}$ be an arbitrary category. A *standard construction* in $\mathfrak{K}$ is a triple $\{C, k, p\}$, consisting of a covariant functor $C : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$, and of two functor morphisms $k : C \to I$, $p : C \to CC$, such that the following two axioms (GODEMENT [4], Appendice) are satisfied:

(SC 1) $$(k * C) \circ p = (C * k) \circ p = \iota * C$$

(SC 2) $$(p * C) \circ p = (C * p) \circ p$$

Example. In any category, there exists the trivial standard construction $\{I, \iota, \iota\}$, consisting of the identity functor and of the identity morphisms.

Each standard construction $\{C, k, p\}$ generates a semisimplicial functor

$$F_* = (F_n, d_n^i, s_n^i)_{n \geq -1},$$

that is, a sequence of functors $F_n : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$, together with face and degeneracy morphisms

$$d_n^i : F_n \to F_{n-1},$$
$$s_n^i : F_n \to F_{n+1} \qquad (0 \leq i \leq n).$$

F_* is defined as follows. Let $C^0 = I$ and $C^{n+1} = C \circ C^n$. Then

$$F_n = C^{n+1}$$
$$d_n^i = C^i * k * C^{n-i}$$
$$s_n^i = C^i * p * C^{n-i}.$$

Usually, we shall omit the lower indices of d_n^i and of s_n^i.

Sometimes it is convenient to treat $F_{-1} = I$ separately, and to consider F_* as a semisimplicial functor $F_*^+ = (F_n, d^i, s^i)_{n \geq 0}$ with *augmentation* $d_0^0 = k : F_0 \to I$.

The face and degeneracy morphisms satisfy the usual semisimplicial commutation rules:

(a) $d^i d^j = d^{j-1} d^i \quad (i < j)$

(b) $s^i s^j = s^{j+1} s^i \quad (i \leq j)$

(c) $d^i s^j = s^{j-1} d^i \quad (i < j)$

(d) $d^i s^i = d^{i+1} s^i = \text{identity}$

(e) $d^i s^j = s^j d^{i-1} \quad (i > j + 1)$.

This follows from (SC 1) and (SC 2) with the aid of the five rules at the end of the previous section; in fact, (b) is equivalent to axiom (SC 2), and (d) is equivalent to axiom (SC 1), whereas (a), (c) and (e) are valid in any case.

A *dual standard construction* is a triple $\{C, k, p\}$ consisting of a covariant (!) functor $C : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$, and of functor morphisms $k : I \to C$, $p : CC \to C$, such that the axioms

(SC 1′) $\qquad p \circ (k * C) = p \circ (C * k) = \iota * C$

(SK 2′) $\qquad p \circ (p * C) = p \circ (C * p)$

are satisfied.

The duality principle implies that it suffices to consider only one kind of standard construction, and then to dualize the results, if necessary. For instance, it follows from duality that the functor $F^* = (F^n, d^i, s^i$, belonging to a dual standard construction has a dual semisimplicial structure, i.e. the face and degeneracy morphisms

$$d_n^i : F^{n-1} \to F^n$$
$$s_n^i : F^{n+1} \to F^n$$

go into the opposite direction and satisfy the relations dual to (a)—(e).

3. Homotopy Groups. T-trivial Constructions

If we apply the semisimplicial functor F_* to an object $Y \in \mathfrak{K}$, we obtain a semisimplicial object $F_*(Y) = (F_n(Y), d^i(Y), s^i(Y))_{n \geq -1}$. One would like to investigate the homotopy groups of $F_*(Y)$, but this is not possible in general, since the Kan homotopy groups (cf. [7]) are defined only for semisimplicial complexes, i.e. for semisimplicial objects in the category of sets. One could try

to extend the definition of homotopy groups to more general categories — similarly as homological algebra has been extended to abelian categories — but here another way seems to be more promising: namely, to go over to an ordinary semisimplicial complex with the aid of a functor $T : \mathfrak{K} \to \mathfrak{M}$ with values in the category of sets.

For instance, we may choose the functor $\mathrm{Hom}(X, \ )$ of the category $\mathfrak{K}$, with a fixed first argument X, to obtain a semisimplicial complex

$$K_*(X, Y) = \mathrm{Hom}(X, F_*(Y)) = (\mathrm{Hom}(X, F_n(Y)), d^i, s^i)_{n \geq -1} .$$

The Kan homotopy groups of $K_*(X, Y)$ will generalize the Eckmann-Hilton groups.

If the objects of the category $\mathfrak{K}$ are sets, and if the morphisms $u : X \to Y$ are mappings of the set X into the set Y, and are composed in the natural way, then we may choose, for instance, the functor T, which assigns to each object its underlying set.

If $\mathfrak{K}$ contains a zero object and C preserves zero objects, then it is convenient to choose for $\mathfrak{M}$ the category of sets with base element, and to require that T preserves zero objects. (The zero objects of $\mathfrak{M}$ are those sets which are reduced to the base element.) This assumption is verified for $T = \mathrm{Hom}(X, \ )$.

The homotopy groups of $TF_*(Y)$ now may be defined in any of the usual ways (cf. KAN [7]). First, we shall give a sufficient condition for them to be trivial.

Definition 3.1. Let $T : \mathfrak{K} \to \mathfrak{M}$ be a covariant functor with values in the category of sets. A standard construction $\{C, k, p\}$ in $\mathfrak{K}$ is called *T-trivial* if there exists a functor morphism $h : T \to TC$, such that

$$(T * k) \circ h = \iota * T .$$

Example. The trivial construction $\{I, \iota, \iota\}$ is T-trivial for all T, with $h = \iota * T$.

Theorem 3.2. *Let $\{C, k, p\}$ be a T-trivial standard construction. Then, the semisimplicial complex $TF_*^+(Y)$ has the component set*

$$\pi_0(TF_*^+(Y)) = T(Y) ,$$

and each component has the homotopy groups

$$\pi_n(TF_*^+(Y)) = 0 \qquad (n > 0) .$$

Proof. We want to show that $TF_*^+(Y)$ is homotopy equivalent with the complex L_*^+ defined by $L_n = T(Y)$, $d^i = s^i =$ identity. Obviously, L_*^+ is a Kan complex, and the assertion of the theorem follows.

We recall the definition of the semisimplicial homotopy relation. Let P_*^+, Q_*^+ be arbitrary semisimplicial complexes. Two semisimplicial maps $f, g : P_*^+ \to Q_*^+$ are homotopic (MOORE [10]) if and only if there exist functions

$$h_n^i : P_n \to Q_{n+1} \qquad (0 \leq i \leq n),$$

such that

(1) $$d^0_{n+1} h^0_n = g_n$$

(2) $$d^{n+1}_{n+1} h^n_n = f_n$$

(3) $$d^i h^j = h^{j-1} d^i \qquad (i < j)$$

(4) $$d^{j+1} h^{j+1} = d^{j+1} h^j$$

(5) $$d^i h^j = h^j d^{i-1} \qquad (i > j+1)$$

(6) $$s^i h^j = h^{j+1} s^i \qquad (i \leq j)$$

(7) $$s^i h^j = h^j s^{i-1} \qquad (i > j)\,.$$

Now, we shall define a homotopy h^i_n between the identity map $TF^{\ddagger}_{*}(Y) \to \to TF^{\ddagger}_{*}(Y)$ and a map f, which is a retraction map to a subcomplex isomorphic with $L^{\ddagger}_{*}$. To simplify the notation, we shall write d^i_n, s^i_n instead of $T(d^i_n(Y))$ and of $T(s^i_n(Y))$; the argument Y will be omitted in some other cases, too.

We define

$$h^0_n = h * C^{n+1}, \qquad (n \geqq -1)$$

$$h^i_n = (s^0)^i h^0_{n-i} (d^0)^i, \qquad (0 \leqq i \leqq n).$$

h^0_n verifies the following relations:

(A) $$d^0_{n+1} h^0_n = \text{identity} \qquad (n \geqq -1)$$

(B) $$d^{i+1}_{n+1} h^0_n = h^0_{n-1} d^i_n \qquad (n \geqq 0)$$

(C) $$s^{i+1}_{n+1} h^0_n = h^0_{n+1} s^i_n \qquad (n \geqq 0)\,.$$

Proof.

(A) $$d^0_{n+1} h^0_n = (T * k * C^{n+1}) \circ (h * C^{n+1}) = (T * k \circ h) * C^{n+1} = \text{identity}$$

(B) $$\begin{aligned} d^{i+1}_{n+1} h^0_n &= T * (C^{i+1} * k * C^{n-i}) \circ h * C^{n+1} \\ &= \big((TC * (C^i * k)) \circ (h * C^{i+1})\big) * C^{n-i} \\ &= \big((h * C^i) \circ (T * (C^i * k))\big) * C^{n-i} \\ &= h^0_{n-1} d^i_n \end{aligned}$$

(C) $$\begin{aligned} s^{i+1}_{n+1} h^0_n &= T * (C^{i+1} * p * C^{n-i}) \circ h * C^{n+1} \\ &= (TC * (C^i * p) \circ h * C^{i+1}) * C^{n-i} \\ &= \big((h * C^{i+2}) \circ (T * (C^i * p))\big) * C^{n-i} \\ &= h^0_{n+1} s^i_n\,. \end{aligned}$$

The relations (1)—(7) now follow from (A)—(C) by a straightforward calculation, which will be left to the reader. It turns out that f is the semisimplicial map defined by

$$f_n = (s^0)^n h (d^0)^{n+1},$$

and that we have

(8) $$ff = d^i s^j f = s^i d^j f = f\,.$$

In particular, we have $f_0 = hd^0$, and hence, $hd^0 f_0 = f_0$. Since $d^0 h =$ identity, it follows that d^0 induces a $1-1$ map of $f_0(TF_0(Y))$ onto $T(Y)$. It follows by induction that $f(TF_*^+(Y))$ is isomorphic with the complex L_*^+.

Furthermore, (8) implies that

$$f: TF_*^+(Y) \to L_*^+ \subset TF_*^+(Y)$$

is a retraction map. Since f is homotopic to the identity map, it follows that $TF_*^+(Y)$ and L_*^+ have the same homotopy type.

The above homotopy h_n^i need not be a deformation retraction (cf. MOORE [10]); but this is true if and only if we have

$$(T * p) \circ h = (h * C) \circ h .$$

Since we shall not need this result, the proof is omitted.

In the case of a T-trivial construction, the augmentation $d^0: TF_0(Y) \to \to T(Y)$ is epimorphic, since $d^0 h =$ identity. Since the diagram

$$\begin{array}{ccc} TF_0(Y) & \xrightarrow{d^0} & T(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id.}} \\ TF_0(Y) & \xrightarrow{d^0} & T(Y) \end{array}$$

is commutative, theorem 3.2 implies that $TF_*(Y)$ is the disjoint union of components $K_*^{(y)}$ defined by

$$K_n^{(y)} = (d^0)^{-(n+1)}(y), \qquad y \in T(Y) .$$

Usually, the homotopy sets are defined only for non-augmented semisimplicial complexes. However, sometimes it is useful to extend the definitions to the augmented case, especially if semisimplicial groups are involved. More generally, let K_* be a semisimplicial object in a category of sets with base element, satisfying the Kan condition. Then, according to KAN [7], one defines $\pi_n(K_*)$, $n \geqq 0$ as being the set of equivalence classes of

$$\Gamma_n = \{\sigma \in K_n \mid d^i\sigma = 0 \quad \text{for all} \quad i\} ,$$

modulo the homotopy relation $\sim$.

This definition carries over to the augmented case without any change; the above remarks and theorem 3.2 then imply that, in the case of a T-trivial construction, the homotopy of $TF_*(Y)$ is trivial in *all* dimensions $n \geqq 0$. We do not define (-1)-dimensional homotopy.

4. Induced Standard Constructions

Let $\mathfrak{K}$ and $\mathfrak{L}$ be arbitrary categories which are connected by a pair of covariant functors F and G:

$$F: \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}, \quad G: \mathfrak{L} \to \mathfrak{K} .$$

Then, each functor $C: \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ induces a functor $\overline{C} = FCG: \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$.

Now, we want to show that a standard construction $\{C, k, p\}$ in the category $\mathfrak{K}$ induces a standard construction $\{\overline{C}, \overline{k}, \overline{p}\}$ in $\mathfrak{L}$, if F and G are adjoint functors. First, we need a theorem on adjoint functors.

Theorem 4.1. *Let $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$, $G : \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ be covariant functors. The following two assertions are equivalent:*

(a) *There exists an isomorphism of functors*

$$\gamma : \mathrm{Hom}(F, \ ) \to \mathrm{Hom}(\ , G),$$

i.e., F and G are adjoint functors in the sense of Kan [8]. *Usually, we shall identify* $\mathrm{Hom}(FX, Y) = \mathrm{Hom}(X, GY)$ *by γ.*

(b) *There exist two functor morphisms*

$$\zeta : I \to GF$$

$$\eta : FG \to I$$

which satisfy the relations

$$(\eta * F) \circ (F * \zeta) = \iota * F : F \to FGF \to F$$

$$(G * \eta) \circ (\zeta * G) = \iota * G : G \to GFG \to G.$$

Proof. (b) $\to$ (a). We define

$$\gamma : \mathrm{Hom}(FX, Y) \to \mathrm{Hom}(X, GY)$$

$$\beta : \mathrm{Hom}(X, GY) \to \mathrm{Hom}(FX, Y)$$

by $\gamma(u) = G(u) \circ \zeta(X)$, $\beta(v) = \eta(Y) \circ F(v)$.

The diagram

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "(F*\zeta)(X)"] \arrow[dr, "(\iota*F)(X)"'] & FGFX \arrow[r, "FG(u)"] \arrow[d, "(\eta*F)(X)"] & FGY \arrow[d, "\eta(Y)"] \\ & FX \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

is commutative. Thus

$$\eta(Y) \circ FG(u) \circ (F * \zeta)(X) = \eta(Y) \circ F(G(u) \circ \zeta(X)) = u;$$

therefore, we have $\beta \circ \gamma =$ identity. In the same way, one obtains $\gamma \circ \beta$ $=$ identity. We have further to show that γ is natural with respect to X and Y, i.e. that the diagram

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(FX, Y) \arrow[r, "(v, w)_*"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathrm{Hom}(FX', Y') \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathrm{Hom}(X, GY) \arrow[r, "(v, w)_*"] & \mathrm{Hom}(X', GY') \end{tikzcd}$$

is commutative for all morphisms $v : X' \to X$, $w : Y \to Y'$, or, equivalently, that we have

$$G(w) \circ \gamma(u) \circ v = \gamma(w \circ u \circ F(v))$$

for all morphisms $u : FX \to Y$. But this follows immediately from the definition of γ.

(a) → (b). We define ζ and η by

$$\zeta(X) = \gamma(1_{FX}), \quad \eta(Y) = \gamma^{-1}(1_{GY}).$$

First, we show that ζ and η are functor morphisms, i.e. that we have

$$\zeta(X) \circ v = GF(v) \circ \zeta(X')$$

and

$$\eta(X) \circ FG(v) = v \circ \eta(X'),$$

for all morphisms $v: X' \to X$. We have

$$\zeta(X) \circ v = \gamma(1_{FX}) \circ v = \gamma(F(v)),$$

and

$$GF(v) \circ \zeta(X') = GF(v) \circ \gamma(1_{FX'}) = \gamma(F(v)),$$

which proves the first assertion; the proof for η is dual.

Furthermore, we have

$$G(\eta(Y)) \circ \zeta(G(Y)) = G(\gamma^{-1}(1_{GY})) \circ \gamma(1_{FGY}) = \gamma(\gamma^{-1}(1_{GY}) \circ 1_{FGY}) = 1_{GY}$$

and

$$\eta(F(X)) \circ F(\zeta(X)) = \gamma^{-1}(1_{GFX}) \circ F(\gamma(1_{FX})) = \gamma^{-1}\big(\gamma(\gamma^{-1}(1_{GFX})) \circ \circ \gamma(1_{FX})\big) = 1_{FX},$$

which proves (b).

Theorem 4.2. *Let $F: \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$, $G: \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ be covariant adjoint functors, such that we may identify* $\mathrm{Hom}(FX, Y) = \mathrm{Hom}(X, GY)$. *Then, each standard construction $\{C, k, p\}$ in $\mathfrak{K}$ induces a standard construction $\{\overline{C}, \overline{k}, \overline{p}\}$ in $\mathfrak{L}$, namely (using the notations of theorem 4.1):*

$$\overline{C} = FCG$$
$$\overline{k} = \eta \circ (F * k * G)$$
$$\overline{p} = F * ((C * \zeta * C) \circ p) * G.$$

Proof. We have to verify the axioms (SC 1) and (SC 2). With the aid of the rules (I)—(V) of section 1, and of the fact that (SC 1) is satisfied by the construction $\{C, k, p\}$, we obtain

$$\begin{aligned}(\overline{k} * \overline{C}) \circ \overline{p} &= (\eta \circ F * k * G) * FCG \circ F * (C * \zeta * C \circ p) * G \\ &= \eta * FCG \circ F * (k * GF \circ C * \zeta) * CG \circ F * p * G \\ &= \eta * FCG \circ F * (\zeta \circ k) * CG \circ F * p * G \\ &= \eta * FCG \circ F * (\zeta * C \circ k * C \circ p) * G \\ &= (\eta * F \circ F * \zeta) * CG\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\overline{C} * \overline{k}) \circ \overline{p} &= FCG * (\eta \circ F * k * G) \circ F * (C * \zeta * C \circ p) * G \\ &= FCG * \eta \circ FC * (GF * k \circ \zeta * C) * G \circ F * p * G \\ &= FCG * \eta \circ FC * (\zeta \circ k) * G \circ F * p * G \\ &= FC * (G * \eta \circ \zeta * G) \circ F * (C * k \circ p) * G \\ &= FC * (G * \eta \circ \zeta * G).\end{aligned}$$

If, in addition, the assumptions of theorem 4.1 (b) are satisfied, then both expressions are equal to $\iota * FCG$; hence, (SC 1) is valid. Since (SC 2) is satisfied by the construction $\{C, k, p\}$, we obtain

$$
\begin{aligned}
(\bar{p} * \bar{C}) \circ \bar{p} &= F * (C * \zeta * C \circ p) * G * FCG \circ F * (C * \zeta * C \circ p) * G \\
&= F * (C * \zeta * CGFC \circ p * GFC \circ C * \zeta * C \circ p) * G \\
&= F * (C * \zeta * CGFC \circ (p * GF \circ C * \zeta) * C \circ p) * G \\
&= F * (C * \zeta * CGFC \circ (CC * \zeta \circ p) * C \circ p) * G \\
&= F * (C * (\zeta * CGF \circ C * \zeta) * C \circ p * C \circ p) * G \\
&= FC * (GFC * \zeta \circ \zeta * C) * CG \circ F * (p * C \circ p) * G \\
(\bar{C} * \bar{p}) \circ \bar{p} &= FCG * F * (C * \zeta * C \circ p) * G \circ F * (C * \zeta * C \circ p) * G \\
&= F * (CGFC * \zeta * C \circ C * (GF * p \circ \zeta * C) \circ p) * G \\
&= F * (CGFC * \zeta * C \circ C * (\zeta * CC \circ p) \circ p) * G \\
&= F * (CGFC * \zeta * C \circ C * \zeta * CC \circ C * p \circ p) * G \\
&= FC * (GFC * \zeta \circ \zeta * C) * CG \circ F * (p * C \circ p) * G
\end{aligned}
$$

Hence, (SC 2) is satisfied by the construction $\{\bar{C}, \bar{k}, \bar{p}\}$, too.

By dualizing either in $\mathfrak{K}$ or in $\mathfrak{L}$, or in both categories, we obtain three additional types of induced constructions; an example will occur in section 5.2.

If $\{C, k, p\}$ is the trivial standard construction, then the induced construction $\{\bar{C}, \bar{k}, \bar{p}\}$ is not necessarily trivial (cf. section 5.1). T-triviality, however, is hereditary in some sense:

Theorem 4.3. *Let $\{C, k, p\}$ be a T-trivial standard construction in $\mathfrak{K}$, and let $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$, $G : \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ be adjoint functors. Then, the induced construction $\{\bar{C}, \bar{k}, \bar{p}\}$ in $\mathfrak{L}$ is T-trivial, with $\bar{T} = TG$ and $\bar{h} = (T * \zeta * CG) \circ (h * G)$.*

Proof.
$$
\begin{aligned}
(\bar{T} * \bar{k}) \circ \bar{h} &= TG * (\eta \circ F * k * G) \circ T * \zeta * CG \circ h * G \\
&= TG * \eta \circ (T * (GF * k \circ \zeta * G) \circ h) * G \\
&= TG * \eta \circ (T * (\zeta \circ k) \circ h) * G \\
&= T * (G * \eta \circ \zeta * G) = \iota * TG = \iota * \bar{T}\,.
\end{aligned}
$$

5. Examples of Induced Constructions

5.1. *The projective homotopy groups of modules.* Let $\mathfrak{M}$ be the category of sets with base element, and let $\mathfrak{L}$ be the category of unitary left Λ-modules over a ring Λ with unit element. We define two functors $F : \mathfrak{M} \to \mathfrak{L}$, $G : \mathfrak{L} \to \mathfrak{M}$ as follows. F assigns to a set X the free module over X, with the only relation: base element $= 0$; G assigns to each module its underlying set, with the zero element as base element. We have a natural identification

$$\mathrm{Hom}(FX, Y) = \mathrm{Hom}(X, GY), \ (X \in \mathfrak{M},\ Y \in \mathfrak{L});$$

hence, these two functors are adjoint. The trivial standard construction $\{I, \iota, \iota\}$ in $\mathfrak{M}$ induces a standard construction $\{C, k, p\}$ in $\mathfrak{L}$:

$$
\begin{aligned}
C &= FG \\
k &= \eta : FG \to I \\
p &= F * \zeta * G : FG \to FGFG\,.
\end{aligned}
$$

Obviously, the semisimplicial module complex $F\ddagger(Y)$ belonging to this construction consists of free modules. Theorem 4.3 implies that $\{C, k, p\}$ is G-trivial, and theorem 3.2 and the remarks at the end of section 3 imply that $GF_*(Y)$ and $F_*(Y)$ have trivial homotopy groups.

J. C. MOORE has proved that the homotopy groups of a semisimplicial abelian group complex (K_n, d^i, s^i) are canonically isomorphic with the homology groups of the chain complex $(K_n, \partial = \Sigma(-1)^i d^i)$ (MOORE [10]; obviously, the theorem remains true for augmented complexes).

Therefore, the chain complex $(F\ddagger(Y), \partial)$ is a free, a fortiori projective, resolution of Y.

Theorem 5.1. *The Kan homotopy groups of the semisimplicial abelian group complex*

$$K_*(X, Y) = \mathrm{Hom}(X, F_*(Y)), (X, Y \in \mathfrak{L})$$

are canonically isomorphic with the Eckmann-Hilton projective homotopy groups

$$\pi_n(K_*(X, Y)) = \underline{\Pi}_{n+1}(X, Y) \qquad (n \geqq 0).$$

Proof. An application of Moore's theorem yields that the homotopy groups $\pi_n(K_*(X, Y))$ are isomorphic with the homology groups of $K_*(X, Y)$, this latter being considered as a chain complex with differentiation $\partial = \Sigma\,(-1)^i d^i$. These homology groups are, by definition, the Eckmann-Hilton homotopy groups — with a trivial shift of dimensions. (Since the (-1)-dimensional Kan homotopy groups are not defined, we may obtain $\underline{\Pi}_0(X, Y)$ as (-1)-dimensional homology group of $K_*(X, Y)$, but not as homotopy group).

Of course, one may use $F_*(Y)$ to obtain a "semisimplicial" definition of the functors Ext and Tor, and of other derived functors; GODEMENT has given a similar definition of sheaf cohomology.

Now, we proceed to an explicit description of the construction $\{C, k, p\}$ and of the associated semisimplicial module complex $F_*(Y)$.

$F_{-1}(Y) = Y$ is the module to be resolved. $F_0(Y) = C(Y)$ is the free left Λ-module generated by the elements $\langle y \rangle$, $y \in Y$, with the single relation $\langle 0 \rangle = 0$. $F_1(Y) = C(C(Y))$ is therefore generated by the elements

$$\langle \lambda_1 \langle y_1 \rangle + \cdots + \lambda_m \langle y_m \rangle \rangle,\ \lambda_i \in \Lambda,\ y_i \in Y, \text{etc.}$$

It suffices to define $k(Y)$ and $p(Y)$ on the generators of $C(Y)$:

$$k(Y) : \langle y \rangle \to y$$

$$p(Y) : \langle y \rangle \to \langle\langle y \rangle\rangle .$$

Hence, $d_n^i(Y) : F_n(Y) \to F_{n-1}(Y)$ acts on the elements of $F_n(Y)$ by cancelling the bracket number $(i+1)$, $s_n^i(Y) : F_n(Y) \to F_{n+1}(Y)$ by doubling the bracket number $(i+1)$, if the numbering of the brackets starts from outside.

Remark. The above procedure may be generalized to any arbitrary Abelian category admitting a projective generator and infinite direct sums. (For the notion of generator, see [5].)

5.2. *The injective homotopy groups of modules.* Let $\mathfrak{L}$ be the category of left Λ-modules, and $\mathfrak{R}$ the category of right Λ-modules. We define two functors $U : \mathfrak{R} \to \mathfrak{L}$, $V : \mathfrak{L} \to \mathfrak{R}$ as follows.

Let Q_1 be the additive group of the rational numbers modulo the integers (or, more generally, any divisible group containing this group). For each right Λ-module X, we define the left Λ-module

$$U(X) = X' = \mathrm{Hom}_Z(X, Q_1)\,,$$

the module structure being induced by

$$(\lambda\varphi)(x) = \varphi(x\lambda)\,.$$

Similarly, we define for each left Λ-module Y a right Λ-module

$$V(Y) = Y' = \mathrm{Hom}_Z(Y, Q_1)\,.$$

Since we have a natural identification

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y') = \mathrm{Hom}\ \ (Y, X'),\quad \text{by}\quad \varphi(x)(y) = \psi(y)(x)\,,$$

these two contravariant functors U, V are adjoint.

The homomorphisms $\zeta: X \to X''$ and $\eta: Y \to Y''$ are the natural imbeddings into the "bidual" modules. The standard construction $\{C, k, p\}$ of 5.1 induces a dual standard construction $\{\overline{C}, \overline{k}, \overline{p}\}$ in $\mathfrak{R}$, which we shall investigate now. First, we need some propositions concerning the functors U and V. Since they are valid for both functors, we prefer the notation with primes: X', Y'.

Proposition 5.2. *If X is Λ-projective, the X' is Λ-injective.*

Proof. We shall treat only the case where X is a left Λ-module. We have to show that for each exact sequence of right Λ-modules

$$0 \to A \to B\,,$$

the induced sequence

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(B, X') \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, X') \to 0$$

is exact.

Since X is Λ-projective, the sequence

$$0 \to A \underset{\Lambda}{\otimes} X \to B \underset{\Lambda}{\otimes} X$$

is exact; since Q_1 is Z-injective, it follows that the sequence

$$\mathrm{Hom}_Z(B \underset{\Lambda}{\otimes} X, Q_1) \to \mathrm{Hom}_Z(A \underset{\Lambda}{\otimes} X, Q_1) \to 0$$

is exact. The assertion now follows by an application of the associativity formulas:

$$\mathrm{Hom}_Z(B \underset{\Lambda}{\otimes} X, Q_1) = \mathrm{Hom}_\Lambda(B, \mathrm{Hom}_Z(X, Q_1)),\ \text{etc.}$$

Proposition 5.3. *If one of the sequences*

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

$$C' \xrightarrow{v^*} B' \xrightarrow{u^*} A'$$

is exact, the other is exact, too.

Proof. If the first sequence is exact, then the second is exact, since $\mathrm{Hom}_Z(\ \ , Q_1)$ is an exact functor. Therefore, we assume that the first sequence

is not exact; this means either that there is an element $x \in A$, such that $vux \neq 0$, or that there is a $y \in \operatorname{Ker} v$, such that $y \notin \operatorname{Im} u$. In the first case, let G_{vux} be the cyclic subgroup of C, generated by vux (C being considered as a Z-module). Since Q_1 contains cyclic subgroups of any finite order, there exists a Z-homomorphism $\varphi' : G_{vux} \to Q_1$, which does not map vux onto zero. Since Q_1 is Z-injective, φ' may be extended to a Z-homomorphism $\varphi : C \to Q_1$. But then we have $(u^* v^* \varphi)(x) = \varphi(vux) \neq 0$; thus, $u^* v^* \varphi \neq 0$, and the second sequence is not exact. In the second case, let H_y be the cyclic subgroup of $B/(\operatorname{Im} u)$, which is generated by $y/(\operatorname{Im} u)$. Here, too, there exists a Z-homomorphism $\psi' : H_y \to Q_1$, which does not map y onto zero. ψ' may be extended to a Z-homomorphism $\psi : B \to Q_1$. ψ maps $\operatorname{Im} u$ onto 0, and is therefore in the kernel of u^*. On the other hand, $\psi(y) \neq 0$; thus, ψ is not in the image of v^*, and hence the second sequence is not exact.

Now, let $\overline{F}^*$ be the semisimplicial functor generated by $\{\overline{C}, \overline{k}, \overline{p}\}$. We shall show that the cochain complex

$$\{\overline{F}^*_\ddagger(X), \partial\} = \{\overline{F}^n(X), \partial = \Sigma\,(-1)^i d^i\}_{n \geqq 0}$$

is an injective resolution of X.

Proposition 5.2 implies that $\overline{C} = VCU$ assigns to each module X an injective module $(C(X'))'$; hence, the modules $\overline{F}^n(X)$ are injective for $n \geqq 0$. Theorem 4.3 implies that the construction $\{\overline{C}, \overline{k}, \overline{p}\}$ is GU-trivial, since $\{C, k, p\}$ is G-trivial. Therefore, the semisimplicial complexes $G\big(U(\overline{F}^*(X))\big)$ and $U(\overline{F}^*(X))$ have trivial homotopy groups, and the chain complex $\big(U(\overline{F}^*(X)), \partial\big)$ has trivial homology groups. Proposition 5.3 now implies that $(\overline{F}^*(X), \partial)$ has trivial cohomology groups (here, use is made of the fact that U is an additive functor). As in 5.1, we have

Theorem 5.4. *The Kan homotopy groups of the semisimplicial abelian group complex*

$$\overline{K}_*(X, Y) = \operatorname{Hom}(\overline{F}^*(X), Y)$$

are canonically isomorphic with the Eckmann-Hilton injective homotopy groups

$$\pi_n(\overline{K}_*(X, Y)) = \overline{\Pi}_{n+1}(X, Y) \qquad (n \geqq 0).$$

As in 5.1, $\overline{\Pi}_0(X, Y)$ may be obtained as (-1)-dimensional homology group of the chain complex, but not as Kan homotopy group.

6. The Topological Cone Construction

Let $\mathfrak{R}$ be the category of topological spaces with basepoint, $\operatorname{Hom}(X, Y)$ being the set of basepoint preserving continuous maps $X \to Y$, with the natural rule of composition. We shall define a dual standard construction $\{C, k, p\}$ in $\mathfrak{R}$.

The functor C is the cone construction:

$$CX = [0, 1] \times X / \{0\} \times X \cup [0, 1] \times \{0\},$$

$[0, 1]$ denoting the real interval $0 \leqq t \leqq 1$, with the point 0 as basepoint.

$k(X) : X \to CX$ is the natural imbedding of X into the base of the cone, defined by $k(X)(x) = (1, x)$.

$p(X): CCX \to CX$ is defined by $p(X)\,(t_0, t_1, x) = (t_0 t_1, x)$.

First, we have to verify some points:

(1) p is compatible with the identifications being made in $[0, 1] \times [0, 1] \times X$ to get the space CCX:

$$p(X)\,(0, t_1, x) = p(X)\,(t_0, 0, x) = p(X)\,(t_0, t_1, 0) = 0 .$$

(2) k and p are functor morphisms; this is obvious.

(3) Axiom (SC 1′) is valid, since

$$p(X) \circ k(CX): (t, x) \to (1, t, x) \to (t, x)$$
$$p(X) \circ C(k(X)): (t, x) \to (t, 1, x) \to (t, x) .$$

(4) Axiom (SC 2′) is valid, since

$$p(X) \circ p(CX): (t_0, t_1, t_2, x) \to (t_0 t_1, t_2, x) \to (t_0 t_1 t_2, x)$$
$$p(X) \circ C(p(X)): (t_0, t_1, t_2, x) \to (t_0, t_1 t_2, x) \to (t_0 t_1 t_2, x) .$$

Thus, the axioms (SC 1′) and (SC 2′) essentially express the fact that the real interval $[0, 1]$ is a multiplicative monoid.

The dual semisimplicial functor F^* assigns to each topological space X a sequence of topological spaces

$$F^0(X) = CX, F^1(X) = CCX, \ldots$$

together with continuous face and degeneracy operators. $K_*(X, Y) = \mathrm{Hom}(F^*(X), Y)$, then, is an ordinary semisimplicial complex.

Theorem 6.1. *The Kan homotopy groups of the semisimplicial complex $K_*(X, Y)$ are canonically isomorphic with the Eckmann-Hilton homotopy groups*

$$\pi_n(K_*(X, Y)) = \Pi_{n+1}(X, Y) \qquad (n \geq 0) .$$

(For $n = 0$, only the right hand side carries a group structure.)

Proof. (1) First, one shows that $K_*(X, Y)$ satisfies the Kan condition. This is an almost immediate consequence of the fact that the union of all faces, except one, of an n-cube is a retract of this cube.

(2) In each set $K_n(X, Y)$, the zero map $0: C^{n+1}X \to Y$ is distinguished. The sets

$$\Gamma_n = \{\sigma \in K_n \mid d^i\sigma = 0 \quad \text{for all } i\} , \qquad (n \geq 0)$$

consist of those and only those maps $\sigma: C^{n+1}X \to Y$ which may be factored through the $(n + 1)$-fold suspension $\Sigma^{n+1}X$, q being the canonical map of $C^{n+1}X$ onto $\Sigma^{n+1}X$:

$$\begin{tikzcd} C^{n+1}X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\sigma"'] & \Sigma^{n+1}X \arrow[dl] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Thus, we may identify $\Gamma_n = \mathrm{Hom}(\Sigma^{n+1}X, Y)$, $(n \geq 0)$.

If we take the non-augmented complex $K_*^+(X, Y)$, this description is valid only for $n > 0$. For $n = 0$, we have $\Gamma_0 = K_0(X, Y)$, since then in K_0 no face operator is defined.

(3) The Kan homotopy sets are defined as the sets of equivalence classes of Γ_n modulo the semisimplicial homotopy relation:

$$\pi_n(K_*(X, Y)) = \Gamma_n/\sim .$$

First, we shall investigate $\Gamma_0/\sim$ for the non-augmented case. Let σ, τ be 0-simplexes. σ and τ are semisimplicially homotopic if and only if there exists a 1-simplex ϱ, such that $d^0\varrho = \sigma$, $d^1\varrho = \tau$. Therefore, we have maps

$$\sigma, \tau : [0, 1] \times X \to Y$$
$$\varrho : [0, 1] \times [0, 1] \times X \to Y$$

satisfying

$$\sigma(0, x) = \sigma(t, 0) = \tau(0, x) = \tau(t, 0) = 0$$
$$\varrho(0, t_1, x) = \varrho(t_0, 0, x) = \varrho(t_0, t_1, 0) = 0$$
$$\varrho(1, t, x) = \sigma(t, x)$$
$$\varrho(t, 1, x) = \tau(t, x) .$$

The last two equations imply that σ and τ coincide on the base of the cone: $\sigma(1, x) = \tau(1, x)$.

ϱ determines an ordinary homotopy Φ_t of the maps σ and τ by

$$\Phi_t(s, x) = \Phi(t, s, x) = \varrho\big(s + t(1 - s), s/(s + t(1 - s)), x\big), (t, s) \neq (0, 0)$$
$$\Phi(0, 0, x) = 0 .$$

Then, we have

$$\Phi_0(s, x) = \varrho(s, 1, x) = \tau(s, x)$$
$$\Phi_1(s, x) = \varrho(1, s, x) = \sigma(s, x)$$
$$\Phi_t(0, x) = \Phi_t(s, 0) = 0$$
$$\Phi_t(1, x) = \varrho(1, 1, x) = \sigma(1, x) = \tau(1, x) .$$

We shall see presently that Φ is continuous; thus, Φ_t is a basepoint-preserving homotopy, which, in addition, leaves the base of the cone pointwise fixed. Continuity of Φ at $(0, 0, x)$ may be proved as follows. Let U be an open neighborhood of $0 \in Y$. For each $s \in [0, 1]$, we choose a cubic open neighborhood $V(s) = V_0(s) \times V_1(s) \times V_2(s)$ of the point $(0, s, x)$, such that $\varrho(V(s)) \subset U$. The sets $V_1(s)$ constitute an open cover of the compact interval $[0, 1]$; we may choose a finite subcover $V_1(s_1), \ldots, V_1(s_m)$. We put

$$V_0 = \bigcap_i V_0(s_i), \quad V_2 = \bigcap_i V_2(s_i) .$$

Then, we have $\varrho(V_0 \times [0, 1] \times V_2) \subset U$, and continuity of Φ follows.

Conversely, if Φ_t is a homotopy of two maps $\sigma, \tau : CX \to Y$ satisfying the above relations, then we may construct a semisimplicial homotopy by putting

$$\varrho(u, v, x) = \Phi(u(1 - v)/(1 - uv), uv, x), (u, v) \neq (1,1),$$
$$\varrho(1, 1, x) = \Phi(t, 1, x) = \sigma(1, x) = \tau(1, x) .$$

The 1-simplex ϱ then gives the desired homotopy. The continuity of ϱ may be shown by a proof similar to that above for the continuity of Φ.

Hence, two 0-simplexes $\sigma, \tau : CX \to Y$ are semisimplicially homotopic if and only if the corresponding maps.

(a) agree on the base of the cone, and

(b) are homotopic in the ordinary sense relative to the base of the cone.

In the case of the augmented complex, this may be simplified, since then all simplexes of Γ_0 map the base of the cone onto 0. Therefore, we have then $\pi_0(K_*(X, Y)) = \Pi(\Sigma X, Y)$.

$\Gamma_n/\sim$, $n > 0$, may be treated similarly. Two simplexes $\sigma, \tau \in \Gamma_n$ are homotopic if there is a $(n+1)$-simplex ϱ, such that $d^n \varrho = \sigma$, $d^{n+1}\varrho = \tau$, and $d^i \varrho = 0$, $i < n$.

But now the bases of the various cones will be mapped onto the basepoint of Y in any case; hence, we obtain for both the augmented and the non-augmented complex:

Two n-simplexes $\sigma, \tau \in \Gamma_n$, $n > 0$, are semisimplicially homotopic if and only if the corresponding maps

$$\sigma, \tau : \Sigma^{n+1} X \to Y$$

are homotopic in the ordinary sense. Therefore, the *sets*

$$\pi_n(K_*(X, Y)) \quad \text{and} \quad \Pi_{n+1}(X, Y), \qquad n > 0,$$

may be identified canonically.

(4) It remains to show that this canonical identification induces an isomorphism of the group structures. This may be proved easiest by using the fact that the group structure in $\pi_n(K_*(X, Y))$, $n \geqq 1$, is natural with respect to X and Y. If this group structure is carried over to $\Pi_{n+1}(X, Y)$ with the aid of the canonical identification, we obtain a natural group structure in this latter set; but, according to Hilton [6], the natural group structure of $\Pi_{n+1}(X, Y)$ is uniquely determined for $n > 0$. For $n = 0$, we have no group structure in $\pi_0(K_*(X, Y))$.

Remark. The above semisimplicial definition of homotopy groups of two spaces X, Y has a small flaw: it does not give us the set $\Pi(X, Y)$; and $\Pi_1(X, Y)$ is obtained only without its group structure. This may be remedied as follows.

We replace the dual semisimplicial object $F^*(X)$ by the subobject $\tilde{F}^*(X)$ consisting of the subspaces

$$\tilde{F}^n(X) = \left\{(t_0, \ldots, t_n, x) \in F^n(X) \mid t_0 t_1 \ldots t_n = \frac{1}{2}\right\}$$

with the induced face and degeneracy operators.

$\tilde{F}^n(X)$ may be identified with the space

$$\Delta_n \times X / \Delta_n \times \{0\},$$

where Δ_n is the Euclidean n-simplex, the face and degeneracy operators being the usual ones. By taking logarithms, $s_i = -\log(t_i)/\log(2)$, we obtain the usual parametrization of Δ_n, too: $\Sigma s_i = 1$, $s_i \geqq 0$.

We put

$$\tilde{K}_*(X, Y) = \mathrm{Hom}(\tilde{F}^*(X), Y) = \{\mathrm{Hom}(\tilde{F}^n(X), Y), d^i, s^i\}_{n \geqq 0}.$$

Theorem 6.2. *The* Kan *homotopy groups of* $\bar{K}_*(X, Y)$ *are canonically isomorphic with the Eckmann-Hilton homotopy groups:*

$$\pi_n(\bar{K}_*(X, Y)) = \Pi_n(X, Y), \qquad (n \geqq 0),$$

and, if $X = S_0$ *is the* 0-*sphere, then* $\bar{K}_*(X, Y)$ *may be identified with the singular complex of* Y.

Proof. Let $\bar{\Gamma}_n$ be the set of n-simplexes of $\bar{K}_*(X, Y)$ having faces $d^i\sigma = 0$ for all i. $\bar{\Gamma}_n$ may be identified with the set of continuous maps

$$\sigma : \Delta_n \times X \to Y$$

having the property

$$\sigma(\dot{\Delta}_n \times X \cup \Delta_n \times \{0\}) = 0.$$

Therefore, after choosing suitable homeomorphisms, we may identify Γ_n with the set of basepoint-preserving maps

$$\Sigma^n X \to Y.$$

If two simplexes $\sigma, \tau \in \bar{\Gamma}_n$ are semisimplicially homotopic, then there exists a $(n+1)$-simplex ϱ, such that

$$d^n\varrho = \sigma,\ d^{n+1}\varrho = \tau,\ d^i\varrho = 0 \qquad (i < n).$$

As above, one defines an ordinary homotopy Φ_t between the maps σ and τ by putting

$$\Phi_t(t_0, \ldots, t_{n-1}, s, x) = \varrho\big(t_0, \ldots, t_{n-1}, s + t(1-s), s/(s + t(1-s)), x\big).$$

$\left(\text{Of course, } \Phi_t \text{ is defined only on the surface } t_0 t_1 \ldots t_{n-1}\ s = \frac{1}{2}\right)$.
Conversely, each ordinary homotopy Φ_t defines a semisimplicial homotopy, as above.

The last part of the theorem is obvious.

7. Adjoint Constructions

Let us assume that the functor C in a dual standard construction $\{C, k, p\}$ admits a right adjoint E. In other words, we have a natural equivalence

$$\gamma : \mathrm{Hom}(CX, Y) \to \mathrm{Hom}(X, EY).$$

Then, the functor morphisms k and p admit adjoint morphisms k' and p' respectively, satisfying the axioms (SC 1) and (SC 2); thus, $\{E, k', p'\}$ is a standard construction. k' and p' are defined by

$$k'(X) = \gamma^{-1}(1_{EX}) \circ k(EX)$$
$$p'(X) = \gamma\big(\gamma(\gamma^{-1}(1_{EX}) \circ p(EX))\big).$$

The somewhat lengthy verification of the axioms will be omitted. It follows that E generates a semisimplicial functor F_*, which is adjoint to the functor F^* belonging to C; in fact, γ induces an isomorphism of the semisimplicial complexes

$$\mathrm{Hom}(F^*(X), Y) \to \mathrm{Hom}(X, F_*(Y)).$$

For instance, the topological cone construction C admits a right adjoint E: the path functor (EY is the space of paths beginning in the basepoint of Y,

topologized by the compact-open topology). It follows that we obtain the same homotopy groups by "resolving" either X by cone constructions, or Y by path space constructions.

By the way, the above use of the word "resolve" is not quite correct and should better be avoided. If, for instance, the space Y is a topological abelian group, then the complex F_*^+, generated by path space constructions, is a semisimplicial topological abelian group complex. The associated chain complex (obtained by putting $\partial = \Sigma(-1)^i d^i$), however, is by no means a resolution of the group Y; its homology groups are, essentially, the homotopy groups of the space Y.

The modified semisimplicial complex $\tilde{K}_*(X, Y)$ admits a very interesting interpretation using adjointness. The right adjoint functor $\tilde{F}_*$ of $\tilde{F}^*$ assigns to each space its singular complex, topologized by the compact-open topology. More precisely, $\tilde{F}_*(Y)$ consists of the spaces

$$\tilde{F}_n(Y) = \mathrm{Map}(\Delta_n, Y),$$

where $\mathrm{Map}(\Delta_n, Y)$ denotes the set of (not necessarily basepoint-preserving) continuous maps $\Delta_n \to Y$, topologized by the compact-open topology, and having the constant map $\Delta_n \to 0$ as basepoint.

Then, the natural identification

$$\gamma : \mathrm{Hom}(\Delta_n \times X/\Delta_n \times \{0\}, Y) = \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Map}(\Delta_n, Y))$$

induces an isomorphism of the semisimplicial complexes $\mathrm{Hom}(\tilde{F}^*(X), Y)$ and $\mathrm{Hom}(X, \tilde{F}_*(Y))$, which proves the adjointness of $\tilde{F}^*$ and $\tilde{F}_*$.

Thus, $\tilde{K}_*(X, Y)$ may be interpreted as being the set of basepoint-preserving continuous maps of X into the topologized singular complex of Y.

If X is a Hausdorff k-space (KELLEY [9], p. 230), then we may still go further. Let $\mathrm{Map}'(X, Y)$ be the subset of $\mathrm{Map}(X, Y)$, consisting of the basepoint-preserving maps. Then, the identification

$$\mathrm{Map}'(X, \mathrm{Map}(\Delta_n, Y)) = \mathrm{Map}(\Delta_n, \mathrm{Map}'(X, Y))$$

(ECKMANN and HUBER [3]) implies that $\tilde{K}_*(X, Y)$ may be identified with the singular complex of $\mathrm{Map}'(X, Y)$. This applies to a rather large class of spaces, since all Hausdorff spaces, which are either CW-complexes or locally compact, or satisfy the first axiom of countability, are k-spaces.

8. The Category of Pairs. Exact Sequences

Let $\mathfrak{K}$ be any category. Then, the *category of pairs (or category of morphisms)* $\mathfrak{P}(\mathfrak{K})$, or simply $\mathfrak{P}$, is defined as follows. The objects u, v of $\mathfrak{P}$ are the morphisms of $\mathfrak{K}$; the morphisms $\Phi : u \to v$ of $\mathfrak{P}$ are those pairs (φ_1, φ_2) of morphisms of $\mathfrak{K}$ which make the diagram

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "u"'] & Y_2 \arrow[d, "v"] \\ X_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & Y_1 \end{tikzcd}$$

commutative. The composition of morphisms in $\mathfrak{P}$ is defined in the obvious way.

Each standard construction $\{C, k, p\}$ in $\mathfrak{K}$ defines a standard construction $\{C', k', p'\}$ in $\mathfrak{P}$, by

$$\begin{aligned} C'(u) &= C(u) \\ C'(\varphi_1, \varphi_2) &= (C(\varphi_1), C(\varphi_2)) \\ k'(u) &= (k(X_1), k(X_2)) \\ p'(u) &= (p(X_1), p(X_2)) \,. \end{aligned}$$

It is easy to verify the axioms (SC 1) and (SC 2); since no confusion is possible, we shall omit the strokes at C', k' and p' from now on.

These constructions allow the introduction of the semisimplicial complexes $K_*(X, Y)$ and $K_*(u, v)$ in $\mathfrak{K}$ and $\mathfrak{P}$ respectively, and the definition of homotopy groups

$$\pi_n(X, Y) = \pi_n(K_*(X, Y)), \text{ and } \pi_n(u, v) = \pi_n(K_*(u, v)) \,.$$

It should be noted that the dimensional notation is practically forced on us by the semisimplicial structure and does not quite agree with that introduced by Eckmann and Hilton.

From now on, we shall suppose that the following two conditions are satisfied:

(A) The category $\mathfrak{K}$ contains a zero object O, and C preserves zero objects. Obviously, $\mathfrak{P}$ then contains a zero object, too.

(B) The complexes $K_*(X, Y)$ and $K_*(u, v)$ satisfy the Kan condition for all X, Y, u, v.

It is not known to the author whether (B) is really necessary; perhaps one might avoid it by using Kan's functor Ex^∞.

Now, we want to relate pair homotopy groups $\pi_n(u, v)$ with absolute groups $\pi_n(X, Y)$. Obviously, we have for any $v: Y_1 \to Y_2$

$$\begin{aligned} K_*(0_{OX}, v) &= K_*(X, Y_2) \\ K_*(0_{XO}, v) &= K_*(X, Y_1) \,. \end{aligned}$$

Therefore, we may identify the corresponding homotopy groups.

Let $u: X_1 \to X_2$ be an object of $\mathfrak{P}$. The morphisms $\alpha = (0_{OX_1}, 1_{X_2})$ and $\beta = (0_{OO}, u)$ induce semisimplicial maps

$$K_*(u, v) \xrightarrow{\alpha^*} K_*(0_{OX_2}, v) \xrightarrow{\beta^*} K_*(0_{OX_1}, v) \,.$$

By using the above identifications and choosing $v = k(Y)$, we obtain the following sequence of homotopy groups and natural group homomorphisms

$$\pi_n(u, k(Y)) \xrightarrow{\alpha^*} \pi_n(X_2, Y) \xrightarrow{\beta^*} \pi_n(X_1, Y) \,.$$

Theorem 8.1. *There exists a natural boundary homomorphism ∂, which turns this sequence into an exact sequence*

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(u, k(Y)) \xrightarrow{\alpha^*} \pi_n(X_2, Y) \xrightarrow{\beta^*} \pi_n(X_1, Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(u, k(Y)) \xrightarrow{\alpha^*} \cdots$$

Proof. ∂ may be defined as follows. Let the morphism

$$\varphi : X_1 \to C^{n+1} Y$$

be a representative of the class $[\varphi] \in \pi_n(X_1, Y)$; then, $d^i \varphi = 0$ for all i. $\partial[\varphi]$ now is defined as being the class of $(\varphi, 0)$:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "u"'] & C^n(CY) \arrow[d, "C^n(k(Y)) = d^n"] \\ X_2 \arrow[r, "0"] & C^n Y \end{tikzcd}$$

We have to show

(1) ∂ depends only on the class $[\varphi]$.

Let $\varphi \sim \varphi'$, then there exists a $(n+1)$-simplex η, such that $d^0\eta = \varphi$, $d^1\eta = \varphi'$, $d^i\eta = 0$ $(i > 1)$; $(\eta, 0)$ then defines a homotopy between $(\varphi, 0)$ and $(\varphi', 0)$. (Here we use the fact that we obtain the same homotopy relation by taking the first or the last face operators.)

(2) ∂ is natural; this is obvious.

(3) ∂ is a group homomorphism. Let $n \geqq 2$, and let $[\chi] = [\varphi] + [\psi]$, the sum being defined by a $(n+1)$-simplex η; $d^0\eta = \psi$, $d^1\eta = \chi$, $d^2\eta = \varphi$, $d^i\eta = 0$ $(i > 2)$. The simplex $(\eta, 0)$ then yields $[\chi, 0] = [\varphi, 0] + [\psi, 0]$.

(4) $\beta^* \alpha^* = 0$.

The semisimplicial map $\beta^* \alpha^* : K_*(u, k(Y)) \to K_*(X_1, Y)$ may be factored through $K_*(1_{X_1}, k(Y))$. This complex has trivial homotopy: let $(\varphi, \psi) \in K_n(1_{X_1}, k(Y))$ be a representative of some homotopy class. Then, the $(n+1)$-simplex $(s^{n+1}\varphi, \varphi)$ defines a homotopy $(\varphi, \psi) \sim (0, 0)$.

(5) $\partial \beta^* = 0$.

Let φ be a representative of a homotopy class of $\pi_n(X_2, Y)$. Then, $\partial \beta^* [\varphi] = [\varphi u, 0]$, and the desired homotopy $(\varphi u, 0) = (0, 0)$ is furnished by $(s^n \varphi u, \varphi)$.

(6) $\alpha^* \partial = 0$; this is obvious.

(7) Let $\beta^*[\varphi] = 0$. Since $\beta^*[\varphi] = [\varphi u]$, there exists a η, with $d^{n+1}\eta = \varphi u$, $d^i\eta = 0$ $(i < n+1)$. Then, $\alpha^*[\eta, \varphi] = [\varphi]$.

(8) Let $\partial[\varphi] = 0$. Then we have a n-simplex (η, ϑ), such that $d^{n+1}\eta = \vartheta u$, $d^n(\eta, \vartheta) = (\varphi, 0)$, $d^i(\eta, \vartheta) = (0, 0)$ for $i < n$. It follows that $\vartheta u \sim \varphi$; hence, $\beta[\vartheta] = [\varphi]$.

(9) Let $\alpha^*[\varphi, \psi] = 0$. Then we have a η, such that $d^{n+1}\eta = \psi$, $d^i\eta = 0$ $(i < n+1)$. Now, consider the $n+2$ $(n+1)$-simplexes $\sigma_i = 0$ $(0 \leqq i < n)$, $\sigma_{n+1} = \varphi$, $\sigma_{n+2} = \eta u$. By the Kan condition, we may find a $(n+2)$-simplex σ, such that $d^i\sigma = \sigma_i$ $(i \neq n)$. Then, the simplex (σ, η) defines a homotopy $(\varphi, \psi) \sim (d^n\sigma, 0)$; thus, $\partial[d^n\sigma] = [\varphi, \psi]$.

This rather simple proof of the exactness of the homotopy sequence has several great advantages, as compared with the proofs given previously by Eckmann and Hilton:

(1) It is dualizable.

(2) It is valid in the category of modules as well as in the category of topological spaces.

(3) It is valid in the categories of pairs, of pairs of pairs, etc., of modules and spaces respectively, since it is easy to verify that the respective semisimplicial complexes satisfy the Kan condition.

9. Fibrations and Cofibrations in General Categories

It is even possible to introduce the notion of fibration and cofibration in general categories with the aid of a standard construction.

First, we define the *kernel* and the *cokernel* of a morphism. Let $\mathfrak{K}$ be a category containing a zero object, and let $u: X \to Y$ be a morphism. A pair (U, j) consisting of an object U and of a morphism $j: U \to X$ is called a *kernel of* u, if

(1) $u \circ j = 0$, and

(2) for each $Z \in \mathfrak{K}$ and each $v: Z \to X$ with $u \circ v = 0$ there exists one and only one morphism $w: Z \to U$, so that $j \circ w = v$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "j"] & X \arrow[r, "u"] & Y \\ Z \arrow[u, "w"] \arrow[ur, "v"'] & & \end{tikzcd}$$

Obviously, (U, j) is uniquely determined up to equivalence, and j is a monomorphism (i.e., $j \circ w = j \circ w'$ implies $w = w'$). By abuse of language, we shall denote the object U as kernel and omit j.

The definition of the *cokernel of* u is dual.

Let $\mathfrak{K}$ be a category containing a zero object, and let $\{C, k, p\}$ be a standard construction in $\mathfrak{K}$, generating a semisimplicial functor F_* and semisimplicial complexes $K_*(X, Y) = \mathrm{Hom}(X, F_*(Y))$. As usual, we assume that zero objects are preserved under C.

Definition 9.1. A morphism $u: X_1 \to X_2$ is called a *cofibration* if the induced semisimplicial map

$$u^*: K_*(X_2, Y) \to K_*(X_1, Y)$$

is a semisimplicial fibration for all $Y \in \mathfrak{K}$. The cokernel X_3 of u then will be called *cofibre of* u (provided that this cokernel exists).

One may show that, in the category of topological spaces, each cofibration in the ordinary sense (homotopy extension property for arbitrary range spaces) is a cofibration in the above sense. It is not known to the author whether the converse is true. A similar statement is valid for the fibrations, to be defined later on.

The semisimplicial fibre of u^* consists of the set of all morphisms $\sigma: X_2 \to C^{n+1} Y$, $(n \geqq -1)$, satisfying $\sigma \circ u = 0$. Thus, it may be identified with $K_*(X_3, Y)$.

Then, one may infer from the general theory of semisimplicial complexes that we have exact homotopy sequences

$$\cdots \to \pi_n(X_3, Y) \to \pi_n(X_2, Y) \to \pi_n(X_1, Y) \to \pi_{n-1}(X_3, Y) \to \cdots$$

This result is valid even if $K_*(X, Y)$ does not satisfy the Kan condition, but from now on we shall again consider only Kan complexes.

A comparison with theorem 8.1 suggests the following excision theorem:

Theorem 9.2. *Let $u: X_1 \to X_2$ be a cofibration with cofibre (X_3, v). Then, $(0_{X_1 O}, v)$ induces an isomorphism*

$$J: \pi_n(X_3, Y) \to \pi_n(u, k(Y)).$$

Proof. First, we show that J is epimorphic. Let (φ, ψ)

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "u"'] & C^{n+1}(CY) \arrow[d, "d^{n+1}"] \\ X_2 \arrow[r, "\psi"] & C^{n+1}Y \end{tikzcd}$$

be a representative of a homotopy class of $\pi_n(u, k(Y))$. Since u^* is a semisimplicial fibre map, we may find a $(n+1)$-simplex $\tau: X_2 \to C^{n+2} Y$, such that $\tau \circ u = \varphi$, $d^{n+1}\tau = \psi$, $d^i\tau = 0$ $(i < n)$.

Then, $(s^{n+1}\varphi, \tau)$ defines a homotopy $(\varphi, \psi) \sim (0, d^n\tau)$. We have $d^n\tau \circ u = 0$; thus, there exists a $\omega: X_3 \to C^{n+1} Y$, satisfying $d^n\tau = \omega \circ v$. Hence, $J[\omega] = [\varphi, \psi]$; thus J is epimorphic.

Now, we want to show that J is monomorphic, which is equivalent to showing that $(0, \omega v) \sim (0, \omega' v)$ implies $\omega \sim \omega'$. Let (η, ϑ) be a homotopy between $(0, \omega v)$ and $(0, \omega' v)$; i.e. $d^{n+2}\eta = \vartheta \circ u$, $d^{n+1}(\eta, \vartheta) = (0, \omega' v)$, $d^n(\eta, \vartheta) = (0, \omega v)$, $d^i(\eta, \vartheta) = (0, 0)$, $i < n$. Since u^* is a semisimplicial fibre map, there is a $\sigma: X_2 \to C^{n+3} Y$, such that $\sigma \circ u = \eta$, $d^{n+2}\sigma = \vartheta$, $d^n\sigma = s^n\omega v$, $d^i\sigma = 0$, $i < n$. We have $(d^{n+1}\sigma) \circ u = d^{n+1}\eta = 0$; thus, there exists a $\chi: X_3 \to C^{n+2} Y$, satisfying $\chi v = d^{n+1}\sigma$. Since v is an epimorphism, the relations $d^{n+1}\chi v = \omega' v$, $d^n\chi v = \omega v$, $d^i\chi v = 0$, $i < n$, imply $d^{n+1}\chi = \omega'$, $d^n\chi = \omega$, $d^i\chi = 0$, $i < n$. Hence, $\omega \sim \omega'$.

The dualizations of definition 9.1 and of theorem 9.2 show some interesting features. The ordinary dualization procedure in categories leads to

Definition 9.3. Let $\mathfrak{K}$ be a category containing a zero object, and let $K_*(X, Y)$ be the semisimplicial complex induced by a *dual* standard construction in $\mathfrak{K}$. Then, a morphism $u: Y_2 \to Y_1$ is called a *fibration* if the induced semisimplicial map

$$u^*: K_*(X, Y_2) \to K_*(X, Y_1)$$

is a semisimplicial fibration for all $X \in \mathfrak{K}$. The kernel Y_3 of u then will be called *fibre* of u (provided that this kernel exists).

It follows, as above, that the semisimplicial fibre of u^* may be identified with $K_*(X, Y_3)$, and that we have an exact sequence

$$\cdots \to \pi_n(X, Y_3) \to \pi_n(X, Y_2) \to \pi_n(X, Y_1) \to \pi_{n-1}(X, Y_3) \to \cdots.$$

Theorem 9.4. *Let $u: Y_2 \to Y_1$ be a fibration with fibre (Y_3, v). Then, $(v, 0_{OY_1})$ induces an isomorphism*

$$J: \pi_n(X, Y_3) \to \pi_n(k(X), u).$$

However, it is possible to introduce fibrations without dualizing completely, that is, without replacing the standard construction by a dual one:

Definition 9.5. Let $\mathfrak{K}$ be a category containing a zero object, and let $K_*(X, Y)$ be the semisimplicial complex induced by an (ordinary) standard construction in $\mathfrak{K}$. Then, a morphism $u: Y_2 \to Y_1$ is called a *fibration* if the induced semisimplicial map

$$u_*: K_*(X, Y_2) \to K_*(X, Y_1)$$

is a semisimplicial fibration for all $X \in \mathfrak{K}$. *If C commutes with kernels* (i.e., if $C(\operatorname{Ker} u) = \operatorname{Ker} C(u)$), then the kernel Y_3 of u will be called *fibre* of u (provided that this kernel exists).

The assumption that C commutes with kernels is needed to prove that the semisimplicial fibre of u_* may be identified with $K_*(X, Y_3)$. The exact fibre sequence then follows as above. Since the concept of fibration is defined only relative to a specific standard construction, the definitions 9.3 and 9.5 cannot conflict; moreover, if a pair of adjoint constructions is used, then the two definitions are equivalent. Of course, definition 9.5 may be dualized too ...

Theorem 9.6. *Let $\mathfrak{K}$ be a category containing a zero object, and let $\{C, k, p\}$ be a standard construction in $\mathfrak{K}$, such that the complexes $K_*(X, Y)$ are Kan complexes. Then, the morphism $k(Y): CY \to Y$ is a fibration.*

Proof. Let $f: K_*(X, CY) \to K_*(X, Y)$ be the semisimplicial map induced by $k(Y)$. We have to show that for every n $(n-1)$-simplexes $\sigma_0, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n \in K_*(X, CY)$ satisfying $d^i\sigma_j = d^{j-1}\sigma_i$ for $i < j$, and $i, j \neq k$, and every n-simplex $\tau \in K_*(X, Y)$ satisfying $d^i\tau = f\sigma_i$, $i \neq k$, there exists a n-simplex $\sigma \in K_*(X, CY)$, such that $d^i\sigma = \sigma_i$ for $i \neq k$, and $f\sigma = \tau$. If we consider the σ_i as n-simplexes of $K_*(X, Y)$, then, by the Kan condition, we may find a $(n+1)$-simplex $\sigma \in K_*(X, Y)$, such that $d^i\sigma = \sigma_i$ for $i \neq k$, $i \leq n$ and $d^{n+1}\sigma = \tau$. This σ, interpreted as n-simplex of $K_*(X, CY)$, has the desired properties.

Theorem 9.7. *Under the assumptions of theorem 9.6, the object CY has trivial homotopy:*

$$\pi_n(X, CY) = 0\,, \qquad n \geq 0\,.$$

Proof. Let σ be a n-simplex of $K_*(X, CY)$, such that $d^i\sigma = 0$, $(0 \leq i \leq n)$. We interpret σ as $(n+1)$-simplex of $K_*(X, Y)$, form $\varrho = s^{n+1}\sigma$, and reinterpret ϱ as $(n+1)$-simplex of $K_*(X, CY)$. We have $d^{n+1}\varrho = \sigma$, $d^i\varrho = 0$ $(i \leq n)$, and therefore $\sigma \sim 0$. (Here we consider, as usual, the augmented complex; for the non-augmented one, the argument would have failed in dimension 0, since there no face operator is defined.)

Theorem 9.8. *Under the assumptions of theorem 9.6, together with the additional assumptions that $k(Y)$ has a kernel ΩY and that C commutes with kernels, we have*

$$\pi_n(X, \Omega Y) = \pi_{n+1}(X, Y)\,, \qquad (n > 0)\,.$$

Proof. This follows immediately from the exact fibre sequence, and from theorems 9.6 and 9.7.

Thus, the fibre ΩY of $k(Y): CY \to Y$ has properties approximately corresponding to those of a loop space. It will be left to the reader to dualize theorems 9.6, 9.7 and 9.8; the theorem dual to 9.8 states that the cofibre ΣX of the morphism $k(X): X \to CX$ of a dual standard construction has the formal properties of a suspension.

References

[1] Eckmann, B.: Homotopie et dualité, Colloque de Topologie Algébrique, p. 41. Louvain 1956.

[2] Eckmann, B., et P. J. Hilton: Groupes d'homotopie et dualité, Compt. rend. 246, 2444, 2555, 2991 (1958); 247, 620 (1958); 248, 2054 (1959).

[3] Eckmann, B., and P. J. Huber: Spectral sequences for homology and homotopy groups of maps. Mimeographed Note (Battelle Memorial Institute, Geneva 1960).

[4] Godement, R.: Théorie des faisceaux. Paris: Hermann 1958.

[5] Grothendieck, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Math. J. 9, 119 (1957).

[6] Hilton, P. J.: Homotopy theory and duality. Cornell University 1959 (Mimeographed lecture notes).

[7] Kan, D. M.: A combinatorial definition of homotopy groups. Ann. Math. 67, 282 (1958).

[8] Kan, D. M.: Adjoint functors. Trans. Am. Math. Soc. 87, 294 (1958).

[9] Kelley, J. L.: General Topology. New York: Van Nostrand 1955.

[10] Moore, J. C.: Seminar on Algebraic Homotopy Theory, Lecture notes. Princeton University, 1955—56.

(Received March 28, 1961)

GRIMEISEN, G.
Math. Annalen 144, 386—417 (1961)

Gefilterte Summation von Filtern und iterierte Grenzprozesse. II*

Von

GERHARD GRIMEISEN in Stuttgart

In dem vorliegenden zweiten Teil dieser Arbeit soll die Anwendung der gefilterten Summe von Filtern diskutiert werden. Im Mittelpunkt stehen dabei der in topologischen Räumen geltende *Satz vom iterierten Limes*, der ungefähr besagt, daß man iterierte Grenzübergänge stets in einfache, nicht iterierte, verwandeln kann, und seine in regulären Räumen geltende *Umkehrung*. In der Literatur gibt es unseres Wissens im wesentlichen drei Zugänge zu diesen Theoremen: erstens den Zugang von den *Moore-Smith-Folgen* her bei G. BIRKHOFF und J. L. KELLEY[1]). Die Umkehrung des Satzes vom iterierten Limes dient schon BIRKHOFF zur Kennzeichnung der regulären unter den Hausdorffschen Räumen[2]). Mehr oder weniger explizit findet man bei BIRKHOFF und KELLEY[3]) die Bemerkung, daß die einstufigen unter den mehrstufigen Räumen gerade durch die Gültigkeit des Satzes vom iterierten Limes ausgezeichnet seien.

Der Umstand, daß H. J. KOWALSKY[4]) mit Hilfe seiner Diagonallimitierungen eine solche Kennzeichnung angibt, legt (zweitens) das Vorkommen des genannten Satzes in dieser Theorie nahe: Tatsächlich liefert schon die Definition einer Diagonallimitierung — als Satz über Limitierungen umgedeutet — im wesentlichen den für das Inverse des (als Relation aufgefaßten) auf *Filter über dem Grundraum* eingeschränkten Limesoperators (vgl. § 5) ausgesprochenen Satz vom iterierten Limes.

Drittens läßt schon die von BOURBAKI und J. DIEUDONNÉ[5]) bewiesene Tatsache, daß der in regulären Räumen geltende „*Satz vom Doppellimes*" nur in regulären Räumen gilt, im Hinblick auf die Untersuchungen BIRKHOFFs vermuten, daß dieser Satz eine enge, substantielle Beziehung zur Umkehrung des Satzes vom iterierten Limes hat, ist er doch dieser Umkehrung in Hausdorffschen Räumen — auf Grund des Gesagten — äquivalent: er erweist sich als

*) Zweiter Auszug aus der Dissertation „Über die gefilterte Summe von Filtern" des Verf., Stuttgart 1958.

[1]) BIRKHOFF [2], S. 43, theorem 5; KELLEY [12], S. 279, und [13], S. 69: "Theorem on iterated limits".

[2]) BIRKHOFF [2], S. 44, theorem 7a.

[3]) BIRKHOFF [2], S. 44, Fußnote 5: "(4 δ) assumes . . . that derived sets are closed". KELLEY [13], S. 75: " . . . condition (d) is precisely what is needed".

[4]) KOWALSKY [15], S. 311—313, insbesondere Definition 8 und Satz 9.

[5]) BOURBAKI-DIEUDONNÉ [5]; siehe auch BOURBAKI [3], S. 69, proposition 8.

unmittelbares Korollar (Korollar 6 zu Satz 23) der filtertheoretischen Fassung dieser Umkehrung.

Eine Vereinigung dieser drei Konzeptionen gelingt mit Hilfe der gefilterten Summe von Filtern (§ 4, I[6])); als „Approximatoren" werden dabei nicht — wie bei KOWALSKY — die Filter über dem Grundraum, sondern allgemeiner — Moore-Smith-Folgen[7]) und Filter über dem Grundraum umfassend — gefilterte Punktfamilien nach G. NÖBELING[8]) verwendet. Der Zusammenhang jeder der drei Konzeptionen mit unserer läßt sich auf den des jeweils benutzten technischen Hilfsmittels („iteriertes" kardinales Produkt gerichteter Mengen (§ 6, I), „Diagonalfilter" (§ 5), kardinales Produkt von Filtern (§ 5, I)) mit unserem, der gefilterten Summe, zurückführen und damit explizit angeben (vgl. Satz 26, I, Korollar 1 zu Satz 24, Satz 25, I).

Der Einfachheit halber haben wir uns hier die Beschränkung auferlegt, Limes- und Adhärenzoperator auf eine vorgegebene (mehrstufige) Prätopologie zu beziehen, nicht auch als Grundbegriffe einzuführen. Hingegen hielten wir die Diskussion wenigstens eines Teiles der Übergänge zwischen den in der Topologie üblichen Grundoperatoren, die ein unveröffentlichtes Manuskript von J. SCHMIDT[9]) wesentlich benutzt, im Interesse einer abgerundeten Darstellung für unentbehrlich. Nach Zusammenstellung dieser topologischen Hilfsmittel in § 1 knüpfen wir in § 2 an den ersten Teil dieser Arbeit an, indem wir die gefilterte Summation von Filtern auf die von gefilterten Familien übertragen. Damit läßt sich dann in § 3 der Satz vom iterierten Limes, als eine Bedingung für den Limesoperator, dual dazu ein entsprechender Satz „von der iterierten Adhärenz" über den Adhärenzoperator, bequem in der Sprache der gefilterten Familien ausdrücken; jeder der Sätze dient zur Kennzeichnung der (einstufigen, idempotenten) Topologien unter den (mehrstufigen) Prätopologien (Satz 19). Die Formulierung des Satzes vom iterierten Limes für punktweise Konvergenz liefert (ohne Benutzung der Produkttopologie!) eine in gewissem Sinn konstruktive Aussage über die Approximierbarkeit der Baireschen Funktionen durch stetige, seine Umkehrung (Satz 23 (a), § 4) — wie nach BIRKHOFF zu erwarten war — eine Kennzeichnung der regulären Räume unter den Hausdorffschen. Durch eine Spezialisierung der Umkehrung, die genau dem Übergang von der gefilterten Summe zum ordinalen Produkt von Filtern entspricht, kommt man, nach Ersetzung des auftretenden ordinalen durch das kardinale Produkt von Filtern, gerade zum Satz vom Doppellimes BOURBAKIs. Die beiden anderen hier gewählten Ausgangspunkte unserer Konzeption, die Konzeptionen von KOWALSKY und BIRKHOFF-KELLEY, untersuchen wir in den Paragraphen 5

[6]) Teil I dieser Arbeit, d. h. [9], wird durch „I" zitiert.

[7]) Unbeschadet der Äquivalenz von Moore-Smith-Folge und Filter (BRUNS-SCHMIDT [6]). Eine genaue Diskussion der Beziehung der Moore-Smith-Folge zur gefilterten Familie findet der Leser bei J. SCHMIDT [26], S. 29f.

[8]) NÖBELING [21], S. 54.

[9]) Ein Ausschnitt dieses Manuskriptes, das, allgemeiner als hier dargestellt, die zwischen den in der Topologie üblichen Grundoperatoren bestehenden Galoiskorrespondenzen behandelt, ist in der kürzlich veröffentlichten Arbeit von J. SCHMIDT [26] enthalten.

und 6. Zusammenfassend werden in § 7 die Hauptsätze dieser Arbeit (Satz 19 und Satz 23) — allgemeiner, als J. SCHMIDT[10]) transfinite Operationen der Ordnungstheorie behandelt — als die beiden Hälften eines und desselben Assoziativgesetzes gedeutet.

Über das in der Einleitung zu Teil I Gesagte hinaus, ist Verf. Herrn Dr. J. SCHMIDT für die gewährte Einsicht in das erwähnte Manuskript zu Dank verpflichtet.

§ 1. Prätopologischer Raum

Einleitend sei folgendes bemerkt: Sind A und B beliebige Mengen, so ist für irgendeine Relation R zwischen A und B, d. h. eine Menge $R \subseteq A \times B$, die a-te Komponente $q_a R$ von R zu jedem $a \in A$ eine Teilmenge von B, die man meist mit Ra bezeichnet (vgl. § 2, I). $a \to Ra$ ist eine Abbildung φ_R von A in die Potenzmenge $\mathfrak{P}B$ von B[11]). Ist umgekehrt φ irgendeine (eindeutige) Abbildung von A in $\mathfrak{P}B$, so kann man mittels φ eine Relation R_φ zwischen A und B definieren: ist $(a, b) \in A \times B$, so bedeute $(a, b) \in R_\varphi$ dasselbe wie $b \in \varphi a$; es ist dann $R_\varphi a = \varphi a$. Im Falle $A \neq O$ hat man also $R_\varphi = \underset{a \in A}{\mathsf{S}} \varphi a$ (vgl. § 2, I[12])). Es gilt somit der einfache, bekannte[13]), im nichttrivialen Fall $A \neq O$ in dem Isomorphiesatz 8, I enthaltene

Satz 1. *Die Zuordnung $R \to \varphi_R$, mit der Umkehrung $\varphi \to R_\varphi$, bildet die Menge $\mathfrak{P}(A \times B)$ aller Relationen zwischen A und B eineindeutig auf die Menge $(\mathfrak{P}B)^A$ aller (eindeutigen) Abbildungen von A in $\mathfrak{P}B$ ab.*

Hiernach kann man auch von der „als Relation aufgefaßten" Abbildung φ, umgekehrt von der „als Abbildung aufgefaßten" Relation R sprechen. Wird φ als Relation aufgefaßt, so wollen wir unter φ^{-1} die zu φ inverse Relation verstehen, die dann ihrerseits als Abbildung von B in $\mathfrak{P}A$ aufgefaßt werden kann. Eine Verwechslung von φ^{-1} mit der Umkehrung der Abbildung φ ist innerhalb dieser Arbeit nicht zu befürchten.

Gegeben sei eine Menge E. Eine (eindeutige) Abbildung τ der Potenzmenge $\mathfrak{P}E$ von E in sich, die den Bedingungen

(τ0) $\qquad \tau^{-1}x$ ist ein Raster ,

(τ1) $\qquad M \subseteq \tau M$ (Extensionalität)

---

[10]) J. SCHMIDT [25].

[11]) In der Terminologie von BOURBAKI [4], S. 72 (définition 2) und 73 (définition 4), wäre φ_R zu bezeichnen als die durch die Relation (»graphe«) $R' = \{(a, Ra) \mid a \in A\}$ zwischen A und $\mathfrak{P}B$ — definierte »correspondance« $(R', A, \mathfrak{P}B)$, Ra als »coupe de R suivant a«.

[12]) Die direkte Summe einer Mengenfamilie kann man selbstverständlich, formal unverändert, auch für die leere Mengenfamilie (in § 2, I — als Trivialfall — ausgeschlossen) erklären.

[13]) Allgemeiner bei J. SCHMIDT [24], S. 203, Satz 1, wo Abbildungen von $\mathfrak{P}A$ in $\mathfrak{P}B$, also Mengenoperatoren anstelle der hier diskutierten Punktoperatoren zu den Relationen zwischen A und B in Beziehung gesetzt werden.

zu jedem $x \in E$ und jedem $M \subseteq E$ genügt, nennen wir mit J. SCHMIDT[14]) eine *Prätopologie* von E, das geordnete Paar (E, τ) einen *prätopologischen Raum*[15]). In $(\tau 0)$ werde die Abbildung τ als Relation zwischen $\mathfrak{P}E$ und E aufgefaßt; $\tau^{-1}x$ ist also die Menge aller $M \subseteq E$ mit $x \in \tau M$.

Die Bedingung „$(\tau 0)$ für alle $x \in E$" ist mit der Konjunktion der beiden Bedingungen

$(\tau 0_1)$ $\qquad \tau(M \cup N) = \tau M \cup \tau N$ (Additivität)

(für alle $M, N \subseteq E$) und

$(\tau 0_2)$ $\qquad \tau O = O$

äquivalent. Dies ergibt sich unmittelbar aus folgenden vier Bemerkungen über eine beliebige (eindeutige) Abbildung τ von $\mathfrak{P}E$ in sich: (a) τ erfüllt genau dann die Bedingung

$$\text{wenn} \quad M \subseteq N, \quad \text{so} \quad \tau M \subseteq \tau N \quad \text{(Monotonie)}$$

(für alle $M, N \subseteq E$), wenn zu jedem $x \in E$ das Mengensystem $\tau^{-1}x$ aufsteigend ist (vgl. § 1, I). (b) τ sei monoton; dann ist τ genau dann additiv, wenn zu jedem $x \in E$ das Mengensystem $\tau^{-1}x$ die Eigenschaft (1.3), I (wichtigste unter den Rastereigenschaften) hat. (c) Ist τ additiv, so auch monoton. (d) $\tau O = O$ genau dann, wenn $O \notin \tau^{-1}x$ zu jedem $x \in E$.

Neben dem Operator τ führen wir nun nach dem Vorgang von H. J. KOWALSKY[16]) einen Operator $\mathfrak{V}$ mit dem Definitionsbereich E ein. $\mathfrak{V}$ sei eine (eindeutige) Abbildung der Menge E in die Potenzmenge $\mathfrak{P}\mathfrak{P}E$ von $\mathfrak{P}E$, die den Bedingungen

$(\mathfrak{V}0)$ $\qquad \mathfrak{V}x$ ist ein Filter,

$(\mathfrak{V}1)$ $\qquad \mathfrak{V}x \subseteq \mathscr{H}\{\{x\}\}$

($\mathscr{H}$ sei der in § 1, I eingeführte, auf E bezogene Hüllenoperator) zu jedem $x \in E$ genügt. Die Elemente von $\mathfrak{V}x$ nennt man *Umgebungen* von x, $\mathfrak{V}$ einen *Umgebungsoperator*[17]).

Zwischen den Prätopologien τ und den Umgebungsoperatoren $\mathfrak{V}$ läßt sich eine eineindeutige Beziehung herstellen, genauer: es gibt eine eineindeutige Abbildung der Menge aller τ auf die Menge aller $\mathfrak{V}$. Nach G. CHOQUET[18]) und J. SCHMIDT[19]) definieren wir bei gegebenem τ einen Operator $\mathfrak{V}_\tau$ durch

$(\text{Ü}1)$ $\qquad \mathfrak{V}_\tau x = \mathscr{G}(\tau^{-1}x)$

---

[14]) Nach einem unveröffentlichten Manuskript von J. SCHMIDT.

[15]) NÖBELING [19], S. 131, sagt „mehrstufige Topologie", auch „Topologie", und ersetzt dabei das Axiom $(\tau 0)$ durch die schwächere Forderung, daß τ monoton sei. PAUC [22] verwendet „Prätopologie" in anderer Bedeutung.

[16]) KOWALSKY [14], S. 152, Axiom (a). Terminologie nach J. SCHMIDT, loc. cit.

[17]) Der konventionelle Umgebungsbegriff entsteht aus diesem durch Spezialisierung; trotzdem wollen wir von Namensgebungen wie „Präumgebung" und „Präumgebungsoperator" der Einfachheit halber absehen.

[18]) CHOQUET [7], S. 38.

[19]) J. SCHMIDT, loc. cit.

zu jedem $x \in E$ ($\mathscr{G}$ sei der auf E bezogene Verzahnungsoperator, vgl. § 1, I[20])). Sei $x \in E$. Da $\tau^{-1}x$ ein Raster ist, ist $\mathfrak{V}_\tau x$ nach Satz 3, I ein Filter. Ist ferner $V \in \mathfrak{V}_\tau x$, so ist V nach (Ü1) mit jedem $M \subseteq E$ mit $x \in \tau M$ verzahnt, nach (τ1) also insbesondere mit der Menge $\{x\}$; $\mathfrak{V}_\tau$ ist somit ein Umgebungsoperator. — Umgekehrt definieren wir nach J. SCHMIDT[21]) bei gegebenem Umgebungsoperator $\mathfrak{V}$ einen Operator $\tau_{\mathfrak{V}}$ durch Angabe der in der Relationsauffassung zu $\tau_{\mathfrak{V}}$ inversen Relation $\tau_{\mathfrak{V}}^{-1}$ (vgl. Satz 1): sei

$$(\text{Ü}2) \qquad \tau_{\mathfrak{V}}^{-1}x = \mathscr{G}(\mathfrak{V}x)$$

zu jedem $x \in E$. Sei $x \in E$. Da $\mathfrak{V}x$ ein Filter ist, ist $\tau_{\mathfrak{V}}^{-1}x$ nach Satz 3, I ein Raster. Ist ferner $M \subseteq E$ und $x \in M$, so hat man nach ($\mathfrak{V}$1) $M \in \mathscr{G}(\mathfrak{V}x)$, nach (Ü2) folglich $x \in \tau_{\mathfrak{V}} M$; $\tau_{\mathfrak{V}}$ ist somit eine Prätopologie. Die Zuordnung

$$\tau \to \mathfrak{V}_\tau$$

ist hiernach und nach Korollar 1 zu Satz 1, I eine eineindeutige Abbildung der Menge aller Prätopologien τ von E auf die Menge aller Umgebungsoperatoren $\mathfrak{V}$ mit dem Definitionsbereich E. Die Umkehrung dieser Abbildung ist gerade die Zuordnung

$$\mathfrak{V} \to \tau_{\mathfrak{V}}\,.$$

Hängen die Operatoren τ und $\mathfrak{V}$ durch die Übergangsformeln (Ü1) und (Ü2) zusammen, so wollen wir sagen, sie seien zueinander gehörig. Im folgenden sei τ eine Prätopologie von E und $\mathfrak{V}$ der zugehörige Umgebungsoperator.

In einem prätopologischen Raum kann man Grenzübergänge folgendermaßen einführen[22]). Ist $\mathfrak{a}$ ein Stapel über E, so sei der *Limes* $\operatorname{Lim}\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{a}$ definiert durch

$$\operatorname{Lim}\mathfrak{a} = \bigcap_{B \in \mathscr{G}\mathfrak{a}} \tau B$$

($\mathscr{G}$ der auf E bezogene Verzahnungsoperator), die *Adhärenz* $\operatorname{Adh}\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{a}$ definiert durch

$$\operatorname{Adh}\mathfrak{a} = \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} \tau A\,.$$

Statt „$x \in \operatorname{Lim}\mathfrak{a}$" bzw. „$x \in \operatorname{Adh}\mathfrak{a}$" pflegt man auch zu sagen „x ist Limespunkt von $\mathfrak{a}$" bzw. „x ist Adhärenzpunkt von $\mathfrak{a}$". Da für den durch die Stapelbasis $\{M\}$ mit $O \subset M \subseteq E$ (im Falle nichtleerer Grundmenge E) erzeugten Hauptfilter $\mathscr{H}\{M\}$ über E gilt $\operatorname{Adh}\mathscr{H}\{M\} = \tau M$, nennt man τM die Adhärenz von M; diese Sprechweise verwendet man auch für $M = O$.

Unter Benutzung von Korollar 1 zu Satz 1, I erhält man

Satz 2. $\operatorname{Lim}\mathfrak{a} = \operatorname{Adh}(\mathscr{G}\mathfrak{a})$, $\operatorname{Adh}\mathfrak{a} = \operatorname{Lim}(\mathscr{G}\mathfrak{a})$.

---

[20]) Wird nichts anderes vereinbart, so beziehe sich der Verzahnungsoperator $\mathscr{G}$ (§ 1, I) auf die Grundmenge desjenigen Stapels, auf den er gerade angewandt wird.

[21]) J. SCHMIDT, loc. cit.

[22]) Verf. folgt hier, wie in den Sätzen 3, 4, 5, besonders 6 der Darstellung von J. SCHMIDT, loc. cit., die sich auf Filter beschränkt. Ein in unserer Arbeit beweistechnisch häufig benutzter Vorteil der Zugrundelegung von Stapeln (bzw. gestapelten Punktfamilien) beruht auf dem als Dualisierungsprinzip anzusehenden Satz 2 (bzw. Satz 8).

Hiernach fällt insbesondere der Limes eines **Filters** (über E) zusammen mit der Adhärenz des dem Filter auf Grund von Satz 3, I assoziierten Rasters. Ist $\mathfrak{b}$ ein zweiter Stapel über E, so hat man per definitionem (vgl. Korollar 2 zu Satz 1, I)

Satz 3. *Wenn* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, *so* $\operatorname{Lim}\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Lim}\mathfrak{b}$ *und* $\operatorname{Adh}\mathfrak{b} \subseteq \operatorname{Adh}\mathfrak{a}$.

Aus den Sätzen 2 und 3 erhält man mit Hilfe der Sätze 4, I und 5, I

Satz 4. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein Filter, so* $\operatorname{Lim}\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Adh}\mathfrak{a}$;
ist $\mathfrak{a}$ *ein Raster, so* $\operatorname{Adh}\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Lim}\mathfrak{a}$;
ist $\mathfrak{a}$ *ein Ultrafilter, so* $\operatorname{Lim}\mathfrak{a} = \operatorname{Adh}\mathfrak{a}$.

$\operatorname{Lim}\mathfrak{a}$ und $\operatorname{Adh}\mathfrak{a}$ lassen sich für beliebige Stapel $\mathfrak{a}$ (über E) auch in Termen des zu τ gehörigen Umgebungsoperators $\mathfrak{V}$ ausdrücken (sei $x \in E$):

Satz 5. $x \in \operatorname{Lim}\mathfrak{a}$ *gilt genau dann, wenn* $\mathfrak{V}x \subseteq \mathfrak{a}$[23]);
$x \in \operatorname{Adh}\mathfrak{a}$ *gilt genau dann, wenn* $\mathfrak{V}x \subseteq \mathscr{G}\mathfrak{a}$.

Beweis. Nach Satz 2 genügt es, etwa die Aussage über den Limesoperator Lim zu beweisen. Die Aussage $x \in \operatorname{Lim}\mathfrak{a}$ ist äquivalent mit derjenigen, daß $B \in \tau^{-1}x$ für alle $B \in \mathscr{G}\mathfrak{a}$ gilt. Dies ist wegen $\tau^{-1}x = \mathscr{G}(\mathfrak{V}x)$ äquivalent mit $\mathscr{G}\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{G}(\mathfrak{V}x)$, nach Satz 2, I also mit $\mathfrak{V}x \subseteq \mathfrak{a}$.

Wir bemerken, daß wegen $\mathfrak{V}x = \mathscr{G}(\tau^{-1}x) \subseteq \tau^{-1}x = \mathscr{G}(\mathfrak{V}x)$ (siehe Satz 4, I) nach den Sätzen 2, 3 und 5 $x \in \operatorname{Lim}\mathfrak{V}x = \operatorname{Adh}\tau^{-1}x \subseteq \operatorname{Adh}\mathfrak{V}x = \operatorname{Lim}\tau^{-1}x$ gilt. Nach Axiom ($\mathfrak{V}$1) gilt bei Beachtung der Sätze 4 und 5 $x \in \operatorname{Lim}\mathscr{H}\{\{x\}\} = \operatorname{Adh}\mathscr{H}\{\{x\}\}$.

Die Definitionsgleichungen für Lim und Adh lassen sich in folgendem Sinne nach τ auflösen (sei $M \subseteq E$):

Satz 6. *Die Gleichungen*

$$\tau M = \bigcup_{\substack{M \in \mathscr{G}\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \in \Phi}} \operatorname{Lim}\mathfrak{a} \quad \textit{und} \quad \tau M = \bigcup_{\substack{M \in \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \in \Phi}} \operatorname{Adh}\mathfrak{a}$$

gelten, falls Φ (a) *die Menge aller Stapel,* (b) *die Menge aller Filter,* (c) *die Menge aller Raster über* E *ist.*

Beweis. Im Falle (a) sind die beiden Gleichungen nach Satz 2 und Satz 2, I äquivalent. Die erste beweist man so: Sei $x \in \tau M$. Dann ist $M \in \tau^{-1}x = \mathscr{G}(\mathfrak{V}x)$; $\mathfrak{V}x$ ist ein Stapel und es gilt $x \in \operatorname{Lim}\mathfrak{V}x$. Somit ist $x \in \bigcup_{\substack{M \in \mathscr{G}\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \in \Phi}} \operatorname{Lim}\mathfrak{a}$, also $\tau M \subseteq \bigcup_{\substack{M \in \mathscr{G}\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \in \Phi}} \operatorname{Lim}\mathfrak{a}$. Die umgekehrte Inklusion folgt unmittelbar aus der Definition des Limesoperators. Da der im Falle (a) verwendete Stapel $\mathfrak{V}x$ ein Filter ist, wurde unter (a) die erste der beiden Gleichungen für den Fall (b) mitbewiesen. Da für $x \in \tau M$ gilt $x \in \operatorname{Adh}\mathscr{H}\{M\}$, wie vor Satz 2 erwähnt wurde (wegen $x \in \tau M$ ist nach ($\tau 0_2$) $M \neq O$), hat man $\tau M \subseteq \bigcup_{\substack{M \in \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \in \Phi}} \operatorname{Adh}\mathfrak{a}$ im Falle (b); die inverse Inklusion folgt aus der Definition des Adhärenzoperators. Der Fall (c) ist nach Satz 3, I, Satz 2 und Satz 2, I mit dem Fall (b) äquivalent.

In den Fällen (b) und (c) läßt sich Satz 6 verschärfen zu

---

[23]) Dies ist die bei BOURBAKI [3], S. 46 (définition 1), verwendete Einführung des »point limite d'un filtre $\mathfrak{a}$«.

Satz 7. *Ist Φ die Menge aller Filter bzw. Raster über E, so gilt*

$$\tau M = \bigcup_{\substack{M \in \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \in \Phi}} \operatorname{Lim} \mathfrak{a} \quad bzw. \quad \tau M = \bigcup_{\substack{M \in \mathscr{G}\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \in \Phi}} \operatorname{Adh} \mathfrak{a}.$$

Beweis. Nach Satz 3, I, Satz 2 und Satz 2, I genügt es, die Behauptung für den Fall zu beweisen, daß Φ die Menge aller Filter über E ist. Ist $\mathfrak{b}$ ein Filter über E mit $M \in \mathscr{G}\mathfrak{b}$, so auch die über E gebildete aufsteigende Hülle $\mathscr{H}\mathfrak{b}_M$ der Spur von $\mathfrak{b}$ in der Menge M. Wegen $\mathfrak{b} \subseteq \mathscr{H}\mathfrak{b}_M$ gilt dann nach Satz 3 $\operatorname{Lim}\mathfrak{b} \subseteq \operatorname{Lim}\mathscr{H}\mathfrak{b}_M$; nach Satz 6 folgt hieraus, da überdies $M \in \mathscr{H}\mathfrak{b}_M$, $\tau M \subseteq \bigcup_{\substack{M \in \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \in \Phi}} \operatorname{Lim}\mathfrak{a}$. Die umgekehrte Inklusion führt man mittels Satz 4, I auf die entsprechende Inklusion in Satz 6 zurück.

Limes und Adhärenz definierten wir für alle Stapel über E. Nicht für alle Zwecke reichen aber Stapel, insbesondere Filter und Raster, (in „technischer" Hinsicht) als „Approximatoren" aus. Ja gerade für das Anliegen dieser Arbeit, die Rechtfertigung des Begriffes der gefilterten Summe von Filtern, erscheinen andere Approximatoren besser geeignet: die gestapelten, insbesondere die gefilterten und gerasterten Familien.

Sei $(f(i))_{i \in I}$, kürzer (f, I), kurz f, eine Familie von Elementen $f(i)$ von E — wir sagen: eine *Punktfamilie (über E)*, kurz eine *Familie (über E)* — und $\mathfrak{a}$ ein Stapel über I; das geordnete Paar $(f, \mathfrak{a})$ nennen wir eine *gestapelte Punktfamilie*, kurz *gestapelte Familie (über E)*; statt $(f, \mathfrak{a})$ schreiben wir ausführlicher auch $(f, I, \mathfrak{a})$ oder $f(i)_{i \in I, \mathfrak{a}}$. (Die Existenz gestapelter Punktfamilien über E setzt $E \neq O$ voraus.) Es ist klar, was insbesondere unter einer gefilterten und unter einer gerasterten Punktfamilie zu verstehen ist[24]). Der Bereich der gestapelten Punktfamilien über E umfaßt übrigens im folgenden Sinn den Bereich der Stapel über E: Nennt man diejenigen gestapelten Punktfamilien $(f, \mathfrak{a})$, bei denen f die identische Selbstabbildung von I, also $I \subseteq E$ ist, *gestapelte Mengen*, $(I, \mathfrak{a})$, so kann man die gestapelten Mengen der Gestalt $(E, \mathfrak{a})$ — als Approximatoren — mit den Stapeln über E identifizieren.

Gerechtfertigt wird diese Identifikation durch nachstehende Definition des *Limes* $\operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a})$ und der *Adhärenz* $\operatorname{Adh}(f, \mathfrak{a})$ *der gestapelten Punktfamilie* $(f, \mathfrak{a})$: es sei

$$\operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a}) = \operatorname{Lim}(\mathscr{H} f \mathfrak{a}),$$

$$\operatorname{Adh}(f, \mathfrak{a}) = \operatorname{Adh}(\mathscr{H} f \mathfrak{a})$$

($\mathscr{H}$ sei der in § 1, I eingeführte, auf E bezogene Hüllenoperator). Wir bemerken, daß nach Korollar 1 zu Satz 6, I $f\mathfrak{a}$ ein Stapel über fI, folglich $\mathscr{H} f\mathfrak{a}$ ein Stapel über E ist. Neben der Bezeichnung $\operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a})$ verwenden wir $\operatorname{Lim}_{\mathfrak{a}} f$ und $\operatorname{Lim}_{\mathfrak{a}} f(i)_{i \in I}$; Entsprechendes gilt für die Adhärenz. Die Begriffe „Limespunkt"

[24]) NÖBELING [21], S. 54: „gefilterte Familie, gefilterte Funktion". Die „gerasterte Familie, gerasterte Funktion" von NÖBELING [20], S. 135, ist — anders als hier (vgl. § 1, I) — eine Familie, deren Indexbereich mit einer Filterbasis versehen ist.

und „Adhärenzpunkt" kann man, wie bei Stapeln, auch bei gestapelten Punktfamilien einführen[25]).

Jeder der obigen Sätze über Grenzübergänge vermöge Stapeln läßt sich nun in einen entsprechenden Satz über gestapelte Familien übertragen. So entspricht dem Satz 2

Satz 8. $\mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a}) = \mathrm{Adh}(f, \mathscr{G}\mathfrak{a})$, $\mathrm{Adh}(f, \mathfrak{a}) = \mathrm{Lim}(f, \mathscr{G}\mathfrak{a})$.

Beweis. Nach Korollar 1 zu Satz 1, I genügt es, die erste Gleichung zu beweisen. Ist $\mathfrak{b}$ eine Stapelbasis über einer Menge $J \subseteq E$, so gilt $\mathscr{H}\mathscr{G}_J\mathfrak{b} = \mathscr{G}_E\mathfrak{b}$, also auch $\mathscr{H}\mathscr{G}_J\mathfrak{b} = \mathscr{G}_E\mathscr{H}\mathfrak{b}$, wobei sich $\mathscr{H}$ stets auf die Menge E beziehe. Nach Satz 6, I hat man $f\mathscr{G}_I\mathfrak{a} = \mathscr{G}_{fI}f\mathfrak{a}$, also ist nach dem Gesagten $\mathscr{H}f\mathscr{G}_I\mathfrak{a} = \mathscr{G}_E\mathscr{H}f\mathfrak{a}$. Mittels Satz 2 folgt die Richtigkeit der ersten Gleichung des Satzes.

Aus den Definitionen und aus Satz 3 ergibt sich (mit einem zweiten Stapel $\mathfrak{b}$ über I)

Satz 9. *Wenn* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, *so* $\mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Lim}(f, \mathfrak{b})$ *und* $\mathrm{Adh}(f, \mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{Adh}(f, \mathfrak{a})$.

Entsprechend, wie wir aus den Sätzen 2 und 3 den Satz 4 erhielten, erhält man nun aus den Sätzen 8 und 9

Satz 10. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein Filter, so* $\mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Adh}(f, \mathfrak{a})$;
ist $\mathfrak{a}$ *ein Raster, so* $\mathrm{Adh}(f, \mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a})$;
ist $\mathfrak{a}$ *ein Ultrafilter, so* $\mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a}) = \mathrm{Adh}(f, \mathfrak{a})$.

Das System $\mathfrak{s}$ aller τfA mit $A \in \mathfrak{a}$ ist ebenso fein wie das System $\mathfrak{t}$ aller τB mit $B \in \mathscr{H}f\mathfrak{a}$, folglich ist der Durchschnitt aller $S \in \mathfrak{s}$ gleich dem Durchschnitt aller $T \in \mathfrak{t}$. Somit gilt die zweite Gleichung in

Satz 11. $\mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a}) = \bigcap_{B \in \mathscr{G}\mathfrak{a}} \tau fB$, $\mathrm{Adh}(f, \mathfrak{a}) = \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} \tau fA$.

Die erste Gleichung ergibt sich aus der zweiten mittels Satz 8.

Analog zu Satz 5 lassen sich Limes und Adhärenz einer gestapelten Familie auch in Termen von $\mathfrak{V}$ ausdrücken (sei $x \in E$):

Satz 12. $x \in \mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a})$ *gilt genau dann, wenn* $\mathfrak{V}x \subseteq \mathscr{H}f\mathfrak{a}$;
$x \in \mathrm{Adh}(f, \mathfrak{a})$ *gilt genau dann, wenn* $\mathfrak{V}x \subseteq \mathscr{H}f\mathscr{G}\mathfrak{a}$
(der Hüllenoperator $\mathscr{H}$ *auf die Menge* E *bezogen).*

Die erste Aussage dieses Satzes folgt aus Satz 5, die zweite aus der ersten nach Satz 8.

In einer konventionellen Sprechweise besagt Satz 12: x ist genau dann Limes- bzw. Adhärenzpunkt von $(f, \mathfrak{a})$, wenn jede Umgebung von x den Punkt $f(i)$ für $\mathfrak{a}$-fast alle bzw. $\mathscr{G}\mathfrak{a}$-fast alle $i \in I$ enthält (vgl. § 4, I).

Schließlich wollen wir noch, analog zu Satz 6, τM mit $M \subseteq E$ ausdrücken durch die auf den Bereich der gestapelten, gefilterten oder gerasterten Familien über E bezogenen Operatoren Lim und Adh (sei $x \in E$).

---

[25]) Dieses Vorgehen entspricht dem bei Bourbaki [3], S. 50 (définition 4). Nöbeling [21], S. 56, sagt „x ist durch den Filter $\mathfrak{a}$ der Funktion f stark adhärent bzw. adhärent" statt „x $\mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a})$ bzw. $x \in \mathrm{Adh}(f, \mathfrak{a})$" und führt die einer gefilterten Punktfamilie stark adhärenten bzw. adhärenten Punkte im wesentlichen (ohne explizite Verwendung des Durchschnitts) durch Satz 11 ein. Der Operator „Lim" bzw. „Adh" stimmt mit dem Operator „lim inf" bzw. „lim sup" bei Nöbeling [21], S. 56, überein. — Die Sätze 9, 10, 11 und 12 findet man für gefilterte Familien explizit oder implizit bei Choquet [7], Nöbeling [21] oder Bourbaki [3].

Satz 13. *Die Aussage $x \in \tau M$ ist äquivalent mit jeder der folgenden sechs Aussagen (der Hüllenoperator $\mathscr{H}$ auf die Menge E bezogen):*

(a) *bzw.* (b) *bzw.* (c). *Es gibt eine gestapelte bzw. gefilterte bzw. gerasterte Familie* $(f, \mathfrak{a})$ *mit* $M \in \mathscr{H} f \mathscr{G} \mathfrak{a}$ *und* $x \in \operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a})$.

(d) *bzw.* (e) *bzw.* (f). *Es gibt eine gestapelte bzw. gefilterte bzw. gerasterte Familie* $(f, \mathfrak{a})$ *mit* $M \in \mathscr{H} f \mathfrak{a}$ *und* $x \in \operatorname{Adh}(f, \mathfrak{a})$.

Beweis. $\mathscr{H} f \mathfrak{a}$ ist ein Stapel bzw. Filter bzw. Raster über E, wenn $\mathfrak{a}$ ein Stapel bzw. Filter bzw. Raster ist (vgl. Korollar 1 zu Satz 6, I). Auf Grund dieser Bemerkung folgt die Behauptung, was (d) bzw. (e) bzw. (f) angeht, aus der zweiten, für Stapel bzw. Filter bzw. Raster über E ausgesprochenen Gleichung in Satz 6. Nach Satz 8, Satz 2, I und Satz 3, I ist (d) mit (a), (e) mit (c), (f) mit (b) äquivalent.

Für gefilterte und gerasterte Familien läßt sich Satz 13 noch verschärfen zu

Satz 14. *Die Aussage $x \in \tau M$ ist äquivalent mit jeder der folgenden vier Aussagen:*

(a) *bzw.* (b). *Es gibt eine gefilterte bzw. gerasterte Familie* $(f, I, \mathfrak{a})$ *mit* $f I \subseteq M$ *und* $x \in \operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a})$.

(c) *bzw.* (d). *Es gibt eine gefilterte bzw. gerasterte Familie* $(f, I, \mathfrak{a})$ *mit* $f I \subseteq M$ *und* $x \in \operatorname{Adh}(f, \mathfrak{a})$.

Beweis. Nach Satz 8 und Satz 3, I ist (a) mit (d), (b) mit (c) äquivalent, nach Satz 10 folgt aus (a) die Aussage (c). Da aus (a) die Aussage (b) von Satz 13, aus (c) die Aussage (e) von Satz 13 folgt, genügt es also nach Satz 13, zu zeigen, daß aus (b) von Satz 13 die jetzige Aussage (a) folgt.

Es gelte die Aussage (b) von Satz 13. Zu M gibt es dann eine Menge $C \in \mathscr{G}\mathfrak{a}$ mit $fC \subseteq M$. Ist nun $\mathfrak{a}_C$ die Spur von $\mathfrak{a}$ in der Menge C (vgl. § 1, I), so gilt einerseits wegen (b) von Satz 13 $\mathfrak{V} x \subseteq \mathscr{H} f \mathfrak{a} \subseteq \mathscr{H} f \mathfrak{a}_C$, also $x \in \operatorname{Lim}_{\mathfrak{a}_C} f(i)_{i \in C}$, andererseits nach Wahl von C die Inklusion $fC \subseteq M$ (vgl. Satz 12). Die gefilterte Familie $f(i)_{i \in C, \mathfrak{a}_C}$ leistet also das in (a) von einer Familie $(f, \mathfrak{a})$ Verlangte; somit gilt (a).

Wir hätten Satz 14 statt auf Satz 13 auch auf Satz 7 zurückführen können.

Insbesondere im Hinblick auf die beabsichtigte Spezialisierung von τ zu einer Topologie im üblichen Sinn erscheint es vorteilhaft, nach dem Vorgang von J. SCHMIDT[26]) neben τ noch eine zweite, duale Abbildung von $\mathfrak{P}E$ in sich einzuführen: sie wird im Sinne von Satz 1 induziert durch die inverse Relation $\mathfrak{V}^{-1}$ zum als Relation zwischen der Menge E und der Potenzmenge $\mathfrak{P}E$ aufgefaßten Umgebungsoperator $\mathfrak{V}$. Ist $M \subseteq E$, so ist hiernach $\mathfrak{V}^{-1}M$ die Menge aller $x \in E$ mit $M \in \mathfrak{V}x$. Man nennt $\mathfrak{V}^{-1}M$ das *Innere* von M; berechtigt wird diese Redeweise durch die mit ($\mathfrak{V}$1) äquivalente[26a]) Inklusion

$$\mathfrak{V}^{-1} M \subseteq M \quad \text{(Intensionalität)}\,.$$

$\mathfrak{V}^{-1}$ erfüllt übrigens wie τ die Bedingung

$$\text{wenn} \quad M \subseteq N, \quad \text{so} \quad \mathfrak{V}^{-1} M \subseteq \mathfrak{V}^{-1} N \quad \text{(Monotonie)}$$

---

[26]) J. SCHMIDT, loc. cit

[26a]) Genauer ausgedrückt, sind die beiden Aussagen „($\mathfrak{V}$ 1) für alle $x \in E$" und „$\mathfrak{V}^{-1} M \subseteq M$ für alle $M \subseteq E$" äquivalent.

(für alle $M, N \subseteq E$). Der unmittelbare Zusammenhang zwischen $\mathfrak{V}^{-1}$ und τ wird deutlich durch

Satz 15. $\mathfrak{V}^{-1}M = E - \tau(E - M)$, $\tau M = E - \mathfrak{V}^{-1}(E - M)$[27].

Beweis. Da beide Gleichungen miteinander äquivalent sind, genügt es, etwa die erste zu beweisen. Sei $x \in E$. Dann ist die Aussage $x \in \mathfrak{V}^{-1}M$ äquivalent mit $M \in \mathfrak{V}x$, diese wegen (Ü1) äquivalent mit $M \in \mathscr{G}(\tau^{-1}x)$, nach Satz 1, I und ($\tau$0) also mit $E - M \notin \tau^{-1}x$; dies ist gleichwertig mit $x \notin \tau(E - M)$, also mit $x \in E - \tau(E - M)$.

Man nennt M *abgeschlossen* bzw. *offen*, wenn $\tau M = M$ bzw. $\mathfrak{V}^{-1}M = M$ gilt. Satz 15 liefert: M ist genau dann abgeschlossen, wenn $E - M$ offen ist.

Nach diesen Bemerkungen über den Operator $\mathfrak{V}^{-1}$, der auch als primärer Begriff — etwa unter dem Namen „Kernoperator" — an die Spitze der Theorie der Prätopologien gestellt werden könnte, wenden wir uns der angekündigten Spezialisierung von τ zu. Die Prätopologie τ heiße *idempotent* oder eine *Topologie*[28]), wenn sie die Bedingung

(τ2) $$\tau^2 = \tau$$

erfüllt, d. h. wenn für alle $M \subseteq E$ gilt $\tau\tau M = \tau M$. Nach Satz 15 ist die Bedingung (τ2) äquivalent mit

($\mathfrak{V}$2) $$(\mathfrak{V}^{-1})^2 = \mathfrak{V}^{-1},$$

d. h. mit $\mathfrak{V}^{-1}\mathfrak{V}^{-1}M = \mathfrak{V}^{-1}M$ für alle $M \subseteq E$. Hieraus ergibt sich folgende, für uns nützliche Kennzeichnung der idempotenten Prätopologien.

Satz 16. *Die Prätopologie τ ist genau dann idempotent, wenn zu jedem $x \in E$ und jedem $M \subseteq E$ die Aussage $M \in \mathfrak{V}x$ äquivalent ist mit $\mathfrak{V}^{-1}M \in \mathfrak{V}x$.*

Beweis. Sei $x \in E$ und $M \subseteq E$. Die Aussage „$x \in \mathfrak{V}^{-1}M$ genau dann, wenn $x \in \mathfrak{V}^{-1}\mathfrak{V}^{-1}M$" ist äquivalent mit „$M \in \mathfrak{V}x$ genau dann, wenn $\mathfrak{V}^{-1}M \in \mathfrak{V}x$".

Daß die in § 1 erklärten Übergänge von einer Prätopologie zum zugehörigen Umgebungsoperator und umgekehrt im Falle der Topologien genau der Konvention entsprechen, wird besonders deutlich durch nachstehenden Satz, der auf Satz 16 und auf der einfachen Aussage beruht, daß in Topologien eine Menge M genau dann abgeschlossen bzw. offen ist, wenn sie im Wertebereich des Operators τ bzw. $\mathfrak{V}^{-1}$ liegt.

Satz 17. *Die Prätopologie τ ist genau dann idempotent, wenn zu jedem $x \in E$ die offenen Mengen, welche x enthalten, eine Basis von $\mathfrak{V}x$ bilden*[29]).

[27]) J. Schmidt, loc. cit. Häufig wird dieser Satz zur Definition des Inneren einer Menge herangezogen, z. B. bei Kuratowski [16], S. 29, und Nöbeling [21], S. 44 („Kern"). Kowalsky [15], S. 308 (unten), benutzt ihn zur Definition des Überganges vom Operator τ zum Operator $\mathfrak{V}$.

[28]) Kuratowski [16], Bourbaki [3], Kelley [13] und viele andere Autoren sagen „Topologie", Nöbeling sagt genauer auch „einstufige Topologie" ([19], S. 131) oder „klassische Topologie" ([21], S. 42). Wir haben den algebraischen Terminus "idempotent" (nach einem Vorschlag von J. Schmidt) dem anschaulichen „einstufig" gegenüber bevorzugt, weil ersterer unseres Erachtens wohl dem Operator-Charakter von τ besser angepaßt ist.

[29]) Die eine Hälfte dieser Aussage wird etwa bei Bourbaki [3], S. 11 (définition 4), zur Definition von $\mathfrak{V}x$ herangezogen.

Beweis. τ sei idempotent und es sei $x \in E$. Ist $M \in \mathfrak{V}x$, so hat man nach Satz 16 $\mathfrak{V}^{-1}M \in \mathfrak{V}x$; nach ($\mathfrak{V}$2) ist $\mathfrak{V}^{-1}M$ offen, nach ($\mathfrak{V}$1) und, da $\mathfrak{V}^{-1}$ intensional ist, gilt $x \in \mathfrak{V}^{-1}M \subseteq M$. Das System aller offenen Mengen, die x enthalten, ist also feiner als $\mathfrak{V}x$. Umgekehrt ist $\mathfrak{V}x$ feiner als dieses System. Ist nämlich N mit $x \in N \subseteq E$ offen, so hat man per definitionem $N = \mathfrak{V}^{-1}N$, folglich $N \in \mathfrak{V}x$. Die Bedingung ist also erfüllt. — Umgekehrt sei sie erfüllt, und es sei $x \in E$ und $M \subseteq E$. Gilt $M \in \mathfrak{V}x$, so enthält M auf Grund der Bedingung eine Menge N mit $x \in N = \mathfrak{V}^{-1}N \in \mathfrak{V}x$; da $\mathfrak{V}^{-1}$ monoton ist, hat man folglich $\mathfrak{V}^{-1}M \in \mathfrak{V}x$. Da $\mathfrak{V}^{-1}$ intensional ist, gilt mit $\mathfrak{V}^{-1}M \in \mathfrak{V}x$ auch $M \in \mathfrak{V}x$. Nach Satz 16 ist somit τ idempotent.

§ 2. Direkte Summe von Abbildungen, gestapelte Summe von gestapelten Familien

Es ist für die Darstellung des Folgenden bequem, die Begriffe der direkten Summe von Mengen (§ 2, I) und der gestapelten Summe von Stapeln (§ 4, I) so zu ergänzen, daß sie den hier zu betrachtenden iterierten Grenzübergängen vermöge gestapelter Familien angepaßt sind.

Außer einer nichtleeren Familie $(K_i)_{i\in I}$ beliebiger Mengen — wie in § 2, I — sei jetzt noch eine (abstrakte) Menge E und eine Familie $(g_i)_{i\in I}$ von (eindeutigen) Abbildungen g_i von K_i in E gegeben. Unter der *direkten Summe*

$$\mathsf{S}_{i\in I}\, g_i$$

der Familie $(g_i)_{i\in I}$ *von Abbildungen* wollen wir die Abbildung

$$(j,k) \to g_j(k) \qquad \Big((j,k) \in \mathsf{S}_{i\in I} K_i\Big)$$

verstehen; $\mathsf{S}\, g_i$ ist eine (eindeutige) Abbildung von $\mathsf{S}\, K_i$ in E.

Beispiele. 1. Ist zu jedem $i \in I$ g_i die identische Selbstabbildung der Menge K_i, also $K_i \subseteq E$, so ist $\mathsf{S}\, g_i$ der zweite, auf $\mathsf{S}\, K_i$ definierte Projektionsoperator q, $\mathsf{S}_{i\in\{j\}}\, g_i$ (mit $j \in I$) der zu j gehörige eingeschränkte zweite Projektionsoperator q_j (vgl. § 2, I).

2. Sind die K_i paarweise fremd, so wird man die direkte Summe der g_i mit der Abbildung

$$k \to g_{i(k)}(k), \quad \text{falls} \quad k \in K_{i(k)} \qquad \Big(k \in \bigcup_{i\in I} K_i\Big),$$

der „Vereinigung" der Abbildungen g_i, identifizieren dürfen (vgl. Spezialfall 2 in § 2, I). Nach dieser Identifikation ist dann g_i die Einschränkung der Abbildung $\mathsf{S}\, g_i$ auf die Menge K_i.

Geht man umgekehrt von einer (eindeutigen) Abbildung g der direkten Summe $\mathsf{S}\, K_i$ in die Menge E aus, also von einer Punktfamilie $(g, \mathsf{S}\, K_i)$ über E, einer *Doppel-Punktfamilie*, kurz *Doppelfamilie*[30]) — mit $I \neq O$ — *(über E)*,

[30]) J. Schmidt [25], S. 441. Bourbaki sagt »famille double« ([4], S. 77) — im Falle $K_i = K$ (fest) für alle $i \in I$ — oder, in der Abbildungssprechweise, »fonction de deux arguments« ([4], S. 85).

wie wir in Verallgemeinerung der „Doppelfolge" sagen wollen, so läßt sich g auf genau eine Weise in der Gestalt $g = \underset{i \in I}{\mathsf{S}}\, g_i$ mit (eindeutigen) Abbildungen g_i von K_i in E darstellen, nämlich mit den Abbildungen

$$k \to g(i, k) \qquad (k \in K_i)\,.$$

Man ist deshalb berechtigt, die Abbildung g_i als *i-te Komponente* von g, $g(i, .)$, zu bezeichnen[31]).

Ausführlicher, unter Betonung der Definitionsbereiche K_i der Abbildungen g_i, wird man $\mathsf{S}\, g_i$, genauer: die Punktfamilie $(\mathsf{S}\, g_i, \mathsf{S}\, K_i)$, auch als

$$\underset{i \in I}{\mathsf{S}}\, (g_i, K_i)$$

schreiben dürfen („direkte Summe von Punktfamilien").

Diese unstrukturierte Summation unstrukturierter Familien legt nun, im Hinblick auf § 4, I, nahe, auch von einer strukturierten Summation strukturierter Familien zu sprechen: Wie in § 4, I sei über I ein (Index-) Stapel $\mathfrak{a}$, über jedem K_i ein (Summanden-) Stapel $\mathfrak{b}_i$ gegeben (Existenz eines solchen setzt $K_i \neq O$ voraus). Dann verstehen wir unter der *durch $\mathfrak{a}$ gestapelten Summe*

$$\underset{i \in I}{{}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}}\, (g_i, \mathfrak{b}_i)$$

der Familie $(g_i, \mathfrak{b}_i)_{i \in I}$ *der gestapelten Familien* $(g_i, \mathfrak{b}_i)$ die gestapelte Familie

$$\left(\underset{i \in I}{\mathsf{S}}\, g_i, \underset{i \in I}{{}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}}\, \mathfrak{b}_i\right).$$

Den Sonderfall mit $\mathfrak{a} = \{I\}$ hätte man in Analogie zu § 3, I mit

$$\mathsf{S}\, (g_i, \mathfrak{b}_i)$$

zu bezeichnen („direkte Summe von gestapelten Familien").

Per definitionem ist die gestapelte Summe gestapelter Familien (über E) eine gestapelte Familie (über E); nach den Korollaren 1, 3 und 5 zu Satz 21, I ist die gefilterte bzw. gerasterte bzw. ultragefilterte Summe ($\mathfrak{a}$ Filter bzw. Raster bzw. Ultrafilter) gefilterter bzw. gerasterter bzw. ultragefilterter Familien (über E) eine gefilterte bzw. gerasterte bzw. ultragefilterte Familie (über E). (Die Formulierung genauerer, dem Satz 21, I und dessen Korollaren 2 und 4 entsprechenden Aussagen darf dem Leser überlassen werden[32]).)

Ein wichtiger Spezialfall der gestapelten Summe gestapelter Familien ist der mit $K_i = K$ (fest) und $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}$ (fest) für alle $i \in I$; nach Definition des ordinalen Produkts $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ zweier Stapel $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (§ 4, I) ist dann

$$(2.1) \qquad {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, (g_i, \mathfrak{b}_i) = (\mathsf{S}\, g_i, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b})\,.$$

---

[31]) Etwa bei Doob [8] häufig verwendete Schreibweise. Bourbaki [4], S. 85, bezeichnet die i-te Komponente von g mit g_i und nennt sie »application partielle déterminée par g, relative à la valeur i du premier argument«.

[32]) Auf Eindeutigkeitsbetrachtungen, die sich an das Korollar zu Satz 19, I anschließen könnten, wird hier verzichtet.

Im obigen Beispiel 1 ist nun jede gestapelte Familie $(g_i, \mathfrak{b}_i)$ eine gestapelte Menge $(K_i, \mathfrak{b}_i)$ (vgl. § 1) und $\mathsf{S}\, g_i = q$, also

$$^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, (K_i, \mathfrak{b}_i) = (q, {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i)\,. \tag{2.2}$$

Hiernach ist scharf zu unterscheiden zwischen der gestapelten Summe der Stapel $\mathfrak{b}_i$ und derjenigen der ihnen entsprechenden gestapelten Mengen $(K_i, \mathfrak{b}_i)$. In dem wichtigen Sonderfall, daß $I = E$ und $K_i = E$ für alle $i \in I$, also $\mathfrak{a}$ und alle $\mathfrak{b}_i$ Stapel über E sind, gilt nach (2.2)

$$\underset{x \in E}{^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}}\, (E, \mathfrak{b}_x) = \Big(q, \underset{x \in E}{^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}}\, \mathfrak{b}_x\Big)\,; \tag{2.3}$$

Indexbereich dieser Familie ist $E \times E$.

Ist schließlich in der Menge E eine Prätopologie τ gegeben, so hat man auf Grund der Verzahnungsinvarianz der gestapelten Summe von Stapeln (Satz 16, I) und Satz 8 (mit Stapeln $\mathfrak{a}$ über I, $\mathfrak{b}_i$ über K_i), als ein Dualitätsprinzip,

Satz 18.
$$\operatorname{Lim} \underset{i \in I}{^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}}\, (g_i, \mathfrak{b}_i) = \operatorname{Adh} \underset{i \in I}{^{\mathscr{G}\mathfrak{a}}\mathsf{S}}\, (g_i, \mathscr{G}\mathfrak{b}_i)\,,$$
$$\operatorname{Adh} \underset{i \in I}{^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}}\, (g_i, \mathfrak{b}_i) = \operatorname{Lim} \underset{i \in I}{^{\mathscr{G}\mathfrak{a}}\mathsf{S}}\, (g_i, \mathscr{G}\mathfrak{b}_i)$$

(dabei beziehe sich der Verzahnungsoperator $\mathscr{G}$ allemal auf die Grundmenge desjenigen Stapels, auf den er gerade angewandt wird).

§ 3. Kennzeichnung der idempotenten Prätopologien mit Hilfe gefilterter Punktfamilien

An § 1 anknüpfend, gehen wir von einer Prätopologie τ der Menge E aus; $\mathfrak{V}$ sei der zu τ gehörige Umgebungsoperator.

Wir wollen nun die idempotenten Prätopologien durch Bedingungen für den Limes- und Adhärenzoperator — Lim und Adh — kennzeichnen und uns dabei, in bewußter Beschränkung, als Approximatoren der gefilterten, nicht der allgemein gestapelten Familien (über E) bedienen. Beweistechnisch jedoch werden wir auf die Vorteile, die die Benutzung allgemein gestapelter, insbesondere gerasterter Familien gelegentlich mit sich bringt, nicht verzichten.

Satz 19. *Jede der folgenden Bedingungen* (a) *und* (b) *ist für die Idempotenz der Prätopologie τ notwendig und hinreichend.*

(a) *Ist $(f, I, \mathfrak{a})$ eine gefilterte Familie über E und zu jedem $i \in I$ $(g_i, \mathfrak{b}_i)$ eine gefilterte Familie über E, so gilt*

mit $\quad f(i) \in \operatorname{Lim}(g_i, \mathfrak{b}_i)$ *für alle* $i \in I$

allemal auch $\quad \operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Lim} \underset{i \in I}{^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}}\, (g_i, \mathfrak{b}_i)\,.$

(b) *laute wie* (a) *mit* „Adh“ *anstelle* „Lim“[33]).

[33]) Die Bedingungen (a) und (b) lassen sich allgemeiner, bei geeigneter Deutung von „Lim“ und „Adh“, auch zur Kennzeichnung der „einstufig topologischen Vereine“ von Nöbeling unter den „mehrstufigen“ ([21], S. 41, Fußnote 2) heranziehen. (E ist dann als (teilweise) geordnete Menge anzunehmen.)

Beweis. 1. τ sei idempotent. Wir beweisen die Gültigkeit von (a) für gestapelte anstelle gefilterter Familien; die so abgeänderte Bedingung (a) bezeichnen wir mit (a'). $(f, I, \mathfrak{a})$ und $(g_i, \mathfrak{b}_i)$ (zu jedem $i \in I$) seien gestapelte Familien über E, und es gelte $f(i) \in \operatorname{Lim}(g_i, \mathfrak{b}_i)$ für alle $i \in I$. Es sei $x \in \operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a})$ und $V \in \mathfrak{V}x$. Nach Satz 16 gilt dann $\mathfrak{V}^{-1} V \in \mathfrak{V}x$, da τ idempotent ist. Folglich gibt es nach Satz 12 eine Menge $A \in \mathfrak{a}$ mit $f(A) \subseteq \mathfrak{V}^{-1} V$.

Sei $a \in A$; dann hat man nach Wahl von A $f(a) \in \mathfrak{V}^{-1}V$, und dies ist gleichwertig mit $V \in \mathfrak{V}f(a)$. Laut Voraussetzung gibt es also zu jedem $a \in A$ eine Menge $B_a \in \mathfrak{b}_a$ mit $g_a(B_a) \subseteq V$ (Satz 12); jedem a ordnen wir ein solches B_a zu (Auswahlaxiom!).

Für die direkte Summe $\underset{a \in A}{\mathsf{S}}\, B_a$ der Mengen B_a hat man nach deren Auswahl $\left(\underset{i \in I}{\mathsf{S}}\, g_i\right)\left(\underset{a \in A}{\mathsf{S}}\, B_a\right) \subseteq V$ und, wegen $A \in \mathfrak{a}$, $\underset{a \in A}{\mathsf{S}}\, B_a \in {}^{\mathfrak{a}}\underset{i \in I}{\mathsf{S}}\, \mathfrak{b}_i$, nach Satz 12 somit $x \in \operatorname{Lim} {}^{\mathfrak{a}}\underset{i \in I}{\mathsf{S}}\, (g_i, \mathfrak{b}_i)$. Es gilt also die Aussage (a'), folglich auch (a).

Bezeichnet man die für gerasterte anstelle gefilterter Familien ausgesprochene Bedingung (a) etwa mit (a''), so ist nach dem Bewiesenen auch (a'') für die Idempotenz von τ notwendig. Da die Bedingung (a'') nach den Sätzen 3, I und 8, vor allem aber wegen Satz 18 mit der Bedingung (b) äquivalent ist, ist damit auch die Notwendigkeit von (b) erwiesen.

2. Umgekehrt gelte (a). Sei $M \subseteq E$ und $x \in \tau^2 M$. Dann gibt es nach Satz 13[34]) eine gefilterte Familie $(f, I, \mathfrak{a})$ mit $\tau M \in \mathscr{H} f(\mathscr{G}\mathfrak{a})$ und $x \in \operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a})$; dabei sei $\mathscr{H}$ der auf E bezogene Hüllenoperator aus § 1, I. Es gibt also eine Menge $C \in \mathscr{G}\mathfrak{a}$ derart, daß $f(C) \subseteq \tau M$.

Wir ordnen nun jedem $i \in I$ eine bestimmte gefilterte Familie $(g_i, \mathfrak{b}_i)$ zu: Sei $i \in I$. Ist $i \in C$, so nach Wahl von C $f(i) \in \tau M$; nach Satz 13 gibt es dann eine gefilterte Familie $(g_i, \mathfrak{b}_i)$ mit $f(i) \in \operatorname{Lim}(g_i, \mathfrak{b}_i)$ und $M \in \mathscr{H} g_i(\mathscr{G}\mathfrak{b}_i)$; jedem $i \in C$ ordnen wir eine solche gefilterte Familie zu (Auswahlaxiom!). Ist hingegen $i \notin C$, so sei $K_i = \{i\}$, $\mathfrak{b}_i = \{\{i\}\}$, $g_i(k) = f(i)$ mit $k \in K_i$.

Zu jedem $i \in I$ gilt $f(i) \in \operatorname{Lim}(g_i, \mathfrak{b}_i)$ — siehe Axiom ($\mathfrak{V}$1) —, nach (a) also $x \in \operatorname{Lim} {}^{\mathfrak{a}}\underset{i \in I}{\mathsf{S}}\, (g_i, \mathfrak{b}_i)$. Andererseits, behaupten wir, ist $M \in \mathscr{H}\left(\underset{i \in I}{\mathsf{S}}\, g_i\right)\left(\mathscr{G}\, {}^{\mathfrak{a}}\underset{i \in I}{\mathsf{S}}\, \mathfrak{b}_i\right)$, folglich nach Satz 13 $x \in \tau M$. Es gibt nämlich zu jedem $c \in C$ nach Auswahl der $(g_i, \mathfrak{b}_i)$ eine Menge $D_c \in \mathscr{G}\mathfrak{b}_c$ mit $g_c(D_c) \subseteq M$; die direkte Summe $\underset{c \in C}{\mathsf{S}}\, D_c$ dieser Mengen (Auswahlaxiom!) gehört dann wegen $C \in \mathscr{G}\mathfrak{a}$ zu ${}^{\mathscr{G}\mathfrak{a}}\underset{i \in I}{\mathsf{S}}\, \mathscr{G}\mathfrak{b}_i$, auf Grund der Verzahnungsinvarianz der gestapelten Summe (Satz 16, I) also zu $\mathscr{G}\, {}^{\mathfrak{a}}\underset{i \in I}{\mathsf{S}}\, \mathfrak{b}_i$. Hieraus und aus $\left(\underset{i \in I}{\mathsf{S}}\, g_i\right)\left(\underset{c \in C}{\mathsf{S}}\, D_c\right) \subseteq M$ folgt die letzte Behauptung. (a) ist somit (vgl. (τ1)) zur Idempotenz von τ auch hinreichend.

Ersetzt man in diesem Teil 2 des Beweises konsequent „gefiltert" durch „gerastert", so erhält man den Nachweis dafür, daß die Bedingung (a'') für die Idempotenz von τ hinreichend ist (übrigens ist erst recht (a') hinreichend).

[34]) Durch den Verzicht auf Benutzung von Satz 14 erreichen wir, daß der Beweis für gestapelte anstelle gefilterter Familien gültig bleibt.

Da (a″), wie am Schluß von Teil 1 des Beweises bemerkt, mit (b) äquivalent ist, ist hiermit auch gezeigt, daß (b) zur Idempotenz von τ hinreicht. Damit ist Satz 19 bewiesen, nach der (Satz 14 nicht benutzenden!) Beweisführung auch für gestapelte und gerasterte anstelle gefilterter Familien.

Die Aussage (a) in Satz 19 wollen wir mit Kelley[35]) den *Satz vom iterierten Limes*, die Aussage (b) entsprechend den *Satz von der iterierten Adhärenz* nennen. Eine Prätopologie ist also genau dann idempotent, wenn für den zugehörigen Limes- bzw. Adhärenzoperator der Satz vom iterierten Limes bzw. von der iterierten Adhärenz gilt.

Falls nichts anderes vereinbart wird, sei im folgenden (§ 3 und § 4) $(K_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie nichtleerer Mengen K_i, $\mathfrak{a}$ ein Filter über I, zu jedem i $\mathfrak{b}_i$ ein Filter über K_i. g sei in der Regel eine (eindeutige) Abbildung von $\underset{i \in I}{\mathsf{S}} K_i$ in E, anders ausgedrückt: eine Doppelfamilie über E.

Dadurch, daß in Hausdorffschen Räumen bekanntlich der Limes $\mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a})$ jeder gefilterten Punktfamilie $(f, \mathfrak{a})$, genauer $(f, I, \mathfrak{a})$, höchstens einelementig ist — man schreibt dann statt $x \in \mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a})$ meist $x = \lim(f, \mathfrak{a})$, $x = \lim_{\mathfrak{a}} f(i)_{i \in I}$ und spricht von der Existenz von $\lim(f, \mathfrak{a})$, falls $\mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a})$ nichtleer ist (faßt also „lim" als Operation auf, vgl. § 7) —, läßt sich dort zunächst der Begriff des iterierten Limes wie folgt präzisieren: Existiert der $\lim(g(i, .), \mathfrak{b}_i)$ zu jedem $i \in I$ (vgl. § 2) und existiert $\lim(f, \mathfrak{a}) = x$, unter f die Abbildung $i \to \lim(g(i, .), \mathfrak{b}_i)$ mit $i \in I$ verstanden, so sagen wir, x sei *iterierter Limes*[36]) *der Doppelfamilie g bezüglich $\mathfrak{a}$ und der $\mathfrak{b}_i$* und schreiben hierfür

$$x = \lim_{\mathfrak{a}} \lim_{\mathfrak{b}_i} g(i, k)_{(i,k) \in \mathsf{S} K_i},$$

kürzer

$$x = \lim_{\mathfrak{a}} \lim_{\mathfrak{b}_i} g(i, k).$$

Im Spezialfall, daß $K_i = K$ und $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}$ zu jedem i,

$$x = \lim_{\mathfrak{a}} \lim_{\mathfrak{b}} g(i, k)_{(i,k) \in I \times K},$$

kürzer

$$x = \lim_{\mathfrak{a}} \lim_{\mathfrak{b}} g(i, k),$$

spricht man vom iterierten Limes *bezüglich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$*. Damit erhält der Satz vom iterierten Limes folgende einprägsame Gestalt:

---

[35]) Kelley [12], S. 279, und [13], S. 69: "Theorem on iterated limits".

[36]) Gebräuchlich ist auch „Doppellimes" (Bourbaki [3], S. 69: »double limite«) und „zweifacher Limes". Genauer ist zu unterscheiden zwischen dem hier vorliegenden „sukzessiven" und dem „simultanen" Doppellimes, der von Haupt-Aumann-Pauc [11], S. 131, „totaler Limes" genannt wird. — Den iterierten bzw. totalen Limes nennen: bei Doppelfolgen Pringsheim „iterierten Limes" ([23], S. 302) bzw. „Doppellimes, Limes" ([23], S. 291), London „sukzessiven Grenzwert" (implizit in [17], S. 323) bzw. „Grenzwert" ([17], S. 324); bei Moore-Smith-Doppelfolgen Moore-Smith "iterated double limit" bzw. "simultaneous double limit" ([18], S. 115); siehe auch Kelley [12] und [13], loc. cit.

Korollar 1. *τ sei eine Hausdorffsche Topologie. Existiert dann* $\lim\limits_{a} \lim\limits_{b_i} g(i, k) = x$, *so auch* $\lim\limits_{a \Sigma b_i} g(i, k) = y$, *und es ist* $x = y$.

In regulären Topologien läßt sich dieses Korollar, wie wir in § 4 sehen werden, umkehren. Hier kann man aus ihm zunächst eine analoge Aussage über punktweise Konvergenz gewinnen. Es sei $(E_d, \tau_d)_{d \in D}$ eine Familie Hausdorffscher Räume. Ist dann $(f_i)_{i \in I, a}$ eine gefilterte Punktfamilie über dem (abstrakten, unstrukturierten) cartesischen Produkt $\mathsf{P}_{d \in D} E_d$ der Mengen E_d ($f_i \in \mathsf{P}\, E_d$) und ist $g \in \mathsf{P}\, E_d$, so nennt man g den Limes von $(f_i)_{i \in I, a}$, $g = \lim\limits_{a} f_i$, wenn zu jedem $d \in D$ $\lim\limits_{a} f_i(d)$ existiert und $g(d) = \lim\limits_{a} f_i(d)$ ist; man spricht von *punktweiser Konvergenz*[37]). Es darf dem Leser überlassen werden, den Begriff des iterierten Limes auch für punktweise Konvergenz auszusprechen. $(i, k) \to g_{ik}$ sei im folgenden (§ 3 und § 4) in der Regel eine (eindeutige) Abbildung von $\mathsf{S}\, K_i$ in die Menge $\mathsf{P}\, E_d$, also eine Doppelfamilie über $\mathsf{P}\, E_d$. Damit hat man nun, ohne den Begriff der Produkttopologie eingeführt zu haben, als unmittelbare Folgerung von Korollar 1,

Korollar 2. *Jedes τ_d ($d \in D$) sei eine Hausdorffsche Topologie. Existiert dann* $\lim\limits_{a} \lim\limits_{b_i} g_{ik} = r$, *so auch* $\lim\limits_{a \Sigma b_i} g_{ik} = s$, *und es ist* $r = s$.

Geht man von der (hier Hausdorffschen) Produkttopologie von $\mathsf{P}\, E_d$ im üblichen Sinn[38]) aus, so erscheint Korollar 2 als Deutung des Korollars 1 im topologisierten Raume $\mathsf{P}\, E_d$. Umgekehrt kann man, ausgehend von der punktweisen Konvergenz gefilterter Punktfamilien über der (abstrakten) Menge $\mathsf{P}\, E_d$, in naheliegender Weise (vgl. Satz 14 (a)) in $\mathsf{P}\, E_d$ eine Prätopologie einführen, die auf Grund von Korollar 2 idempotent ist und übrigens mit der üblichen (hier Hausdorffschen) Produkttopologie übereinstimmt. Auf die Durchführung wollen wir hier jedoch verzichten, da sie sich natürlicher in eine Theorie der Limesräume, die in einer späteren Arbeit behandelt werden soll, einordnet.

Wir begnügen uns damit, eine unmittelbare Anwendung von Korollar 2 hier zu besprechen. Dazu erinnern wir an eine bekannte Definition: Sei $M \subseteq \mathsf{P}\, E_d$. $\sigma^1 M$ sei die Menge aller $g \in \mathsf{P}\, E_d$ mit der Eigenschaft, daß es zu g eine Folge $g_1, g_2, \ldots$ mit $g_i \in M$ zu jedem $i = 1, 2, \ldots$ und mit $\lim\limits_{i \to \infty} g_i = g$ (punktweise Konvergenz) gibt. Ist α eine Ordinalzahl mit $1 < \alpha < \omega_1$ und ist zu jedem β mit $0 < \beta < \alpha$ schon $\sigma^\beta M$ definiert, so sei $\sigma^\alpha M = \sigma^1\Big(\bigcup\limits_{0 < \beta < \alpha} \sigma^\beta M\Big)$. Die Elemente von $\sigma^B M = \bigcup\limits_{0 < \alpha < \omega_1} \sigma^\alpha M$ nennt man *Bairesche Funktionen zur*

---

[37]) Für Moore-Smith-Folgen etwa bei KELLEY [13], S. 91f., dort bei vorgegebener Produkttopologie. Vgl. BOURBAKI [3], S. 63, corollaire 1.

[38]) BOURBAKI [3], S. 61. Nach BOURBAKI [3], S. 67 (proposition 7), ist hier die Produkttopologie Hausdorffsch.

Funktionenmenge M[39]). (Es ist hier ohne Belang, daß jedes σ^α eine Prätopologie, σ^B eine Topologie von $\mathsf{P}\, E_d$ ist.) Eine in der Literatur unseres Wissens wenig beachtete Tatsache, die aber auf Grund von Satz 14 unmittelbar mit Hilfe der Bourbakischen Produkttopologie gewonnen werden kann[40]), beruht in

Korollar 3. *Ist f eine Bairesche Funktion zur Funktionenmenge $M \subseteq \mathsf{P}\, E_d$, so existiert eine gefilterte Funktionenfamilie $(f_i)_{i \in I, \mathfrak{a}}$ mit $f_i \in M$ für alle $i \in I$ derart, daß $f = \lim\limits_{\mathfrak{a}} f_i$.*

Beweis. Etwa sei $g \in \sigma^\alpha M$ mit $0 < \alpha < \omega_1$. Für $\alpha = 1$ folgt die Behauptung aus der Definition von $\sigma^1 M$; es sei $\alpha > 1$ und die Behauptung bewiesen für alle $f \in \sigma^\beta M$ und alle β mit $0 < \beta < \alpha$. Zu g gibt es per definitionem eine Folge $g_1, g_2, \ldots$ mit $g_i \in \bigcup\limits_{0<\beta<\alpha} \sigma^\beta M$ (zu jedem $i = 1, 2, \ldots$) und $g = \lim\limits_{\mathfrak{a}} g_i$, wenn man mit $\mathfrak{a}$ den Fréchetfilter (über der Menge I der natürlichen Zahlen) bezeichnet. Laut Induktionsvoraussetzung gibt es zu jedem $i \in I$ eine gefilterte Familie $(g_{ik})_{k \in K_i, \mathfrak{b}_i}$ mit $g_{ik} \in M$ (für alle $k \in K_i$) und $g_i = \lim\limits_{\mathfrak{b}_i} (g_{ik})_{k \in K_i}$. Man hat also (Auswahlaxiom!) $g = \lim\limits_{\mathfrak{a}} \lim\limits_{\mathfrak{b}_i} g_{ik}$, folglich nach Korollar 2 $g = \lim\limits_{^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i} g_{ik}$, woraus die Behauptung folgt.

Der Beweis von Korollar 3 liefert, über dessen Existenzaussage hinaus, im Hinblick auf Satz 13, I (von der Basiskonstruktion der gefilterten Summe) ein konstruktives Induktionsverfahren zur Herstellung der die Funktion f approximierenden Funktionenfamilie $(f_i)_{i \in I, \mathfrak{a}}$[41]).

Nach diesem Anwendungsbeispiel zu Korollar 2 kehren wir zu unseren allgemeineren Betrachtungen zurück, setzen jetzt aber zu jedem $i \in I$ $K_i = K$ (fest) und $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}$ (fest). Die Doppelfamilie $(g, \mathsf{S}\, K_i)$ bzw. $(g_{ik})_{(i,k) \in \mathsf{S} K_i}$ geht dabei in $(g, I \times K)$ bzw. $(g_{ik})_{(i,k) \in I \times K}$, die gefilterte Summe $^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ per definitionem in das ordinale Produkt $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ über. Als Spezialfall von Korollar 1 bzw. 2 erhält man so nachstehendes Korollar 4 bzw. 5.

Korollar 4. *τ sei eine Hausdorffsche Topologie. Existiert dann $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \lim\limits_{\mathfrak{b}} g(i, k) = x$, so auch $\lim\limits_{\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}} g(i, k) = y$, und es ist $x = y$*[42]).

Korollar 5. *Jedes τ_d $(d \in D)$ sei eine Hausdorffsche Topologie. Existiert dann $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \lim\limits_{\mathfrak{b}} g_{ik} = r$, so auch $\lim\limits_{\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}} g_{ik} = s$; und es ist $r = s$.*

Die Korollare 4 und 5 sind für die Anwendung besonders geeignet; wir beschränken uns auf die Besprechung weniger

---

[39]) Vgl. etwa HAHN [10], S. 318, NÖBELING [19], S. 132 (dort σ^α als Beispiel einer „mehrstufigen Topologie"), AUMANN [1], S. 166. Gewöhnlich setzt man $(E_d, \tau_d) = (E, \tau)$ (fest) zu jedem $d \in D$.

[40]) Denn die Topologie σ^B ist feiner als die Bourbakische Produkttopologie.

[41]) Vgl. Beispiel 4 zu Korollar 5.

[42]) Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die Diskussion 2-facher Limites. Die Korollare 4 und 5 lassen sich induktiv auf n-fache Limites, die zu erklären wir dem Leser überlassen dürfen, übertragen; an die Stelle des ordinalen Produkts zweier Filter tritt das von n Filtern ($n \geq 3$).

Beispiele. 1. Im Korollar 4 sei $I = K$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, I die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathfrak{a}$ der Fréchet-Filter (vgl. Beispiel 3 in § 5, I). Ist h eine (eindeutige) Abbildung von I in E, so ist bekanntlich $x = \lim_{i\to\infty} h(i)$ mit $x = \lim_{\mathfrak{a}} h(i)$ gleichbedeutend. Existiert $\lim_{i\to\infty} \lim_{k\to\infty} g(i, k)$, so nach Korollar 4 auch $\lim_{\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}} g(i, k)$, und es ist

$$\lim_{i\to\infty} \lim_{k\to\infty} g(i, k) = \lim_{\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}} g(i, k)\,.$$

Wie in vielen anderen nicht in diese Arbeit gehörenden Überlegungen, so spiegelt sich auch in diesem einfachen Beispiel eine innere Notwendigkeit wider, den Filterbegriff überhaupt einzuführen: ist doch bekanntlich im Bereich der gewöhnlichen Folgen die Aufgabe, aus dem iterierten Limes einer Doppelfolge $(g, I \times I)$ unter Benutzung aller ihrer Glieder $g(i, k)$ — durch eine neue Indizierung — einen einfachen, nicht iterierten, Limes herzustellen, — von trivialen Ausnahmefällen abgesehen — unlösbar.

2. Im Korollar 4 sei $I = K$ und I die Menge der reellen Zahlen einschließlich $+\infty$ und $-\infty$. Zu jedem $j \in I$ sei $\mathfrak{a}(j)$ der vom System aller reduzierten Umgebungen von j[43]) erzeugte Filter über I. Ist h eine (eindeutige) Abbildung von I in E, so ist $x = \lim_{i\to j} h(i)$ mit $x = \lim_{\mathfrak{a}(j)} h(i)$ gleichbedeutend ($i \in I$). Außer der festen Zahl j sei die feste Zahl $m \in I$ gegeben. Existiert der iterierte Limes $\lim_{i\to j} \lim_{k\to m} g(i, k)$, so nach Korollar 4 auch $\lim_{\mathfrak{a}(j)\otimes\mathfrak{a}(m)} g(i, k)$, und es ist

$$\lim_{i\to j} \lim_{k\to m} g(i, k) = \lim_{\mathfrak{a}(j)\otimes\mathfrak{a}(m)} g(i, k)\,.$$

3. Die Beispiele 1 und 2 lassen sich, indem man „Konvergenz" durch „punktweise Konvergenz" ersetzt, zu Beispielen zum Korollar 5 abwandeln.

4. Als Anwendung des so modifizierten Beispiels 1 hat man dann: Ist f eine Bairesche Funktion höchstens zweiter Klasse zur Funktionenmenge $M \subseteq \mathsf{P}\, E_d$, d. h. $f \in \sigma^2 M$, so läßt sich f darstellen als

$$f = \lim_{\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}} (f_{ik})_{(i,k)\in I\times I} \quad \text{mit} \quad f_{ik} \in M$$

für alle $(i, k) \in I \times I$, der Menge I der natürlichen Zahlen und dem Fréchet-Filter $\mathfrak{a}$[44]).

Nach diesen Deutungen des Satzes 19 (a) in speziellen Räumen kehren wir zum allgemeinen Fall beliebiger Prätopologien τ zurück! Zunächst liefert Satz 19 — mit den Vereinbarungen vor Korollar 4 — unmittelbar ein weiteres, übrigens Korollar 4 umfassendes Korollar.

---

[43]) Terminologie von Haupt-Aumann-Pauc [11], S. 71: Ist U Umgebung von j, so heißt $U - \{j\}$ reduzierte Umgebung von j.

[44]) Dies läßt sich auf Bairesche Funktionen höchstens n-ter Klasse ($n = 3, 4, \ldots$), ja — wie Verf. in einer späteren Note zeigen wird — auf Bairesche Funktionen beliebiger Klassen übertragen (vgl. Fußnote 42).

Korollar 6. *τ sei idempotent. Ist dann f eine (eindeutige) Abbildung von I in E, so gilt*

mit $f(i) \in \mathrm{Lim}(g(i,.), \mathfrak{b})$ *für alle* $i \in I$

allemal auch $\mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Lim}(g, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b})$.

Ob sich diese Aussage zur Kennzeichnung der idempotenten Prätopologien verschärfen läßt, bleibt hier als Problem offen. Interessant ist, daß dies für den Adhärenzoperator anstelle des Limesoperators sehr wohl der Fall ist:

Satz 20. *Die Prätopologie τ ist genau dann idempotent, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

(a) *Ist $(g, I \times K)$ eine Doppelfamilie über E, $\mathfrak{a}$ ein Filter über I, $\mathfrak{b}$ ein Filter über K und f eine (eindeutige) Abbildung von I in E, so gilt*

mit $f(i) \in \mathrm{Adh}(g(i,.), \mathfrak{b})$ *für alle* $i \in I$

allemal auch $\mathrm{Adh}(f, \mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Adh}(g, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b})$.

Beweis. Daß (a) zur Idempotenz von τ notwendig ist, folgt aus Satz 19. Umgekehrt gelte (a), und es sei $M \subseteq E$. Da nach dem Axiom ($\tau 0$) aus § 1 $\tau O = O$, also $\tau^2 O = O$ ist, hat man für $M = O$ nichts zu beweisen; sei $M \neq O$. Für die gefilterte Menge $(M, \{M\})$ — eine spezielle gefilterte Punktfamilie — gilt $\mathrm{Adh}(M, \{M\}) = \tau M$. Da τ extensional ist (Axiom ($\tau 1$)), ist mit M auch τM nichtleer. Analog zum Vorigen gilt $\mathrm{Adh}(\tau M, \{\tau M\}) = \tau^2 M$. Setzt man $\tau M = I$, $\{\tau M\} = \mathfrak{a}$, $M = K$, $\{M\} = \mathfrak{b}$, ferner zu jedem $i \in I$ $f(i) = i$ und zu jedem $(i, k) \in I \times K$ $g(i, k) = k$, so hat man nach (a) $\tau^2 M = \mathrm{Adh}(f, \mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Adh}(g, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) = \mathrm{Adh}\,\mathscr{H}\mathfrak{b} = \tau M$, wenn $\mathscr{H}\mathfrak{b}$ die aufsteigende Hülle von $\mathfrak{b}$ über E ist. Hiernach (vgl. ($\tau 1$)) ist τ idempotent.

Die besprochenen Anwendungen des ordinalen Produkts von Filtern legen nahe, nach Anwendungen des kardinalen Produkts zu fragen: entsprechend, wie wir in § 5, I die beiden Produktbildungen miteinander verglichen, wollen wir hier Grenzübergänge bezüglich des einen mit solchen bezüglich des anderen Produkts miteinander in Beziehung bringen.

$(g, I \times K)$ sei eine Doppelfamilie über E, $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Stapel über I, $\mathfrak{b}$ ein beliebiger Stapel über K. Auf Grund der Sätze 25, I, 9 und 10 hat man

Satz 21. $\mathrm{Lim}(g, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{Lim}(g, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b})$,

$\mathrm{Adh}(g, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{Adh}(g, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$.

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Filter, so gilt

$\mathrm{Lim}(g, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{Lim}(g, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{Adh}(g, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{Adh}(g, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$.

Nennt man in Hausdorffschen Räumen und für Filter $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit HAUPT-AUMANN-PAUC $\lim(g, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ den *totalen*[45]) oder, wie unsere Terminologie in § 5, I nahelegt, *kardinalen*, entsprechend $\lim(g, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b})$ den *ordinalen Limes der Doppelfamilie g bezüglich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$*, ferner mit HAUPT-AUMANN-PAUC $\lim(g(i,.), \mathfrak{b})$ den *zu i gehörigen partiellen Limes*[46]) von g *bezüglich* $\mathfrak{b}$ $(i \in I)$,

[45]) HAUPT-AUMANN-PAUC [11], S. 131, dort ohne den Filterbegriff. Allgemein bei BOURBAKI [3], S. 69. Siehe Fußnote 36.

[46]) HAUPT-AUMANN-PAUC [11], S. 132, dort ohne den Filterbegriff. Siehe Bemerkung nach Korollar 6 zu Satz 23.

so hat man nach Korollar 4 zu Satz 19 und nach Satz 21: *Aus der Existenz des iterierten darf man auf die Existenz des ordinalen Limes schließen, aus der Existenz des kardinalen auf die des ordinalen Limes.*

Obwohl das kardinale Produkt von Filtern seit geraumer Zeit bekannt ist, findet man in der Literatur unseres Wissens keine Bemerkung darüber, daß sich die idempotenten Prätopologien — analog zu Satz 20 — auch mit Hilfe des kardinalen Produkts kennzeichnen lassen:

Satz 22. *Die Prätopologie τ ist genau dann idempotent, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

(a) *Ist $(g, I \times K)$ eine Doppelfamilie über E, $\mathfrak{a}$ ein Filter über I, $\mathfrak{b}$ ein Filter über K und f eine (eindeutige) Abbildung von I in E, so gilt*

mit $f(i) \in \mathrm{Adh}(g(i,.), \mathfrak{b})$ *für alle* $i \in I$

allemal auch $\mathrm{Adh}(f, \mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Adh}(g, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$.

Beweis. Daß (a) für die Idempotenz von τ notwendig ist, folgt aus den Sätzen 20 und 21. Daß (a) auch hinreichend ist, zeigt man wörtlich wie die entsprechende Behauptung für (a) von Satz 20. Bei der speziellen Wahl von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ im Beweis von Satz 20 ist nämlich $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$.

Allerdings läßt sich das Korollar 6 zu Satz 19, wie einfache Beispiele in sehr speziellen Topologien[47]) zeigen, nicht auf das kardinale Produkt übertragen. Übrigens scheint uns dies daran zu liegen, daß das kardinale Produkt von Stapeln nicht verzahnungsinvariant ist (vgl. § 5, I). Satz 22 bleibt nämlich, wie man durch Prüfung des Beweises (wie des Beweises von Satz 19) sieht, erhalten, wenn man in (a) beliebige Stapel $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ über I und K zuläßt. Wäre das kardinale Produkt verzahnungsinvariant, so wäre die für Stapel anstelle Filtern ausgesprochene Bedingung (a) des Satzes 22, die wir etwa mit (a′) bezeichnen, äquivalent mit einer Bedingung (a″), die aus (a′) durch Ersetzung von Adh durch Lim hervorgeht. (a″) würde in idempotenten Prätopologien insbesondere für Filter $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ über I und K gelten, im Widerspruch zu dem Gesagten. (Damit ist ein neuer Beweis dafür erbracht, daß das kardinale Produkt von Stapeln nicht verzahnungsinvariant ist.)

Es sei bemerkt, daß sich die Bedingungen in den Sätzen 19 und 20 — ohne dabei die Gültigkeit der Sätze zu stören — auch für gestapelte anstelle gefilterter Familien aussprechen lassen, die Bedingungen in Satz 19 auch für gerasterte Familien. Satz 20 bleibt ferner erhalten, wenn man ihn für gestapelte Familien ausspricht und gleichzeitig Adh durch Lim ersetzt. Schließlich gilt Satz 20 bei Ersetzung von Adh durch Lim auch für gerasterte anstelle gefilterter Familien. — Die Bemerkungen über Satz 19 wurden oben schon mitbewiesen. Was Satz 20 angeht, so bleibt sein Beweis für gestapelte anstelle gefilterter Familien gültig; die Dualisierung des Satzes stützt sich auf die Sätze 3, I, 8 und 18.

---

47) Etwa bei Haupt-Aumann-Pauc [11], S. 132.

§ 4. Kennzeichnung der regulären Topologien mit Hilfe gefilterter Punktfamilien

Es sei τ nun insbesondere eine Topologie der Menge E, $\mathfrak{V}$ weiterhin der zu τ gehörige Umgebungsoperator. Um eine bequeme Ausdrucksweise zu haben, nennen wir hier τ eine *T_3-Topologie*[48]), wenn folgendes bekannte Trennungsaxiom erfüllt ist:

(T_3) Zu jedem $x \in E$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq E$ mit $x \notin A$ gibt es zueinander fremde Umgebungen V von x und W von A.

Dabei pflegt man jede Menge $W \subseteq E$ mit $M \subseteq \mathfrak{V}^{-1} W$ eine Umgebung der (beliebigen) Menge $M \subseteq E$ zu nennen. Bekanntlich ist τ genau dann eine T_3-Topologie, wenn zu jedem $x \in E$ das System aller abgeschlossenen Mengen von $\mathfrak{V}x$ eine Basis des Filters $\mathfrak{V}x$ ist. Jede Hausdorffsche Topologie, die auch T_3-Topologie ist, nennt man *regulär*[49]).

T_3-Topologien lassen sich durch eine Bedingung kennzeichnen, die eine Abwandlung, in gewissem Sinne eine Umkehrung ist der Bedingung (a) in Satz 19:

Satz 23. *Dafür, daß die Topologie τ eine T_3-Topologie sei, ist folgende Bedingung* (a) *notwendig und hinreichend, folgende Bedingung* (b) *hinreichend.*

(a) *Ist $(f, I, \mathfrak{a})$ eine gefilterte Familie über E und zu jedem $i \in I$ $(g_i, \mathfrak{b}_i)$ eine gefilterte Familie über E, so gilt*

mit $\quad f(i) \in \operatorname{Lim}(g_i, \mathfrak{b}_i)$ *für alle* $i \in I$

allemal auch $\quad \operatorname{Lim} {}^{\mathfrak{a}}\underset{i\in I}{\mathsf{S}} (g_i, \mathfrak{b}_i) \subseteq \operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a})$.

(b) *laute wie* (a) *mit* „Adh“ *anstelle* „Lim“.

Beweis. τ sei eine T_3-Topologie. $(f, I, \mathfrak{a})$ und $(g_i, \mathfrak{b}_i)$ (zu jedem $i \in I$) seien gefilterte Familien über E, und es gelte $f(i) \in \operatorname{Lim}(g_i, \mathfrak{b}_i)$ für alle $i \in I$. Es sei $x \in \operatorname{Lim} {}^{\mathfrak{a}}\underset{i\in I}{\mathsf{S}} (g_i, \mathfrak{b}_i)$ und $V \in \mathfrak{V}x$. Da τ T_3-Topologie ist, gibt es eine abgeschlossene Menge $W \in \mathfrak{V}x$ mit $W \subseteq V$. Nach Wahl von x gibt es auf Grund von Satz 12 zur Menge W eine Menge $M \in {}^{\mathfrak{a}}\underset{i\in I}{\mathsf{S}}\, \mathfrak{b}_i$ mit $\left(\underset{i\in I}{\mathsf{S}}\, g_i\right)(M) \subseteq W$ (vgl. § 2). Zu M gibt es nach Definition der gefilterten Summe von Filtern eine Menge $A \in \mathfrak{a}$ mit $q_a M \in \mathfrak{b}_a$ für alle $a \in A$ (q_a sei der zu a gehörige eingeschränkte zweite Projektionsoperator, vgl. § 2, I und § 4, I). Sei $a \in A$. Einerseits gilt dann nach Satz 4, I, da $\mathfrak{b}_a$ ein Filter ist, mit $q_a M \in \mathfrak{b}_a$ auch $q_a M \in \mathscr{G}\mathfrak{b}_a$. Andererseits hat man wegen $\{a\} \times q_a M \subseteq M$ und $(\mathsf{S}\, g_i)(M) \subseteq W$ die Inklusion $g_a(q_a M) \subseteq W$. Aus diesen beiden Aussagen folgt nach Satz 13 $f(a) \in W$, da $f(a) \in \operatorname{Lim}(g_a, \mathfrak{b}_a)$ — laut Voraussetzung — und W abgeschlossen ist. Dies gilt zu jedem $a \in A$, folglich hat man $f(A) \subseteq W \subseteq V$, nach Wahl von V somit $x \in \operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a})$. (a) ist also dafür, da τ eine T_3-Topologie sei, notwendig.

Umgekehrt sei die Topologie τ keine T_3-Topologie. Dann gibt es ein $x \in E$ und eine abgeschlossene Menge $C \subseteq E$ mit $x \notin C$ derart, daß zu jedem $V \in \mathfrak{V}x$

[48]) KELLEY [13], S. 113, sagt „reguläre Topologie“ und verwendet „T_3-Topologie“ in anderem Sinn.

[49]) BOURBAKI [3], S. 55, définition 5.

die Mengen τV und C miteinander verzahnt sind (vgl. § 1, I). Andernfalls wäre nämlich (T_3) nicht erfüllt (Komplementbildung innerhalb der Menge E!). Wir setzen $\mathfrak{B}x = I$. Zu jedem $i \in I$ sei ein Element von $\tau i \cap C$ ausgewählt und mit $f(i)$ bezeichnet (Auswahlaxiom!). Wegen $f(i) \in \tau i$ gibt es nach Satz 14 zu jedem $i \in I$ eine gefilterte Familie $(g_i, K_i, \mathfrak{b}_i)$ mit

$$(1) \qquad g_i(K_i) \subseteq i \quad \text{und} \quad f(i) \in \operatorname{Lim}(g_i, \mathfrak{b}_i);$$

jedem $i \in I$ ordnen wir eine solche zu (Auswahlaxiom!). In der dual mengentheoretisch gerichteten Menge I (für $i', i'' \in I$ bedeute $i' \leqq i''$ dasselbe wie $i'' \subseteq i'$) sei $\mathfrak{a}$ der Perfinalitätsfilter (vgl. § 5, I, Beispiel 2). Sei $j \in I$. Das Hauptende $[j, \rightarrow[$ in der gerichteten Menge I wollen wir mit A bezeichnen. Nach (1) gilt dann zu jedem $a \in A$, d. h. zu jedem $a \in I$ mit $a \geqq j$, die Inklusion $g_a(K_a) \subseteq a$, wegen $a \subseteq j$ folglich $\left(\underset{i \in I}{\mathrm{S}}\, g_i\right)(\{a\} \times K_a) \subseteq j$ (vgl. § 2), also $\left(\underset{i \in I}{\mathrm{S}}\, g_i\right)\left(\underset{a \in A}{\mathrm{S}}\, K_a\right) \subseteq j$ (vgl. § 2, I). Da die Umgebung j von x beliebig in I gewählt wurde und, wegen $A \in \mathfrak{a}$ und $K_a \in \mathfrak{b}_a$, die Menge $\underset{a \in A}{\mathrm{S}}\, K_a$ zu $\underset{i \in I}{{}^{\mathfrak{a}}\mathrm{S}}\, \mathfrak{b}_i$ gehört, hat man nach Satz 12 $x \in \operatorname{Lim} \underset{i \in I}{{}^{\mathfrak{a}}\mathrm{S}}\, (g_i, \mathfrak{b}_i)$ (vgl. § 2). Es gilt aber nicht $x \in \operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a})$, da sonst nach Satz 14, wegen $f(I) \subseteq C = \tau C$, $x \in C$ wäre, im Widerspruch zur Auswahl von x und C. Für die gefilterten Familien $(f, I, \mathfrak{a})$ und $(g_i, \mathfrak{b}_i)$ $(i \in I)$ gilt also wegen (1) die Aussage (a) nicht; die Bedingung (a) ist somit dafür, daß τ eine T_3-Topologie sei, hinreichend.

Ersetzt man im vorstehenden Absatz den Limesoperator „Lim" überall durch den Adhärenzoperator „Adh" und fügt man hinter die Worte „die Menge $\underset{a \in A}{\mathrm{S}}\, K_a$ zu $\underset{i \in I}{{}^{\mathfrak{a}}\mathrm{S}}\, \mathfrak{b}_i$" ein „nach Satz 4, I also zu $\mathcal{G} \underset{i \in I}{{}^{\mathfrak{a}}\mathrm{S}}\, \mathfrak{b}_i$", so erhält man den Beweis dafür, daß (b) — anstelle (a) — für die T_3-Eigenschaft von τ hinreichend ist. Damit ist Satz 23 bewiesen.

Wir bemerken zunächst, daß man auf Grund von Satz 19 im vorstehenden Satz die Inklusion $\subseteq$ auch durch das Gleichheitszeichen ersetzen darf. Die Bedingung (a) von Satz 23 wollen wir als die *Umkehrung des Satzes vom iterierten Limes*, der Bedingung (a) von Satz 19, bezeichnen (vgl. Einleitung zu I). Daß die Bedingung (b) von Satz 23, die *Umkehrung des Satzes von der iterierten Adhärenz*, der Bedingung (b) von Satz 19, in T_3-Topologien nicht notwendig erfüllt ist, zeigt folgendes

Beispiel. E sei die in der üblichen Weise topologisierte euklidische Ebene E_2. Für $i = 1, 2, \ldots$ und $k = 1, 2, \ldots$ sei $g(i, k)$ der Ursprung $(0, 0)$ des Koordinatensystems, falls k gerade ist, der Punkt $\left(1, \frac{1}{i}\right) = f(i)$, falls k ungerade ist. I sei die Menge der natürlichen Zahlen, G die Menge der geraden unter ihnen; $\mathfrak{a}$ sei der Fréchet-Filter. Die Menge $I \times G$ stammt aus $\mathcal{G}\mathfrak{a} \otimes \mathcal{G}\mathfrak{a}$, nach Satz 24, I also aus $\mathcal{G}(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$ (vgl. Beispiele 3 und 5 von § 5, I). Ist V eine Umgebung von $(0, 0)$, so gilt für alle $(i, k) \in I \times G$ $g(i, k) = (0, 0) \in V$, man hat also $(0, 0) \in \operatorname{Adh}(g, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$. Ferner gilt zu jedem $i \in I$ $f(i) \in \operatorname{Adh}(g(i, .), I, \mathfrak{a})$. Obwohl E regulär ist, gilt aber nicht $(0, 0) \in \operatorname{Adh}(f, \mathfrak{a})$.

In Hausdorffschen Topologien läßt sich nun die Kennzeichnung in Satz 23 wie folgt in der konventionellen lim-Schreibweise formulieren; damit hat man dann, als Verschärfung des Korollars 1 zu Satz 19, eine Kennzeichnung der regulären unter den Hausdorffschen Räumen.

Korollar 1. *Die Hausdorffsche Topologie τ ist genau dann regulär, wenn folgende Bedingung* (a) *erfüllt ist.*

(a) *Ist* $\left(g, \mathop{\mathsf{S}}_{i\in I} K_i\right)$ *eine Doppelfamilie über E, $\mathfrak{a}$ ein Filter über I, $\mathfrak{b}_i$ ein Filter über K_i $(i \in I)$ und existiert zu jedem $i \in I$ $\lim\limits_{\mathfrak{b}_i} g(i, k)_{k\in K_i}$, so existiert $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \lim\limits_{\mathfrak{b}_i} g(i, k) = x$ genau dann, wenn $\lim\limits_{\mathfrak{a}\mathsf{S}\mathfrak{b}_i} g(i, k) = y$ existiert, und im Falle der Existenz ist $x = y$.*

Daraus gewinnt man, als Verschärfungen der Korollare 2, 4 und 5 zu Satz 19 (in den dort verwendeten Bezeichnungen), die nachstehenden Korollare 2, 3 und 4.

Korollar 2. *Jedes τ_d $(d \in D)$ sei eine reguläre Topologie. Existiert dann zu jedem $i \in I$ $\lim\limits_{\mathfrak{b}_i} (g_{ik})_{k\in K_i}$, so existiert $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \lim\limits_{\mathfrak{b}_i} g_{ik} = r$ genau dann, wenn $\lim\limits_{\mathfrak{a}\mathsf{S}\mathfrak{b}_i} g_{ik} = s$ existiert, und im Falle der Existenz ist $r = s$*[50]).

Korollar 3. *τ sei eine reguläre Topologie. Existiert dann zu jedem $i \in I$ $\lim\limits_{\mathfrak{b}} g(i, k)_{k\in K}$, so existiert $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \lim\limits_{\mathfrak{b}} g(i, k) = x$ genau dann, wenn $\lim\limits_{\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{b}} g(i,k) = y$ existiert, und im Falle der Existenz ist $x = y$.*

Korollar 4. *Jedes τ_d $(d \in D)$ sei eine reguläre Topologie. Existiert dann zu jedem $i \in I$ $\lim\limits_{\mathfrak{b}} (g_{ik})_{k\in K}$, so existiert $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \lim\limits_{\mathfrak{b}} g_{ik} = r$ genau dann, wenn $\lim\limits_{\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{b}} g_{ik} = s$ existiert, und im Falle der Existenz ist $r = s$.*

Entsprechend wie die Korollare 4 und 5 von Satz 19 in die jetzigen Korollare 3 und 4 lassen sich auch die zu jenen Korollaren gehörigen Beispiele 1 bis 3 in Beispiele zu den jetzigen Korollaren abwandeln; wir dürfen dies dem Leser überlassen. — Offen bleibt hier die — der im Anschluß an das Korollar 6 zu Satz 19 aufgeworfenen analoge — Frage, ob man obiges Korollar 3 zur Kennzeichnung der regulären Räume heranziehen, anders gewendet: ob man in Korollar 1 (allgemeiner in Satz 23 bei der Kennzeichnung der T_3-Topologien) mit dem ordinalen Produkt von Filtern auskommen könne. In Verallgemeinerung von Korollar 3 hat man (mit den Vereinbarungen vor Korollar 4 zu Satz 19), zufolge der Sätze 23 und 21,

Korollar 5. *τ sei eine T_3-Topologie. Ist dann f eine (eindeutige) Abbildung von I in E, so gilt*

mit $\qquad f(i) \in \operatorname{Lim}(g(i, .), \mathfrak{b})$ *für alle* $i \in I$

[50]) Mit Hilfe von Korollar 1 und bekannter Sätze über die übliche Produkttopologie (BOURBAKI [3], proposition 7, S. 67, und corollaire 1, S. 63) kann man zeigen, daß das Produkt (nichtleerer) Hausdorffscher Räume genau dann regulär ist, wenn jeder Faktor regulär ist (vgl. auch BOURBAKI [3], S. 71, exercise 6; KELLEY [13], S. 130, problem A, (b)). Geht man also (anders als im Text) von der üblichen Produkttopologie aus, so erscheint Korollar 2 als Deutung einer Hälfte von Korollar 1 im topologisierten Produktraum.

allemal auch $\mathrm{Lim}(g, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a})$

und (also) $\mathrm{Lim}(g, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a})$.

Wie in (a) in Satz 23 darf auch das erste in Korollar 5 vorkommende Inklusionszeichen $\subseteq$ durch das Gleichheitszeichen ersetzt werden (vgl. Korollar 6 zu Satz 19), nicht hingegen das zweite (vgl. § 3). Auf Grund des Beispiels nach Satz 23 kann auch die Frage geklärt werden, ob im Korollar 5 der Limes- durch den Adhärenzoperator ersetzt werden dürfe. Was die Aussage über das ordinale Produkt angeht, so ist die Frage, nach dem zitierten Beispiel, zu verneinen, also, nach Satz 21, auch für das kardinale Produkt.

Der sog. „Satz vom Doppellimes" bei BOURBAKI[51]) erscheint hier als die Formulierung eines Teiles von Korollar 5 in regulären Räumen:

Korollar 6. *τ sei eine reguläre Topologie*[52]). *Existiert dann zu jedem* $i \in I$ $\lim\limits_{\mathfrak{b}} g(i, k)_{k \in K}$, *so folgt aus der Existenz von* $\lim\limits_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}} g(i, k) = x$ *diejenige von* $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \lim\limits_{\mathfrak{b}} g(i, k) = y$, *und es ist* $x = y$.

Hiermit und mittels des Korollars 3 können wir das im Anschluß an Satz 21 Gesagte dahingehend ergänzen, daß man *in regulären Räumen unter der Voraussetzung der partiellen Limites* $\lim\limits_{\mathfrak{b}} g(i, k)$ *schließen darf*

(1) *von der Existenz des iterierten auf die des ordinalen Limes, und umgekehrt*;

(2) *von der Existenz des kardinalen auf die des iterierten Limes (im allgemeinen aber nicht umgekehrt*[47])*)*.

Zum Gültigkeitsbereich des Satzes 23 sei abschließend bemerkt: Satz 23 bleibt, auf Grund der Sätze 3, I, 8 und 18 erhalten, wenn man in den Bedingungen (a) und (b) die gefilterten durch gerasterte Familien ersetzt und den Limesoperator Lim mit dem Adhärenzoperator Adh vertauscht. Von dieser Dualisierungsmöglichkeit abgesehen, ist aber, was (a) angeht, die Beschränkung von Satz 23 auf gefilterte Familien — anders als bei Satz 19 — eine zwangsläufige: Es sei nämlich mit (a') bzw. (b') bezeichnet die für gestapelte anstelle gefilterter Familien ausgesprochene Bedingung (a) bzw. (b) von Satz 23. Nach den Sätzen 8 und 18 sind (a') und (b') äquivalent. Ist (a') erfüllt, so auch (a); somit ist (a') dafür, daß die Topologie τ eine T_3-Topologie sei, hinreichend, also auch (b'). Daß die Bedingung (b') — und damit auch (a') — für T_3-Topologien aber nicht notwendig ist, folgt schon aus dem Beispiel zu Satz 23.

---

[51]) BOURBAKI [3], S. 69. Mit dem „Satz vom Doppellimes" überschneidet sich der „Satz von der totalen Konvergenz" bei HAUPT-AUMANN-PAUC [11], S. 134, wo allerdings auf die Verwendung des Filterbegriffs verzichtet wird.

[52]) BOURBAKI und DIEUDONNÉ [5] haben gezeigt, daß eine Hausdorffsche Topologie τ regulär ist, wenn die im Text folgende Bedingung für beliebige Doppelfamilien $(g, I \times K)$, beliebige Filter $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ über I und K erfüllt ist. Insofern ist also die Umkehrung des Satzes vom iterierten Limes in Hausdorffschen Räumen mit dem Satz vom Doppellimes äquivalent (vgl. Korollar 1 zu Satz 23).

§ 5. Kowalskys Diagonallimitierung

Die Definition der Diagonallimitierung[53]) von KOWALSKY läßt sich, wie wir sehen werden, im wesentlichen aus der Aussage (a) des Satzes 19 gewinnen. Zur Vorbereitung einige — das in Teil I Gesagte ergänzende — Bemerkungen über die allgemeine, durch $\mathfrak{a}$ gestapelte Summe $\underset{i\in I}{{}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}}\ \mathfrak{b}_i$ von Stapeln $\mathfrak{b}_i$ ($\mathfrak{a}$ ein Stapel über der Menge I, $\mathfrak{b}_i$ ein Stapel über der Menge K_i $(i \in I)$): Ist q der zweite, auf $\underset{i\in I}{\mathsf{S}}\ K_i$ definierte Projektionsoperator (vgl. § 2, I), so hat man

Satz 24. $q\,{}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i = \bigcup\limits_{A\in\mathfrak{a}}\ \bigcap\limits_{i\in A} \mathscr{H}_{qS}\mathfrak{b}_i$ *mit* $S = \underset{i\in I}{\mathsf{S}}\ K_i$ *und dem auf* $qS = \bigcup\limits_{i\in I} K_i$ *bezogenen Hüllenoperator* $\mathscr{H}_{qS}$.

Beweis. Ist $\mathfrak{Y}$ die im Korollar zu Satz 13, I angegebene Basis von ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i$, so besteht $q\mathfrak{Y}$ aus allen Vereinigungen $\bigcup\limits_{i\in A} B_i$ mit $A \in \mathfrak{a}$ und $B_i \in \mathfrak{b}_i$ (zu jedem $i \in A$). Nach Definition von $\mathscr{H}_{qS}$ (vgl. § 1, I) folgt hieraus

$$\mathscr{H}_{qS}\,q\mathfrak{Y} = \bigcup_{A\in\mathfrak{a}}\ \bigcap_{i\in A} \mathscr{H}_{qS}\mathfrak{b}_i$$

(Auswahlaxiom!), hieraus mittels Satz 6, I die Behauptung.

Wir bemerken, daß die erste Gleichung in Satz 24 lediglich Spezialfall ist der entsprechenden, für jede (eindeutige) Abbildung φ aus S auf eine beliebige Menge T — mit φ anstelle q — geltenden (auch die Sätze 17, I, 18, I und einen Teil von Satz 22, I umfassenden) Gleichung

$$\varphi\,{}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i = \bigcup_{A\in\mathfrak{a}}\ \bigcap_{i\in A} \mathscr{H}_{\varphi S}\,\varphi\,\widehat{\mathfrak{b}}_i\,.$$

($\widehat{\mathfrak{b}}_i$ das kanonische Bild von $\mathfrak{b}_i$, vgl. Vorbemerkung zu Satz 15, I), die man etwa auf Satz 15, I zurückführen kann.

Satz 24 liefert uns: Das Bild von ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i$ vermöge q ist nach Korollar 1 zu Satz 6, I ein Stapel über qS; es ist ein Filter bzw. Ultrafilter, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}$-fast alle $\mathfrak{b}_i$ Filter bzw. Ultrafilter sind; ein Raster, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathscr{G}\mathfrak{a}$-fast alle $\mathfrak{b}_i$ Raster sind (vgl. Satz 21, I, dessen Korollare 2 und 4, Korollar 1 zu Satz 6, I).

Korollar 1. $q\,{}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i = \bigcup\limits_{A\in\mathfrak{a}}\ \bigcap\limits_{i\in A} \mathfrak{b}_i$, *falls* $K_i = K$ *(fest) zu jedem* $i \in I$.

Eine Verknüpfung der Sätze 16, I (Verzahnungsinvarianz) und 6, I mit dem Korollar 1 liefert

Korollar 2. $\mathscr{G} \bigcup\limits_{A\in\mathfrak{a}}\ \bigcap\limits_{i\in A} \mathfrak{b}_i = \bigcup\limits_{C\in\mathscr{G}\mathfrak{a}}\ \bigcap\limits_{i\in C} \mathscr{G}\mathfrak{b}_i$, *falls* $K_i = K$ *(fest) zu jedem* $i \in I$.

Setzt man hierin $\mathfrak{a} = \mathscr{G}\{I\}$ bzw. $\mathfrak{a} = \{I\}$, so erhält man die Regel (1.11), I (für Stapel) bzw. (1.13), I als einfache Folgerung zurück.

Wir betrachten nun wieder einen prätopologischen Raum (E, τ). Beschränkt man den Bereich der zugelassenen Approximatoren, der in Grenzübergängen zugelassenen verallgemeinerten Folgen, auf die Menge $\Phi(E)$ aller Filter über E — in Satz 19 waren es die gefilterten Familien über E —, so erhält man, analog zu Satz 19, folgende Kennzeichnung der idempotenten Prätopologien [$\Phi(E)^E$ sei wie üblich die Menge aller (eindeutigen) Abbildungen von E in $\Phi(E)$]:

[53]) KOWALSKY [15], S. 312, Definition 8.

Satz 25. *Dafür, daß die Prätopologie τ eine Topologie sei, ist jede der folgenden Bedingungen* (a) *und* (b) *notwendig und hinreichend.*

(a) *Ist* $\mathfrak{a} \in \Phi(E)$ *und* $\varphi \in \Phi(E)^E$, *so gilt*

mit $\quad x \in \operatorname{Lim} \varphi x$ *für alle* $x \in E$

allemal auch $\quad \operatorname{Lim} \mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Lim} \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{a}} \bigcap\limits_{y \in A} \varphi y$.

(b) *laute wie* (a) *mit* „Adh" *anstelle* „Lim".

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß nach (2.3), Korollar 1 zu Satz 24 und § 1 die Bedingung (a) äquivalent ist mit

(a') Ist $(E, \mathfrak{a})$ eine gefilterte Menge und zu jedem $x \in E$ $(E, \mathfrak{b}_x)$ eine gefilterte Menge, so gilt

mit $\quad x \in \operatorname{Lim}(E, \mathfrak{b}_x)$ für alle $x \in E$

allemal auch $\quad \operatorname{Lim}(E, \mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Lim} \ {}^{\mathfrak{a}}\!\!\mathop{\mathsf{S}}\limits_{x \in E} (E, \mathfrak{b}_x)$.

Hieraus folgt nach Satz 19 unmittelbar, daß (a) zur Idempotenz von τ notwendig ist. Analoges gilt für (b).

Umgekehrt sei (a) erfüllt. Sei $M \subseteq E$ und $x \in \tau^2 M$. Dann gibt es nach Satz 6[54]) einen Filter $\mathfrak{a}$ mit $\tau M \in \mathscr{G}\mathfrak{a}$ und $x \in \operatorname{Lim} \mathfrak{a}$. Analog existiert zu jedem $y \in \tau M$ ein Filter $\mathfrak{b}_y$ mit $M \in \mathscr{G}\mathfrak{b}_y$ und $y \in \operatorname{Lim} \mathfrak{b}_y$; zu jedem $y \in \tau M$ wählen wir einen solchen Filter aus (Auswahlaxiom!). Für $y \in E - \tau M$ sei $\mathfrak{b}_y$ der von $\{\{y\}\}$ über E erzeugte Filter; für ihn gilt nach Satz 5 und Axiom ($\mathfrak{V}$1) $y \in \operatorname{Lim} \mathfrak{b}_y$. Auf Grund der als erfüllt angenommenen Bedingung (a) gilt somit $x \in \operatorname{Lim} \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{a}} \bigcap\limits_{y \in A} \mathfrak{b}_y$. Andererseits gehört nach Wahl der Filter $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_y$ $(y \in E)$ die Menge M zu $\bigcup\limits_{C \in \mathscr{G}\mathfrak{a}} \bigcap\limits_{y \in C} \mathscr{G}\mathfrak{b}_y$, nach Korollar 2 zu Satz 24 folglich zu $\mathscr{G} \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{a}} \bigcap\limits_{y \in A} \mathfrak{b}_y$. Somit hat man nach Satz 6 $x \in \tau M$. Damit haben wir $\tau^2 M \subseteq \tau M$, nach Axiom ($\tau$1) also die Idempotenz von τ bewiesen.

Ersetzt man in diesem Absatz konsequent „Filter" durch „Raster", so erhält man, daß die für Raster anstelle Filtern ausgesprochene Bedingung (a) für die Idempotenz von τ hinreicht. Die so abgeänderte Bedingung ist dann aber auf Grund von Satz 3, I, Korollar 2 zu Satz 24 und Satz 2 äquivalent mit (b); somit ist auch (b) hinreichend. Damit ist Satz 25 bewiesen.

Die Einschränkung $\operatorname{Lim}_{\Phi(E)}$ des Limesoperators Lim auf die Menge $\Phi(E)$ aller Filter über E — in § 1 »par abus de langage« nicht vom Limesoperator schlechthin unterschieden — ist eine (eindeutige) Abbildung von $\Phi(E)$ in $\mathfrak{P}E$ und kann also nach Satz 1 als Relation zwischen $\Phi(E)$ und E aufgefaßt werden; $\operatorname{Lim}_{\Phi(E)}^{-1}$, kurz Lim^{-1}, sei die zu $\operatorname{Lim}_{\Phi(E)}$, kurz wieder Lim, inverse Relation. Zu jedem $x \in E$ ist dann $\operatorname{Lim}^{-1} x$ die Menge aller Filter $\mathfrak{a}$ über E mit $x \in \operatorname{Lim} \mathfrak{a}$.

Die Bedingung (a) des Satzes 25 kann man nun in eine äquivalente für die Relation (bei anderer Auffassung: den Operator) Lim^{-1} umwandeln, nämlich in

(a'') Ist $\mathfrak{a} \in \Phi(E)$ und $\varphi \in \Phi(E)^E$, so gilt

mit $\quad \varphi x \in \operatorname{Lim}^{-1} x$ für alle $x \in E$

allemal auch $\quad$ „wenn $\mathfrak{a} \in \operatorname{Lim}^{-1} z$, so $\bigcup\limits_{A \in \mathfrak{a}} \bigcap\limits_{y \in A} \varphi y \in \operatorname{Lim}^{-1} z$" für alle $z \in E$.

[54]) Durch den Verzicht auf Benutzung von Satz 7 erreichen wir, daß der Beweis für Stapel anstelle von Filtern über E gültig bleibt, gilt doch auch der verwendete Satz 19 für gestapelte anstelle gefilterter Familien.

Nach formaler Ersetzung des Operators Lim^{-1} durch eine Limitierung T der (abstrakten) Menge E im Sinne von KOWALSKY deckt sich (a″) per definitionem mit der Aussage, daß T Diagonallimitierung sei. Der in (a″) vorkommende, durch $\mathfrak{a}$ und φ eindeutig bestimmte Filter $\bigcup_{A\in\mathfrak{a}} \bigcap_{y\in A} \varphi y$ entspricht genau dem „Diagonalfilter" $\varkappa\mathfrak{a}^*$ bei KOWALSKY[55]).

Substantiell läuft — in einem Hausdorffschen Raum E gedeutet — Satz 25 darauf hinaus, daß er gestattet, gegebene iterierte Grenzübergänge der Gestalt

$$(5.1) \qquad x = \lim \mathfrak{a},\ y = \lim \mathfrak{b}_y \quad \text{zu jedem} \quad y \in E$$

mit Filtern $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_y$ über E in einfache, nicht iterierte, nämlich in

$$x = \lim \bigcup_{A\in\mathfrak{a}} \bigcap_{y\in A} \mathfrak{b}_y$$

zu verwandeln (vgl. Korollar 1 zu Satz 19). Der Zusammenhang der allgemeinen „gefilterten Diagonalfamilie", der gefilterten Summe ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,(g_i, \mathfrak{b}_i)$ in Satz 19 mit dem „Diagonalfilter" $\bigcup_{A\in\mathfrak{a}} \bigcap_{y\in A} \mathfrak{b}_y$ des iterierten Grenzprozesses (5.1) wird durch (2.3) und das Korollar 1 zu Satz 24 beschrieben.

Wir bemerken, daß auf Grund seines Beweises (der tatsächlich nur die Stapeleigenschaft eines Filters benutzt) und des Beweises von Satz 19 der diskutierte Satz 25 unverändert für Stapel anstelle von Filtern gilt. Unmittelbar auf Grund des Korollars 2 zu Satz 24 und des Satzes 2 (nicht erst mittelbar nach dem modifizierten Satz 25) sind dann (a) und (b) äquivalent. Korollar 2 zu Satz 24 in Verbindung mit Satz 3, I und Satz 2 sichert ferner, daß Satz 25 für Raster anstelle Filtern Gültigkeit behält. Ob (a) nach Umkehrung der vorkommenden Inklusion — analog zu (a) in Satz 23 — gerade die T_3-Topologien unter den Topologien kennzeichnet, bleibt als Problem offen; leicht bestätigt man, daß die so abgeänderte Bedingung (auf Grund von Satz 23, (2.3) und Korollar 1 zu Satz 24) zur T_3-Eigenschaft notwendig ist.

§ 6. Birkhoff-Kelleys Satz vom iterierten Limes

Gegeben sei ein prätopologischer Raum (E, τ). Unter einer *Moore-Smith-Punktfolge*, kurz *Moore-Smith-Folge*, (f, I), $f(i)_{i\in I}$ *(über E)* versteht man eine Punktfamilie (über E) mit gerichtetem Indexbereich I[56]). Ist M irgendeine gerichtete Menge, so wollen wir hier mit $\mathfrak{a}(M)$ den Perfinalitätsfilter über M bezeichnen (vgl. Beispiel 2 in § 5, I). In Übereinstimmung mit der

---

[55]) KOWALSKY [15], S. 312, vor Definition 8. Bezogen auf eine vorgegebene Prätopologie, stimmen Limitierung T und Lim^{-1} überein; siehe [15], S. 309 (Definition von $\hat{\mathsf{T}}$), und unseren Satz 5.

[56]) Die (Richtungs-) Relation $\leqq$ einer gerichteten Menge wird hier wie bei BRUNS-SCHMIDT [6], S. 170, — anders als etwa bei KELLEY [13], S. 65 — als antisymmetrisch vorausgesetzt. Einerseits aber wird die Antisymmetrie hier nirgends explizit benötigt, andererseits wird durch die Antisymmetrie-Forderung — auf Grund des Satzes auf S. 171 in [6], 4 — der Bereich der Moore-Smith-Folgen als Approximatoren nur scheinbar eingeengt, da es bei Grenzübergängen nur auf den „Bildfilter" $f(\mathfrak{a}(I))$ ankommt. Siehe J. SCHMIDT [26], S. 30.

Konvention[57]) erklären wir $\mathrm{Lim}(f, I)$ und $\mathrm{Adh}(f, I)$ durch

$$\mathrm{Lim}(f, I) = \mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a}(I))$$

und

$$\mathrm{Adh}(f, I) = \mathrm{Adh}(f, \mathfrak{a}(I)) .$$

So betrachtet, erscheint die gefilterte Familie als „Verallgemeinerung" der Moore-Smith-Folge[58]). Umgekehrt aber — und dies sichert die Äquivalenz von gefilterter Familie und Moore-Smith-Folge — gibt es bekanntlich[59]) zu jeder gefilterten Familie $(g, \mathfrak{b})$ (über E) eine Moore-Smith-Folge (f, I) (über E) mit der Eigenschaft $g(\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}(I))$, also — per definitionem — mit dem gleichen Konvergenzverhalten, gleichen Limes- und Adhärenzpunkten (vgl. § 1).

Mittels des in § 6, I untersuchten (gerichteten) kardinalen Produkts einer gerichteten Menge I mit dem (gerichteten) kardinalen Produkt einer Familie $(K_i)_{i\in I}$ gerichteter Mengen K_i,

$$G = I \times \mathop{\mathsf{P}}_{i\in I} K_i ,$$

und der in Satz 26, I erklärten kanonischen Abbildung χ von G auf $\mathop{\mathsf{S}}_{i\in I} K_i$ läßt sich nun folgende, BIRKHOFF-KELLEYs Satz vom iterierten Limes[60]) — siehe (a) — benutzende Kennzeichnung der idempotenten Prätopologien angeben (vgl. Satz 19).

Satz 26. *Dafür, daß die Prätopologie τ eine Topologie sei, ist jede der folgenden Bedingungen* (a) *und* (b) *notwendig und hinreichend.*

(a) *Ist (f, I) eine Moore-Smith-Folge über E und zu jedem $i \in I$ (g_i, K_i) eine Moore-Smith-Folge über E, so gilt*

mit	$f(i) \in \mathrm{Lim}(g_i, K_i)$ *für alle* $i \in I$
allemal auch	$\mathrm{Lim}(f, I) \subseteq \mathrm{Lim}\left(\left(\mathop{\mathsf{S}}_{i\in I} g_i\right)\chi, G\right)$.

(b) *laute wie* (a) *mit* „Adh" *anstelle* „Lim".

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß nach Satz 26, I die Bedingung (a) äquivalent ist mit

(a′) Ist (f, I) eine Moore-Smith-Folge über E und zu jedem $i \in I$ (g_i, K_i) eine Moore-Smith-Folge über E, so gilt

mit	$f(i) \in \mathrm{Lim}(g_i, \mathfrak{a}(K_i))$ für alle $i \in I$
allemal auch	$\mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a}(I)) \subseteq \mathrm{Lim}\ {}^{\mathfrak{a}(I)}\mathop{\mathsf{S}}_{i\in I} (g_i, \mathfrak{a}(K_i))$.

Hieraus folgt nach Satz 19 unmittelbar, daß (a) zur Idempotenz von τ notwendig ist. Analoges gilt für (b).

[57]) Vgl. etwa NÖBELING [21], S. 55, und J. SCHMIDT [26], S. 29f.
[58]) J. SCHMIDT [26], loc. cit.
[59]) Dies folgt aus dem zitierten Satz bei BRUNS-SCHMIDT [6] (vgl. unseren Satz 6, I).
[60]) BIRKHOFF [2], S. 43 (theorem 5); KELLEY [12], S. 279, und [13], S. 69 ("Theorem on iterated limits").

Umgekehrt gelte (a), es sei $M \subseteq E$ und $x \in \tau^2 M$. Nach Satz 14 und auf Grund der Bemerkungen zu Beginn des Paragraphen gibt es eine Moore-Smith-Folge (f, I) mit $f(I) \subseteq \tau M$ und $x \in \mathrm{Lim}(f, I)$. Wegen $f(i) \in \tau M$ gibt es analog zu jedem $i \in I$ eine Moore-Smith-Folge (g_i, K_i) mit $f(i) \in \mathrm{Lim}(g_i, K_i)$ und $g_i(K_i) \subseteq M$. Indem wir zu jedem i eine solche Moore-Smith-Folge auswählen (Auswahlaxiom!), haben wir nach (a') $x \in \mathrm{Lim}\ {}^{\mathfrak{a}(I)}\underset{i\in I}{\mathsf{S}}\ (g_i, \mathfrak{a}(K_i))$ und nach der Wahl der (g_i, K_i) — siehe § 2 — $\left(\underset{i\in I}{\mathsf{S}}\, g_i\right)\left(\underset{i\in I}{\mathsf{S}}\, K_i\right) \subseteq M$, nach Satz 14 somit $x \in \tau M$. τ ist also (vgl. (τ1)) idempotent. In dieser Überlegung darf man den Limesoperator Lim durch den Adhärenzoperator Adh ersetzen ((a') ist dabei durch eine zu (a') analoge Bedingung zu ersetzen). Jede der beiden Bedingungen (a) und (b) sind also zur Idempotenz von τ hinreichend. Damit ist Satz 26 bewiesen.

Ganz entsprechend, wie wir aus Satz 19 durch Modifikation der dortigen Bedingungen (a) und (b) den Satz 23 erhielten, erhalten wir hier durch Abwandlung, in gewissem Sinn Umkehrung der Bedingungen (a) und (b) des Satzes 26 einen Satz, der sich, was den Limesoperator angeht, in Hausdorffschen Räumen mit Birkhoffs Kennzeichnung der regulären Räume[61]) deckt.

Satz 27. *τ sei eine Topologie. Dafür, daß τ eine T_3-Topologie sei, ist folgende Bedingung* (a) *notwendig und hinreichend, folgende Bedingung* (b) *hinreichend.*

(a) *Ist (f, I) eine Moore-Smith-Folge über E und zu jedem $i \in I$ (g_i, K_i) eine Moore-Smith-Folge über E, so gilt*

mit $\quad f(i) \in \mathrm{Lim}(g_i, K_i)$ *für alle* $i \in I$

allemal auch $\quad \mathrm{Lim}\left(\left(\underset{i\in I}{\mathsf{S}}\, g_i\right)\chi, G\right) \subseteq \mathrm{Lim}(f, I)$.

(b) *laute wie* (a) *mit* „Adh“ *anstelle* „Lim“.

Beweis. Die Bedingung, die aus (a') im Beweis von Satz 26 dadurch entsteht, daß man $\subseteq$ durch $\supseteq$ ersetzt, wollen wir mit (a'') bezeichnen, die Bedingung, die aus (a'') durch Ersetzung des Limesoperators Lim durch den Adhärenzoperator Adh hervorgeht, mit (b''). Nach Satz 26, I ist (a) äquivalent mit (a''), (b) mit (b''). Aus ersterem folgt nach Satz 23 unmittelbar, daß (a) zur T_3-Eigenschaft von τ notwendig ist. Umgekehrt[62]) sei die Topologie τ keine T_3-Topologie. Man schließt nun wörtlich wie im Beweis von Satz 23, das dortige (a) jetzt allerdings durch (a''), das dortige (b) durch (b'') ersetzend. Dabei hat man jetzt in (1) zu jedem i die gefilterte Familie $(g_i, K_i, \mathfrak{b}_i)$ so zu wählen, daß K_i eine gerichtete Menge, $\mathfrak{b}_i$ der Perfinalitätsfilter über K_i ist; dies ist nach den einleitenden Bemerkungen dieses Paragraphen möglich. Man erhält, daß weder (a''), noch (b'') erfüllt ist. Jede der Bedingungen (a) und (b) von Satz 27 ist also zur T_3-Eigenschaft von τ hinreichend.

Die Bedingung (a) von Satz 19 besitzt gegenüber der von Satz 26 den technischen Vorteil, daß man bei der Bildung der „gefilterten Diagonalfamilie“, der gefilterten Summe ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,(g_i, \mathfrak{b}_i)$ in Satz 19 den Indexbereich der

[61]) BIRKHOFF [2], S. 44, theorem 7a.

[62]) Substantiell ist dies — was (a) angeht — die Schlußweise von BIRKHOFF [2], loc. cit., ohne daß dort der Filterbegriff benutzt wird.

implizit gegebenen Doppelfamilie $(\mathsf{S}\, g_\iota, \mathsf{S}\, K_\iota) = \mathsf{S}\,(g_\iota, K_\iota)$ beibehält, ihn hingegen bei Bildung der „gerichteten Diagonalfolge" $((\mathsf{S}\, g_\iota)\chi, G)$ in Satz 26 — indem man von $\mathsf{S}\, K_\iota$ zum Indexbereich G übergeht — verläßt. (Entsprechendes gilt für den Vergleich der Sätze 23 und 27.) Besonders deutlich tritt dies in Erscheinung, wenn man in einem Hausdorffschen Raum E wenigstens 3-fache (allgemeiner n-fache, $n \geqq 3$) Grenzübergänge, etwa von der Gestalt

$$x = \lim_{\mathfrak{a}} \lim_{\mathfrak{b}} \lim_{\mathfrak{c}} g(i, j, k) \tag{6.1}$$

mit Filtern $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ über den Mengen I, J, K $((i, j, k) \in I \times J \times K, g(i, j, k) \in E$, $x \in E)$ behandelt. Die Bildung der „gefilterten Diagonalfamilie" dieses Grenzprozesses erfolgt so, daß man das ordinale Produkt $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \otimes \mathfrak{c}$ (die Definition darf dem Leser überlassen werden, ebenso die Präzisierung von (6.1)) bildet und diesen Filter dem Indexbereich $I \times J \times K$ aufprägt; man hat dann auf Grund von Korollar 4 zu Satz 19

$$x = \lim_{\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \otimes \mathfrak{c}} g(i, j, k)\,. \tag{6.2}$$

In der Sprache der Moore-Smith-Folgen hat das Analogon zu (6.1) die Gestalt

$$x = \lim_{i} \lim_{j} \lim_{k} g(i, j, k) \tag{6.3}$$

mit i, j, k aus gerichteten Mengen I, J, K $(g(i, j, k) \in E$, $x \in E)$. Die Bildung der „gerichteten Diagonalfolge" ist schon in diesem einfachen Fall $(n = 3)$ kompliziert: Bezeichnet man, wie üblich, für beliebige gerichtete Mengen A und B_a $(a \in A)$ das (gerichtete) kardinale Produkt $\mathsf{P}_{a \in A} B_a$ (siehe § 6, I) im Falle gleicher Faktoren $B_a = B$ mit B^A, das (gerichtete) kardinale Produkt von A und B (wie oben) mit $A \times B$, so erhält man auf Grund von Satz 26, als Analogon zu (6.2) in der Sprache der Moore-Smith-Folgen,

$$x = \lim h(i, \varphi)_{(i, \varphi) \in I \times [J \times (K^J)]^I} \tag{6.4}$$

mit
$$h(i, \varphi) = g(i, p[\varphi(i)], \{q[\varphi(i)]\}\{p[\varphi(i)]\})\,,$$

die Projektionsoperatoren p und q (vgl. § 2, I) auf das kardinale Produkt von J mit K^J als Definitionsbereich bezogen.

§ 7. J. Schmidts assoziative Operationen

Da in Hausdorffschen Räumen der Limesoperator jeder gefilterten Punktfamilie eine höchstens einelementige Menge zuordnet, liegt es nahe, ihn dann als Operation zu deuten. Die Frage nach der Gültigkeit algebraischer Rechenregeln, denen diese Operation genügt, schließt sich unmittelbar an. Es wird sich zeigen, daß die Aussage (a) in Satz 19 als die eine Hälfte, die Aussage (a) in Satz 23 als die andere Hälfte eines Assoziativgesetzes angesprochen werden kann, dem der Limesoperator, bei höchstens einelementigen Limites: die Limesoperation evtl. gehorcht.

Eine Operation, ausführbar für gewisse Punktfamilien (f, I) über der (abstrakten) Menge E, wollen wir als einen Operator Ω auffassen, der jeder (hier: jeder nichtleeren) Familie (f, I) über E eine höchstens einelementige

Menge $\Omega(f, I) \subseteq E$ zuordnet. (Ist $\Omega(f, I) \neq O$, so sagt man, die Operation Ω sei für (f, I) ausführbar.) Mit J. Schmidt[63]) nennen wir die Operation Ω *assoziativ*, wenn sie folgende Bedingung erfüllt (vgl. § 2):

(a) *Ist (f, I) eine nichtleere Familie über E und (g_i, K_i) zu jedem $i \in I$ eine nichtleere Familie über E, so gilt*

mit $\quad f(i) \in \Omega(g_i, K_i) \quad$ *für alle* $\quad i \in I$

allemal auch $\quad \Omega(f, I) = \Omega \underset{i \in I}{\mathsf{S}} (g_i, K_i)$.

Beispielsweise ist die Operation des Infimum — ebenso die des Supremum — in einer (teilweise) geordneten Menge assoziativ. Wie J. Schmidt[64]) bemerkt, kann man das Assoziativgesetz (a) in zwei „Hälften" (a′) und (a″) zerlegen: die eine entsteht aus (a) dadurch, daß man das Gleichheitszeichen durch die Inklusion $\subseteq$, die andere dadurch, daß man es durch die umgekehrte Inklusion $\supseteq$ ersetzt. Man wird dann (a′) als eine „Klammerstreichungsregel" (Streichung von Klammern erlaubt!), (a″) als eine „Klammersetzungsregel" (Setzung von Klammern erlaubt!) bezeichnen dürfen.

Die diesen Paragraphen einleitenden Bemerkungen und der Vergleich von (a′) mit den Bedingungen (a) und (b) von Satz 19 sowie der von (a″) mit den Bedingungen (a) und (b) von Satz 23 legen nahe, den Definitionsbereich des Operators Ω auf die gefilterten Familien $(f, \mathfrak{a})$ (über E) auszudehnen und als Werte $\Omega(f, \mathfrak{a})$ beliebige Teilmengen von E zuzulassen. Der Definitionsbereich von Ω in (a) wird dann insofern von dem neuen umfaßt, als man jede nichtleere Familie (f, I) als trivial gefilterte Familie $(f, \{I\})$ auffassen kann. Nach dieser Erweiterung nennen wir den Operator Ω *assoziativ*, wenn er nachstehende Bedingung erfüllt (vgl. § 2):

(b) *Ist $(f, I, \mathfrak{a})$ eine gefilterte Familie über E und zu jedem $i \in I$ $(g_i, \mathfrak{b}_i)$ eine gefilterte Familie über E, so gilt*

mit $\quad f(i) \in \Omega(g_i, \mathfrak{b}_i) \quad$ *für alle* $\quad i \in I$

allemal auch $\quad \Omega(f, \mathfrak{a}) = \Omega \,{}^{\mathfrak{a}}\underset{i \in I}{\mathsf{S}} (g_i, \mathfrak{b}_i)$.

Wie oben im Falle der Operationen kann man auch hier von zwei Hälften des Assoziativgesetzes (b) sprechen: dem obigen (a′) soll hier die aus (b) erhaltene Bedingung (b′), dem obigen (a″) die aus (b) erhaltene Bedingung (b″) entsprechen. Ω heiße *schwach assoziativ* bzw. *dissoziativ*[65]), wenn (b′) bzw. (b″) erfüllt ist. Die Bedingungen (a), (a′), (a″) sind bei Identifikation der nichtleeren Familien (f, I) mit den trivial gefilterten Familien $(f, \{I\})$ wegen

$$^{(I)}\underset{i \in I}{\mathsf{S}} \{K_i\} = \left\{\underset{i \in I}{\mathsf{S}} K_i\right\}$$

$(K_i \neq O)$ Spezialfälle von (b), (b′), (b″) (vgl. § 2).

Die Sätze 19 und 23 lassen sich nun folgendermaßen deuten:

Satz 28. *Eine Prätopologie (von E) ist genau dann idempotent, wenn der zugehörige Limesoperator* Lim *schwach assoziativ ist, ferner genau dann, wenn der*

[63]) J. Schmidt [25], S. 440f.; dort ist die leere Familie zugelassen.

[64]) J. Schmidt [25], S. 441, Fußnote 4.

[65]) Die Terminologie ist dem Vorschlag bei J. Schmidt [25], loc. cit., angepaßt.

zugehörige Adhärenzoperator Adh *schwach assoziativ ist. Also:* Lim *ist genau dann schwach assoziativ, wenn* Adh *es ist. Eine Topologie (von E) ist genau dann T_3-Topologie, wenn* Lim *assoziativ ist, ferner genau dann, wenn* Lim *dissoziativ ist. Eine Topologie ist T_3-Topologie, wenn* Adh *assoziativ ist, ferner, wenn* Adh *dissoziativ ist.*

Es fehlen uns Beispiele dissoziativer Operatoren, die nicht schwach assoziativ sind[66]).

Literatur

[1] AUMANN, G.: Reelle Funktionen. Berlin 1954.
[2] BIRKHOFF, G.: Moore-Smith convergence in general topology. Ann. Math. **38**, 39—56 (1937).
[3] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap. I—II. 2. Aufl. Actual. Sci. Industr. **1142** (1951).
[4] BOURBAKI, N.: Théorie des ensembles, Chap. I—II. Actual Sci. Industr. **1212** (1954).
[5] BOURBAKI, N., et J. DIEUDONNÉ: Notes de Tératopologie. II. Revue Scientifique 1939, 180—181.
[6] BRUNS, G., u. J. SCHMIDT: Zur Äquivalenz von Moore-Smith-Folgen und Filtern. Math. Nachr. **13**, 169—186 (1955).
[7] CHOQUET, G.: Convergences. Ann. Univ. Grenoble **23**, 57—112 (1948).
[8] DOOB, J. L.: Stochastic Processes. 2. Aufl. New York 1959.
[9] GRIMEISEN, G.: Gefilterte Summation von Filtern und iterierte Grenzprozesse. I. Math. Ann. **141**, 318—342 (1960).
[10] HAHN, H.: Theorie der reellen Funktionen. Bd. 1. Berlin 1921.
[11] HAUPT, O., G. AUMANN u. CH. PAUC: Differential- und Integralrechnung. Bd. 1. 2. Aufl. Berlin 1948.
[12] KELLEY, J. L.: Convergence in topology. Duke Math. J. **17**, 277—283 (1950).
[13] KELLEY, J. L.: General topology. New York 1955.
[14] KOWALSKY, H. J.: Beiträge zur topologischen Algebra. Math. Nachr. **11**, 143—185 (1954).
[15] KOWALSKY, H. J.: Limesräume und Komplettierung. Math. Nachr. **12**, 301—340 (1954).
[16] KURATOWSKI, C.: Topologie. Bd. 1. 4. Aufl. Warszawa 1958.
[17] LONDON, F.: Über Doppelfolgen und Doppelreihen. Math. Ann. **53**, 322—370 (1900).
[18] MOORE, E. H., and H. L. SMITH: A general theory of limits. Am. J. Math. **44**, 102—121 (1922).
[19] NÖBELING, G.: Zur Theorie der topologischen Räume. Sitzber. bayer. Akad. Wiss. Math.-naturw. Kl. 1950, 131—132.
[20] NÖBELING, G.: Über eine Verallgemeinerung des Folgenbegriffes. Sitzber. bayer. Akad. Wiss. Math.-naturw. Kl. 1950, 133—141.
[21] NÖBELING, G.: Grundlagen der analytischen Topologie. Berlin 1954.
[22] PAUC, CH.: Ableitungsbasen, Prätopologie und starker Vitalischer Satz. J. reine angew. Math. **191**, 69—91 (1953).
[23] PRINGSHEIM, A.: Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen. Math. Ann. **53**, 289—321 (1900).
[24] SCHMIDT, J.: Beiträge zur Filtertheorie. II. Math. Nachr. **10**, 197—232 (1953).
[25] SCHMIDT, J.: Die transfiniten Operationen der Ordnungstheorie. Math. Ann. **133**, 439—449 (1957).
[26] SCHMIDT, J.: Eine Studie zum Begriff der Teilfolge. Jahrsber. DMV **63**, 28—50 (1960).

(Eingegangen am 5. März 1961)

[66]) Siehe aber das Beispiel bei J. SCHMIDT [25], loc. cit.

MIRSKY, L.
Math. Annalen 144, 418—421 (1961)

Even Doubly-Stochastic Matrices

By

L. MIRSKY in Sheffield (England)

1. A square matrix is said to be *doubly-stochastic* (d.s.) if its elements are real non-negative numbers and if the sum of the elements in each row and each column is equal to 1. It is plain that any convex combination of permutation matrices is d.s., and a remarkable theorem due to G. BIRKHOFF [1; cf. also 4 and 6] asserts that the converse is also true. Thus every d.s. matrix can be expressed as a convex combination of permutation matrices. In view of this result it seems natural to consider subclasses of d.s. matrices defined in terms of permutation matrices.

If π is any permutation of the symbols $1, 2, \ldots, n$, we shall define the $n \times n$ permutation matrix P_π by the equation

$$(x_{\pi 1}, \ldots, x_{\pi n}) = (x_1, \ldots, x_n) P_\pi ,$$

where $(x_1, \ldots, x_n)$ is an arbitrary vector. If π is even, we shall call P_π an even permutation matrix. By an *even* doubly-stochastic matrix we shall understand a matrix which can be expressed as a convex combination of even permutation matrices. A. J. HOFFMAN proposed the problem of finding a criterion for deciding whether a given matrix is an even d.s. matrix. In the present note we shall obtain results which may possibly contribute towards the solution of Hoffman's problem. Our main theorem is concerned with a characterization of sets of diagonal elements of even d.s. matrices.

Theorem 1. *Let n be a positive integer. The numbers $d_1, \ldots, d_n$ are the diagonal elements of some even doubly-stochastic $n \times n$ matrix if and only if*

$$0 \leqq d_i \leqq 1 \qquad (1 \leqq i \leqq n), \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} d_k - 3 \min_{1 \leqq i \leqq n} d_i \leqq n - 3 . \tag{2}$$

The corresponding result for *arbitrary* d.s. matrices, proved by A. HORN [5], states that the numbers $d_1, \ldots, d_n$ are the diagonal elements of some d.s. matrix if and only if (1) is satisfied and

$$\sum_{k=1}^{n} d_k - 2 \min_{1 \leqq i \leqq n} d_i \leqq n - 2 .$$

Before proving Theorem 1, we shall consider one of its consequences.

Theorem 2. *Let (d_{ik}) be an even doubly-stochastic $n \times n$ matrix. Then, for $1 \leqq j \leqq n$ and every even permutation π,*

$$\sum_{k=1}^{n} d_{k,\pi k} - 3 d_{j,\pi j} \leqq n - 3 . \tag{3}$$

Write $D = (d_{ik})$, $E = (e_{ik}) = D P_\pi$. Then E is clearly an even d.s. matrix, and $e_{kk} = d_{k,\pi k}$. The assertion now follows by inequality (2) of Theorem 1. However, a direct proof of Theorem 2 can also be given easily. Denote by $\mathfrak{R}$ the set of d.s. $n \times n$ matrices (d_{ik}) which satisfy (3) for every integer j in the range $1 \leqq j \leqq n$ and for every even permutation π. Then $\mathfrak{R}$ is a convex set and it is therefore sufficient to prove that every even permutation matrix belongs to $\mathfrak{R}$. Let σ be an even permutation. Then, denoting by δ_{rs} the Kronecker delta and by $(A)_{rs}$ the (r, s)-th element of the matrix A, we have

$$\sum_{k=1}^{n} (P_\sigma)_{k,\pi k} - 3(P_\sigma)_{j,\pi j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,\sigma\pi k} - 3\delta_{j,\sigma\pi j} .$$

If $\sigma\pi$ is the identical permutation, this expression is equal to $n - 3$; if $\sigma\pi$ is a non-identical (even) permutation, the expression does not exced $n - 3 - 3\delta_{j,\sigma\pi j} \leqq n - 3$. This concludes the proof. Whether the inequalities in Theorem 2 suffice to characterize the class of even d.s. matrices remains, for the present, an open question.

2. We must next introduce the notation that will be needed in the proof of Theorem 1.

All numbers mentioned below are real. All vectors are understood to be of row type and order n. The inner product of x and y is denoted by (x, y). If u is a vector, the number of its positive components and the number of its zero components are denoted by $p(u)$ and $z(u)$ respectively. For an $n \times n$ matrix $X = (x_{ik})$, we write

$$\delta(X) = (x_{11}, \ldots, x_{nn});$$

we shall call $\delta(X)$ the *diagonal vector* of X. The transpose of X will be denoted by X^T.

Ω_n is the set of all vectors u of order n all of whose components are 0 or 1 and such that $z(u) \neq 1$, $z(u) \neq 2$. The convex hull of Ω_n is denoted by $\mathfrak{H}(\Omega_n)$.

The alternating group on the symbols $1, 2, \ldots, n$ is denoted by A_n.

3. In this section we shall establish some preliminary results and characterize, in essence, the set $\mathfrak{H}(\Omega_n)$.

Lemma 1. *For $n \geqq 3$, Ω_n is identical with the set of vectors $\delta(P_\pi)$, $\pi \in A_n$.*

Consider the vector $u = \delta(P_\pi)$, where $\pi \in A_n$. Then $z(u)$ is equal to the number of symbols among $1, 2, \ldots, n$ changed by π, and so $z(u) \neq 1$. Furthermore, $z(u) = 2$ would imply that π is a transposition. Hence $z(u) \neq 2$ and it follows that $u \in \Omega_n$.

Next, let $u \in \Omega_n$; and write $p(u) = r$, $z(u) = s$, so that $r + s = n$, $r \neq n - 2$, $r \neq n - 1$. If $r = n$, then $u = \delta(I)$. If $0 \leqq r \leqq n - 3$, denote by $i_1, \ldots, i_s$ the suffixes of the zero components of u. If s is odd, the permutation $\pi = (i_1 \ldots i_s)$ is even and $u = \delta(P_\pi)$. If s is even, write $s = 2k$. The permutation $\pi = (i_1 \ldots i_k)(i_{k+1} \ldots i_{2k})$ is even and $u = \delta(P_\pi)$. This completes the proof.

Lemma 2. *The vector u belongs to the convex hull of the vectors $u_1, \ldots, u_m$ if and only if, for every vector x,*

$$(u, x) \leqq \max_{1 \leqq k \leqq m} (u_k, x) .$$

This is a standard result from the elementary theory of convex sets. A proof may be found, for example, in the book by BONNESEN and FENCHEL [2, pp. 23—24].

Lemma 3. *Let* $n \geqq 3$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$, *and suppose that*

$$1 \geqq e_1 \geqq \cdots \geqq e_n \geqq 0\,, \tag{4}$$

$$n - 3 + 2e_n - e_1 - \cdots - e_{n-1} \geqq 0\,. \tag{5}$$

Then $e \in \mathfrak{H}(\Omega_n)$.

We shall begin by showing that, for any vector $y = (y_1, \ldots, y_n)$ such that

$$y_1 \geqq \cdots \geqq y_n\,, \tag{6}$$

we have

$$\sum_{k=1}^{n} e_k y_k \leqq \sum_{k=1}^{r} y_k\,, \tag{7}$$

where r is some integer such that $0 \leqq r \leqq n$, $r \neq n-2$, $r \neq n-1$. Let p denote the number of non-negative y_i. Then (7) certainly holds for $r = p$ and we need therefore verify the assertion only for $p = n-2$ and $p = n-1$. In either of these cases $y_{n-2} \geqq 0$. We shall now distinguish between two alternatives.

If $y_{n-2} + y_{n-1} + y_n \geqq 0$, then, using (4), (6), and (5), we obtain

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} y_k - \sum_{k=1}^{n} e_k y_k &= \sum_{k=1}^{n} (1 - e_k) y_k \\
&\geqq \sum_{k=1}^{n-2} (1 - e_k) y_{n-2} + (1 - e_{n-1}) y_{n-1} + (1 - e_n)(-y_{n-2} - y_{n-1}) \\
&= (n - 3 + e_n - e_1 - \cdots - e_{n-2}) y_{n-2} - (e_{n-1} - e_n) y_{n-1} \\
&\geqq (n - 3 + e_n - e_1 - \cdots - e_{n-2}) y_{n-2} - (e_{n-1} - e_n) y_{n-2} \\
&= (n - 3 + 2e_n - e_1 - \cdots - e_{n-1}) y_{n-2} \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

Hence (7) is satisfied with $r = n$.

Again, if $y_{n-2} + y_{n-1} + y_n < 0$, then

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-3} y_k - \sum_{k=1}^{n} e_k y_k &= \sum_{k=1}^{n-3} (1 - e_k) y_k - e_{n-2} y_{n-2} - e_{n-1} y_{n-1} - e_n y_n \\
&\geqq \sum_{k=1}^{n-3} (1 - e_k) y_{n-2} - e_{n-2} y_{n-2} - e_{n-1} y_{n-1} + e_n (y_{n-2} + y_{n-1}) \\
&= (n - 3 + e_n - e_1 - \cdots - e_{n-2}) y_{n-2} - (e_{n-1} - e_n) y_{n-1} \geqq 0\,,
\end{aligned}$$

as above. Thus (7) holds with $r = n - 3$.

We have therefore shown that in every case (7) holds with some $r \neq n-2$, $n-1$. Now let x be any vector and denote by y the vector obtained when the components of x are arranged in non-ascending order of magnitude. Then,

by a well-known inequality [3, p. 261], $(e, x) \leqq (e, y)$ and, by (7),

$$(e, y) \leqq \max_{u \in \Omega_n} (u, y) = \max_{u \in \Omega_n} (u, x) .$$

The assertion now follows by Lemma 2.

4. We now come to the proof of Theorem 1. For $n = 1$ and $n = 2$ this result is true trivially, and we shall therefore assume that $n \geqq 3$.

Let $d = (d_1, \ldots, d_n)$ be the diagonal vector of some even d.s. matrix D, and write

$$D = \sum_{\pi \in A_n} t_\pi P_\pi ,$$

where the t's are non-negative numbers with sum 1. Then

$$d = \delta(D) = \sum_{\pi \in A_n} t_\pi \delta(P_\pi)$$

and so, by Lemma 1, $d \in \mathfrak{H}(\Omega_n)$. But every vector in Ω_n satisfies (1) and (2). Hence d also satisfies (1) and (2).

Suppose, next, that $d = (d_1, \ldots, d_n)$ satisfies (1) and (2), and denote by $e = (e_1, \ldots, e_n)$ the vector derived from d when the components are arranged in non-ascending order of magnitude. Then (4) and (5) are satisfied and so, by Lemma 3, $e \in \mathfrak{H}(\Omega_n)$. Hence, by Lemma 1,

$$e = \sum_{\pi \in A_n} t_\pi \delta(P_\pi) = \delta\Big(\sum_{\pi \in A_n} t_\pi P_\pi\Big), \tag{8}$$

where the t's are non-negative numbers with sum 1. Now, for some permutation σ (not necessarily even),

$$d = e P_\sigma . \tag{9}$$

Also, for any matrix M and any permutation matrix P,

$$\delta(M) P = \delta(P^T M P) .$$

Hence, by (8) and (9),

$$\begin{aligned} d &= \delta\Big(\sum_{\pi \in A_n} t_\pi P_\pi\Big) P_\sigma = \delta\Big(\sum_{\pi \in A_n} t_\pi P_\sigma^T P_\pi P_\sigma\Big) \\ &= \delta\Big(\sum_{\pi \in A_n} t_\pi P_{\sigma^{-1}\pi\sigma}\Big) = \delta\Big(\sum_{\pi \in A_n} t_{\sigma\pi\sigma^{-1}} P_\pi\Big), \end{aligned}$$

and d is therefore the diagonal vector of some even d.s. matrix.

References

[1] Birkhoff, G.: Tres observaciones sobre el algebra lineal. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A, **5**, 147—151 (1946).

[2] Bonnesen, T., u. W. Fenchel: Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934.

[3] Hardy, G. H., J. E. Littlewood, and G. Pólya: Inequalities. Cambridge 1934.

[4] Hoffman, A. J., and H. W. Wielandt: The variation of the spectrum of a normal matrix. Duke Math. J. **20**, 37—39 (1953).

[5] Horn, A.: Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix. Am. J. Math. **76**, 620—630 (1954).

[6] Mirsky, L.: Proofs of two theorems on doubly-stochastic matrices. Proc. Am. Math. Soc. **9**, 371—374 (1958).

(Received April 24, 1961)

CHRISTIAN, U.
Math. Annalen 144, 422—459 (1961)

Über die Multiplikatorensysteme gewisser Kongruenzgruppen ganzer Hilbert-Siegelscher Modulsubstitutionen

Von

ULRICH CHRISTIAN in Göttingen

Für die Theorie der automorphen Funktionen ist es nicht ohne Interesse, die Multiplikatorensysteme automorpher Formen zu untersuchen und in geeigneter Weise zu klassifizieren. H. POINCARÉ, C. L. SIEGEL und F. CONFORTO lösten dieses Problem für die Abelschen Funktionen. Später betrachtete R. C. GUNNING allgemeiner Gruppen mit kompaktem Fundamentalbereich. Ein Beispiel für einen nicht kompakten Fundamentalbereich liefert die Gruppe der ganzen Modulsubstitutionen n-ten Grades, deren Multiplikatorensysteme ich [2, 3] kürzlich klassifizierte. Die letztgenannten Untersuchungen werden in der vorliegenden Arbeit auf gewisse Kongruenzgruppen ganzer Modulsubstitutionen n-ten Grades über total-reellen endlichen algebraischen Zahlkörpern übertragen.

Diese Arbeit wurde am Institute for Advanced Study in Princeton, N. J. geschrieben und von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen als Habilitationsschrift angenommen.

Kapitel I. Vorbereitende Bemerkungen

§ 1. *Bezeichnungen und Definitionen*

Eine Matrix M von ϱ Zeilen und σ Spalten heiße $\varrho \times \sigma$ Matrix; $\operatorname{Rg} M$ sei der Rang und M' die zu M transponierte Matrix. Im Falle $\varrho = \sigma$ mögen die Symbole $\operatorname{Sp} M$ und $\operatorname{Det} M$ Spur und Determinante bezeichnen, und es werde $M[N] = N'MN$ mit einer $\varrho \times \tau$ Matrix N definiert. Eine reelle symmetrische $\varrho \times \varrho$ Matrix S nenne man positiv bzw. nicht negativ, falls die quadratische Form $S[x]$ für alle ϱ-reihigen reellen Spalten $x \neq 0$ positiv bzw. nicht negativ ist. $m_{\iota\varkappa}$ seien die Elemente und $m_{\iota\iota} = m_\iota$ die Diagonalelemente der Matrix M. Im Falle $m_{\iota\varkappa} = 0$ $(\iota \neq \varkappa)$ schreiben wir $M = [m_1, \ldots, m_\varrho]$ und nennen M eine Diagonalmatrix. Mit 0, E, e_ι werden Nullmatrix, Einheitsmatrix und ι-te Einheitsspalte bezeichnet; Zeilen- und Spaltenzahl ergibt sich dabei später aus dem Zusammenhang. Zur Abkürzung setze man

$$\operatorname{Abs} M = \operatorname{Max} |m_{\iota\varkappa}|$$

für irgendeine komplexe $\varrho \times \sigma$ Matrix M und ferner

$$E\{M\} = e^{2\pi i \operatorname{Sp} M}, \quad E(M) = e^{\operatorname{Sp} M}$$

bei $\varrho = \sigma$.

Es sei $\mathfrak{a}$ ein algebraischer Zahlkörper vom Grade m über dem Körper der rationalen Zahlen. Ist jedem der konjugierten Körper $\mathfrak{a}^{(\mu)}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ durch eine Vorschrift eine Matrix $M^{(\mu)}$ zugeordnet, so werde

$$\mathrm{Tr}\, M = M^{(1)} + \cdots + M^{(m)}$$

und

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} M^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M^{(m)} \end{pmatrix}$$

definiert. Wir sagen, die Matrix M liege in $\mathfrak{a}$, wenn alle ihre Elemente zu $\mathfrak{a}$ gehören. In diesem Falle mögen $M^{(1)}, \ldots, M^{(m)}$ stets die zu M algebraisch konjugierten Matrizen bedeuten, $M = M_1$. Ferner heiße M ganz, wenn alle Elemente ganze Zahlen von $\mathfrak{a}$ sind. $\mathrm{Nm}\, a$ bezeichne die Norm einer Zahl $a \in \mathfrak{a}$.

Man nenne zwei komplexe Zahlen x und y kongruent, $x \equiv y$, wenn $x - y$ ganz-rational ist. $c_1(M_1, M_2, \ldots), \ldots, c_{25}(M_1, M_2, \ldots)$ sind reelle Konstanten, größer als 1, welche nur von bestimmten für die folgenden Betrachtungen festen Größen, gewissen Matrizen $M_1, M_2, \ldots$ sowie von gewissen Fourierreihen abhängen. Näheres ergibt sich dabei später aus dem Zusammenhang.

§ 2. Algebraische Zahlen

Es bezeichne $\mathfrak{a}$ einen total-reellen algebraischen Zahlkörper vom Grade m über dem Körper der rationalen Zahlen und $\mathfrak{d}$ die Differente von $\mathfrak{a}$.

Hilfssatz 1: *Gegeben sei ein Ideal $\mathfrak{h} \neq 0$ mit der Basis $h_1, \ldots, h_m$. Durch die Zuordnung*

$$\mathrm{Tr}(t h_\mu) = s_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m),$$

wird eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Zahlen $t \in \mathfrak{a}$ auf die Gesamtheit der rationalen Zeilen $(s_1, \ldots, s_m)$ definiert. Die $s_1, \ldots, s_m$ sind genau dann sämtlich ganz, wenn t dem Ideal $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{h}^{-1}$ angehört.

Beweis: Siehe [5, § 36].

ω bedeute die Einheitengruppe von $\mathfrak{a}$. Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{q} \neq 0$ bezeichne ferner:

$\omega(\mathfrak{q})$ die Gruppe der $f \in \omega$ mit $f \equiv 1 \bmod \mathfrak{q}$;

$\omega^+(\mathfrak{q})$ die Gruppe der $f \in \omega(\mathfrak{q})$ mit $\mathrm{Nm} f = 1$;

$\varphi(\mathfrak{q})$ die Anzahl der primen Restklassen $\bmod \mathfrak{q}$.

Hilfssatz 2: *Es sei ξ eine Permutation der Zahlen* $1, \ldots, m$ *und $\varkappa$ ein Index des Intervalls* $1 \leqq \varkappa \leqq m - 1$. *Dann gibt es eine Einheit $f \in \omega^+(\mathfrak{q})$ mit*

$$f^{(\xi 1)} > f^{(\xi 2)} > \cdots > f^{(\xi \varkappa)} > 1 > f^{(\xi(\varkappa+1))} > \cdots > f^{(\xi m)} > 0\,. \tag{1}$$

Beweis: Aus [5, § 35] folgt die Existenz einer Einheit $f_0 \in \omega$, welche den Bedingungen

$$|f_0^{(\xi 1)}| > |f_0^{(\xi 2)}| > \cdots > |f_0^{(\xi \varkappa)}| > 1 > |f_0^{(\xi(\varkappa+1))}| > \cdots > |f_0^{(\xi m)}|$$

genügt. $f = f_0^{2\varphi(\mathfrak{q})}$ besitzt die in Hilfssatz 2 genannten Eigenschaften.

Die nachstehenden Größen werden nun für alle weiteren Betrachtungen fest gewählt.

1) *Der total-reelle Zahlkörper* $\mathfrak{a}$.

Hierdurch sind der Grad m von $\mathfrak{a}$, die Klassenzahl d sowie die Differente $\mathfrak{d}$ bestimmt.

2) *Ein beliebiges Ideal* $\mathfrak{h} \neq 0$.

Damit ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{h}^{-1}$ ebenfalls gegeben. $h = (h_1, \ldots, h_m)$ bedeute im folgenden eine Basis von $\mathfrak{h}$ und H die aus den zu h konjugierten Zeilen gebildete $m \times m$ Matrix.

3) *Eine natürliche Zahl* g, *für die das Ideal* $\frac{1}{2}\, g\mathfrak{g}$ *ganz ist.*

4) *Ein ganzes Ideal* $\mathfrak{q} \neq 0$.

Also sind auch $\omega(\mathfrak{q})$, $\omega^+(\mathfrak{q})$ und $q = \mathrm{Nm}\,\mathfrak{q}$ festgelegt.

5) *Die Gruppe* $\psi = \omega(\mathfrak{q})$ *oder* $\omega^+(\mathfrak{q})$.

Der Index $[\omega : \psi]$ ist endlich.

6) *Eine Menge* $\mathfrak{e} \subset \psi$ *mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Permutation* ξ *der Zahlen* $1, \ldots, m$ *und zu jedem Index* $\varkappa$ *des Intervalls* $1 \leqq \varkappa \leqq m - 1$ *gibt es genau ein* $f \in \mathfrak{e}$, *dessen Konjugierte die Ungleichungen* (1) *befriedigen. Wir schreiben* $\xi = \xi(f)$, $\varkappa = \varkappa(f)$ *für* $f \in \mathfrak{e}$.

$\mathfrak{e}$ enthält $(m!)\,(m - 1)$ Einheiten.

7) *Eine Gesamtheit* $\mathfrak{r}$ *von* 2^m *Elementen des Ideals* $\mathfrak{q}$, *so daß für ein beliebiges System von Vorzeichen* $\varepsilon_1 = \pm 1, \ldots, \varepsilon_m = \pm 1$ *ein und nur ein* $u \in \mathfrak{r}$ *den Bedingungen*

$$\operatorname{sgn} u^{(\mu)} = \varepsilon_\mu, \quad |u^{(\mu)}| > 1 \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

genügt.

Man setze

$$r = \mathrm{Max}\,|u^{(\mu)}|\,;$$

hierbei läuft μ von 1 bis m und u über $\mathfrak{r}$.

Hilfssatz 3: *Für ein positives reelles* γ *existieren höchstens* $c_1(\gamma + 1)^{m^2}$ *Zahlen* $t \in \mathfrak{g}$ *mit* $|t^{(\nu)}| \leqq \gamma$.

Beweis: Klar.

Hilfssatz 4: *Es seien* u, v *ganze Zahlen,* $\mathfrak{w}$ *ein ganzes von Null verschiedenes Ideal aus* $\mathfrak{a}$ *und* $(u, v, \mathfrak{w}) = 1$. *Dann gibt es eine ganze Zahl* $x \in \mathfrak{a}$, *derart, daß* $(u + fxv, \mathfrak{w}) = 1$ *für jedes* $f \in \omega$ *gilt.*

Beweis: In [8] wird die Richtigkeit der Behauptung für $f = 1$ gezeigt. Da in diesen Beweis nur die Teilbarkeitseigenschaften der Ideale (x), (u), (v), $\mathfrak{w}$ eingehen, so bekommt man sofort die in Hilfssatz 4 genannte Verallgemeinerung.

§ 3. Unimodulare Matrizen

Es bedeute n eine natürliche Zahl. Eine ganze $n \times n$ Matrix U aus $\mathfrak{a}$ heiße unimodular, falls $\mathrm{Det}\, U \in \omega$ gilt. Ferner sei:

$\Omega(n)$ die Gruppe aller n-reihigen unimodularen Matrizen;

$\Omega(n, \mathfrak{q})$ die Gruppe der $U \in \Omega(n)$ mit $U \equiv E \bmod \mathfrak{q}$;

$\Omega^+(n, \mathfrak{q})$ die Gruppe der $U \in \Omega(n, \mathfrak{q})$ mit $\mathrm{Nm}(\mathrm{Det}\, U) = 1$;

$\Psi(n) = \Omega(n, \mathfrak{q})$ oder $\Omega^+(n, \mathfrak{q})$, je nachdem $\psi = \omega(\mathfrak{q})$ oder $\omega^+(\mathfrak{q})$;

$\Xi(n)$ die Gruppe bestehend aus E, $-E$ oder E, je nachdem $-E \in \Psi(n)$ oder $-E \notin \Psi(n)$;

$$\Psi_0(n) = \Psi(n)/\Xi(n)\,.$$

Offenbar ist $\Psi(n)$ eine invariante Untergruppe endlichen Indexes von $\Omega(n)$ und $\operatorname{Det} U \in \psi$ für $U \in \Psi(n)$. Die Relation $(fE)\,U = U(fE)$ $(f \in \psi,\ U \in \Psi(n))$ zeigt, daß die Gruppe ψE zum Zentrum von $\Psi(n)$ gehört. Man nennt $\Psi(n)$ eine Kongruenzgruppe zu $\Omega(n)$ [7, 9, 10, 14].

Bei den weiteren Untersuchungen benutzen wir gelegentlich Induktion nach n und betrachten die Gruppen $\Psi(\nu)$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$. Hiervon abgesehen wird n als feste Größe aufgefaßt. Man setze

$$\Omega = \Omega(n), \quad \Psi = \Psi(n), \quad \Psi_0 = \Psi_0(n), \quad \Xi = \Xi(n).$$

Die folgenden Matrizen werden später benötigt.

1) $A_{\iota\varkappa}(u, v, w, x) = (a_{\iota\varkappa;\nu\mu})$: $a_{\iota\varkappa;\iota\iota} = u$, $a_{\iota\varkappa;\iota\varkappa} = v$, $a_{\iota\varkappa;\varkappa\iota} = w$, $a_{\iota\varkappa;\varkappa\varkappa} = x$, $a_{\iota\varkappa;\nu\nu} = 1$ $(\nu \neq \iota, \varkappa;\ \nu = 1, \ldots, n)$, $a_{\iota\varkappa;\nu\mu} = 0$ *sonst* $(\iota \neq \varkappa;\ \iota, \varkappa = 1, \ldots, n)$. $A_{\iota\varkappa}(u, v, w, x) \in \Psi(n)$ genau dann, wenn $\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \in \Psi(2)$.

2) $B_{\iota\varkappa}(v) = A_{\iota\varkappa}(1, v, 0, 1)$ $\quad (\iota \neq \varkappa;\ \iota, \varkappa = 1, \ldots, n)$. $B_{\iota\varkappa}(v) \in \Psi(n)$ genau dann, wenn $v \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}$.

3) $C_\iota(f) = [1, \ldots, f, 1, \ldots, 1]$, *wobei* f *an* ι*-ter Stelle steht* $(\iota = 1, \ldots, n)$. $C_\iota(f) \in \Psi(n)$ genau dann, wenn $f \in \psi$.

Die endlich vielen Matrizen $B_{\iota\varkappa}(u)$ $(\iota \neq \varkappa;\ \iota, \varkappa = 1, \ldots, n;\ u \in \mathfrak{r})$, $B_{\iota\varkappa}(\pm q)$ $(\iota \neq \varkappa;\ \iota, \varkappa = 1, \ldots, n)$, $C_\iota(f)$ $(\iota = 1, \ldots, n;\ f \in \mathfrak{e})$; fE $(f \in \mathfrak{e})$ fassen wir in der Menge $\mathfrak{c}$ zusammen.

Die nächsten drei Hilfssätze bekommt man ohne Mühe aus [8, 9].

Hilfssatz 5: *Gegeben sei eine n-zeilige Spalte u ganzer teilerfremder Zahlen aus $\mathfrak{o}$, und es bestehe die Kongruenz*

$$u \equiv e_\nu \bmod \mathfrak{q} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n).$$

Dann existiert eine Matrix $U \in \Psi$, so daß

$$u = U e_\nu$$

gilt $(n \geqq 2)$.

Beweis: Siehe [9]

Weiterhin bedeute W_ι eine Matrix von Ψ, deren ι-te Spalte e_ι ist. $W_{\iota\iota}$ gehe aus W_ι hervor, indem man die ι-te Zeile durch die ι-te Einheitszeile ersetzt. Bezeichnet $(w_1, \ldots, w_{\iota-1}, 1, w_{\iota+1}, \ldots, w_n)$ die ι-te Zeile der Matrix W_ι, so hat man

$$W_\iota = W_{\iota\iota} \prod_{\nu \neq \iota} B_{\iota\nu}(w_\nu). \tag{2}$$

Hilfssatz 6: *Jede Matrix $U \in \Psi$ gestattet eine Zerlegung*

$$U = B_{2n}(f_1 x)\, B_{1n}(f_2 y)\, W_n W_1;$$

hierbei sind f_1, f_2 beliebige Einheiten aus ω und x, y von f_1, f_2 unabhängige Zahlen des Ideals $\mathfrak{q}$ $(n \geqq 3)$.

Beweis: Es bedeute $u = (u_1, \ldots, u_n)'$ die erste Spalte von U. Im Falle $u_2 = \cdots = u_n = 0$ folgt die Behauptung mit $x = y = 0$, $W_n = A_{12}(u_1, 0, 0, u_1^{-1})$, $W_1 = W_n^{-1} U$. Jetzt seien $u_2, \ldots, u_n$ nicht sämtlich Null. Man setze

$$V = B_{2n}(-f_1 x)\, U$$

und wähle $x = 0$, wenn eine der Größen $u_2, \ldots, u_{n-1}$ von Null verschieden ist, $x = q$ bei $u_2 = \cdots = u_{n-1} = 0$, $u_n \neq 0$. Bezeichnet nun $v = (v_1, \ldots, v_n)'$ die erste Spalte der Matrix V, so verschwindet das Ideal $\mathfrak{w} = (v_2, \ldots, v_{n-1})$ nicht. Aus $(v_1, \mathfrak{w}, v_n) = 1$ sowie $v_1 \equiv 1 \bmod \mathfrak{q}$ ergibt sich $(v_1, \mathfrak{w}, \mathfrak{q}^d v_n) = 1$, wegen Hilfssatz 4 also $(v_1 - f_2 y v_n, \mathfrak{w}) = 1$ für $y = -y_0 \mathfrak{q}^d$ und ein passendes ganzes $y_0 \in \mathfrak{a}$. Die nach Konstruktion teilerfremden $n - 1$ ersten Elemente der ersten Spalte von

$$B_{1n}(-f_2 y) V$$

fasse man zu der Spalte w zusammen. Hilfssatz 5 liefert $w = U_1 e_1$ mit einem $U_1 \in \Psi(n-1)$. Wir definieren

$$W_n = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B_{n1}(v_n), \quad W_1 = W_n^{-1} B_{1n}(-f_2 y) V$$

und bekommen das gewünschte Resultat.

Hilfssatz 7: *Die Matrizen $A_{\iota\varkappa}(u, v, w, x) \in \Psi$ erzeugen die Gruppe Ψ $(n \geqq 2)$.*

Beweis: Man siehe [9] oder benutze (2), Hilfssatz 6 und Induktion nach n.

Hilfssatz 8: *Es sei K eine reelle $n \times v$ Matrix und δ eine positive reelle Zahl. Dann gibt es ein rationales $U \in \Psi$ sowie eine rationale $n \times v$ Matrix $L = (l_{\iota\varkappa})$ mit $l_{\iota\varkappa} = 0$ $(\iota > \varkappa)$, so daß*

$$\mathrm{Abs}(K - UL) < \delta$$

ist.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $n > 1$ und K als rational voraussetzen. Zuerst betrachten wir den Fall $v = 1$. Dann gilt

$$K = ak$$

mit einer rationalen Zahl a und einer ganzen Spalte $k = (k_1, \ldots, k_n)' \equiv 0 \bmod q$. Für $k_2 = \cdots = k_n = 0$ ist Hilfssatz 8 trivialerweise richtig. Anderenfalls führe man den positiv genommenen größten gemeinsamen Teiler $b = (k_2, \ldots, k_n)$ ein, bilde die Spalte $j = (k_1 b^\varrho + 1, k_2 b^\varrho, \ldots, k_n b^\varrho)'$ und wähle die natürliche Zahl ϱ so groß, daß

$$\mathrm{Abs}(ak - ab^{-\varrho} j) < \delta$$

wird. Geht eine Primzahl p im größten gemeinsamen Teiler $b^{\varrho+1}$ der $n - 1$ letzten Elemente von j auf, so folgt p/b, d. h. $p \nmid k_1 b^\varrho + 1$. Also sind die Elemente von j teilerfremd. Auf Grund von $j \equiv e_1 \bmod b$ und Hilfssatz 5 gibt es eine rationale unimodulare Matrix U, welche den Bedingungen

$$U \equiv E \bmod b, \quad \mathrm{Det}\, U = 1, \quad j = U e_1$$

genügt und wegen q/b in Ψ liegt. Für $L = ab^{-\varrho} e_1$ erhält man

$$\mathrm{Abs}(K - UL) < \delta\,.$$

Zur Erledigung des Falles $v > 1$ benutzen wir Induktion nach v. Die Behauptung gelte für $v - 1$; ferner sei

$$K = (K_1 k),\ \mathrm{Abs}(K_1 - VL_1) < \delta,\ L_1 = (l_{\iota\varkappa}) : l_{\iota\varkappa} = 0\ (\iota > \varkappa),\ j = V^{-1} k$$

mit $n \times (\nu - 1)$ Matrizen K_1, L_1 sowie n-reihigen Spalten k, j und rationalem $V \in \Psi$. Bei $n \leqq \nu$ definieren wir $U = V$, $L = (L_1 j)$ und sind fertig. Ist $n > \nu$, so werde

$$j = \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix}$$

gesetzt, wobei j_1 aus den $\nu - 1$ ersten und j_2 aus den $n - \nu + 1$ letzten Elementen von j bestehe. Man wähle eine $(n - \nu + 1)$-reihige Spalte l_2, deren $n - \nu$ letzte Elemente Null sind und eine rationale Matrix $V_1 \in \Psi\,(n - \nu + 1)$, derart, daß

$$\operatorname{Abs}(j_2 - V_1 l_2) < \delta (n \operatorname{Abs} V)^{-1}$$

wird, bilde

$$l = \begin{pmatrix} j_1 \\ l_2 \end{pmatrix}, \quad L = (L_1 l), \quad U = V \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & V_1 \end{pmatrix}$$

und die Behauptung folgt.

§ 4. *Quadratische Formen*

Im Raume $\mathfrak{R}$ der reellen symmetrischen $n \times n$ Matrizen S betrachte man die Bereiche

$$\mathfrak{S} : S \geqq 0, \quad \mathfrak{S}_0 : S > 0, \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{R} - \mathfrak{S}\,.$$

Ferner ordnen wir jedem der konjugierten Zahlkörper $\mathfrak{a}^{(\mu)}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ eine Matrix $S^{(\mu)} \in \mathfrak{R}$ zu, bezeichnen mit $\tilde{\mathfrak{R}}$ die Gesamtheit der Matrizen $\tilde{S}$, d. h. $\tilde{\mathfrak{R}}$ ist das topologische Produkt von m Exemplaren $\mathfrak{R}$, und führe die Gebiete

$$\tilde{\mathfrak{S}} : \tilde{S} \geqq 0, \quad \tilde{\mathfrak{S}}_0 : \tilde{S} > 0, \quad \tilde{\mathfrak{T}} = \tilde{\mathfrak{R}} - \tilde{\mathfrak{S}}$$

ein.

Hilfssatz 9: *Es seien $S^{(1)}, \ldots, S^{(\alpha)} \in \mathfrak{T}$; $1 \leqq \alpha \leqq m$ und ξ eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, m$. Dann gilt*

$$\operatorname{Sp}(S^{(\mu)}[U^{(\xi\mu)}]) < 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, \alpha)$$

für mindestens eine Matrix $U \in \Psi$.

Beweis: Zum Beweise verwenden wir eine Methode aus [10]. Wegen $S^{(\mu)} \in \mathfrak{T}$ gibt es reelle Spalten $k^{(\xi\mu)}$ mit

$$S^{(\mu)}[k^{(\xi\mu)}] < 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, \alpha)\,. \tag{3}$$

Indem man die $k^{(\xi\mu)}$ durch die Konjugierten einer Spalte k aus $\mathfrak{a}$ approximiert und k mit einer passenden ganzen rationalen Zahl multipliziert, erhält man (3) für die Konjugierten $k^{(\xi\mu)}$ einer gewissen ganzen Spalte k aus $\mathfrak{a}$. Im Falle $n = 1$ gilt Hilfssatz 9 trivialerweise. Für $n > 1$ ist die Gleichung $l'k = 0$ durch eine ganze Spalte $l \neq 0$ aus $\mathfrak{a}$ lösbar und

$$U = E + vkl' \in \Psi$$

falls q/v. Bei rationalem v folgt

$$\operatorname{Sp}(S^{(\mu)}[U^{(\xi\mu)}]) = \operatorname{Sp} S^{(\mu)} + 2v\, l^{(\xi\mu)\prime} S^{(\mu)} k^{(\xi\mu)} + v^2 (l'l)^{(\xi\mu)} S^{(\mu)}[k^{(\xi\mu)}] \quad (\mu = 1, \ldots, \alpha)\,;$$

diese Ausdrücke werden $-\infty$ für $|v| \to \infty$.

Hilfssatz 10: *Zu jeder Matrix $\tilde{S} \in \tilde{\mathfrak{T}}$ und jedem reellen δ gibt es ein $U \in \Psi$ mit*

$$\mathrm{Sp}(\tilde{S}[\tilde{U}]) < \delta \qquad (n > 1 \text{ oder } m > 1)\,.$$

Beweis: Bei $n > 1$, $m = 1$ ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus dem Beweis von Hilfssatz 9. Ist $m > 1$, so sei $T^{(\varrho)}$ ein in $\mathfrak{T}$ gelegenes Kästchen der Matrix $\tilde{T}$;

$V \in \Psi$; $\mathrm{Sp}(T^{(\varrho)}[V^{(\varrho)}]) < 0$; $f \in \psi$; $f^{(\varrho)} > 1$, $1 > f^{(\mu)} > 0$

$$(\mu \neq \varrho;\ \mu = 1, \ldots, m;\ 1 \leq \varrho \leq m)\,;$$

$$U = f^{\sigma} V\,.$$

Die Ungleichung $\mathrm{Sp}(\tilde{S}[\tilde{U}]) > \delta$ besteht nunmehr für alle genügend großen natürlichen Zahlen σ.

Wir kommen nun zur Reduktionstheorie quadratischer Formen [6, 11, 13]. Der Bereich $\tilde{\mathfrak{R}} \subset \tilde{\mathfrak{R}}$ werde durch die nachstehenden Ungleichungen definiert:

1) $$\mathrm{Tr}\, S[k] \geq \mathrm{Tr}\, s_\iota \qquad (\iota = 1, \ldots, n)$$

für alle ganzen rationalen Spalten $k = (k_1, \ldots, k_n)'$ aus $\mathfrak{a}$ mit $(k_\iota, k_{\iota+1}, \ldots, k_n) \neq 0$.

2) $$s_{1\iota}^{(1)} \geq 0 \qquad (\iota = 2, \ldots, n)\,.$$

Folgende Eigenschaften von $\tilde{\mathfrak{R}}$ ergeben sich aus [6]. $\mathfrak{R}$ ist eine in $\mathfrak{S}$ gelegene konvexe Pyramide mit der Spitze im Nullpunkt, welche von endlich vielen Hyperebenen begrenzt wird. Übt man auf jede der Matrizen $S^{(\mu)} \in \mathfrak{S}_0$ $(1 \leq \mu \leq m)$ die Transformation

$$S^{(\mu)} = T^{(\mu)}[D^{(\mu)}]$$

mit einer Diagonalmatrix $T^{(\mu)} = [t_1^{(\mu)}, \ldots, t_n^{(\mu)}]$ und einer Dreiecksmatrix $D^{(\mu)} = (d_{\iota\varkappa}^{(\mu)}) : d_\iota^{(\mu)} = 1$, $d_{\iota\varkappa}^{(\mu)} = 0$ $(\iota > \varkappa)$ aus, so ist $\tilde{D}$ beschränkt und es bestehen die Ungleichungen

(4) $$c_2^{-1} s_\iota^{(\mu)} \leq t_\iota^{(\mu)} \leq c_2 s_\iota^{(\mu)} \quad (\iota = 1, \ldots, n;\ \mu = 1, \ldots, m)$$

falls $\tilde{S} \in \tilde{\mathfrak{R}}_0 = \tilde{\mathfrak{R}} \cap \tilde{\mathfrak{S}}_0$. Weiter gilt

(5) $$s_\iota^{(\mu)} \leq c_2 s_\varkappa^{(\nu)} \quad (1 \leq \iota \leq \varkappa \leq n;\ \mu, \nu = 1, \ldots, m;\ \tilde{S} \in \tilde{\mathfrak{R}})\,,$$

(6) $$|s_{\iota\varkappa}^{(\mu)}| \leq c_2 s_\iota^{(\nu)} \quad (\iota, \varkappa = 1, \ldots, n;\ \mu, \nu = 1, \ldots, m;\ \tilde{S} \in \mathfrak{R})\,.$$

Wir setzen $S_0^{(\mu)} = [s_1^{(\mu)}, \ldots, s_n^{(\mu)}]$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ und beweisen

(7) $$c_3^{-1} \tilde{S}_0 \leq \tilde{S} \leq c_3 \tilde{S}_0 \qquad (\tilde{S} \in \tilde{\mathfrak{R}})\,.$$

Aus Stetigkeitsgründen kann man $\tilde{S} \in \tilde{\mathfrak{R}}_0$ annehmen, und wegen (4) genügt es,

$$c_4^{-1} \tilde{T}[\tilde{x}] \leq \tilde{T}[\tilde{D}\tilde{x}] \leq c_4 \tilde{T}[\tilde{x}]$$

für alle reellen Spalten $\tilde{x}$ zu zeigen. Mit $K^{(\mu)} = [\sqrt{t_1^{(\mu)}}, \ldots, \sqrt{t_n^{(\mu)}}] > 0$ $(1 \leq \mu \leq m)$ machen wir die Substitution $\tilde{y} = \tilde{K}\tilde{x}$ und erhalten die äquivalente Ungleichung

$$c_4^{-1} \tilde{y}'\tilde{y} \leq \tilde{y}'\tilde{L}'\tilde{L}\tilde{y} \leq c_4 \tilde{y}'\tilde{y}\,.$$

Hierbei bedeuten

$$L^{(\mu)} = K^{(\mu)} D^{(\mu)} K^{(\mu)-1} = (l_{\iota\varkappa}^{(\mu)}) : l_{\iota\varkappa}^{(\mu)} = 0 \; (\iota > \varkappa), \; l_{\iota}^{(\mu)} = 1, \; l_{\iota\varkappa}^{(\mu)} = \sqrt{\frac{t_\iota^{(\mu)}}{t_\varkappa^{(\mu)}}} \, d_{\iota\varkappa}^{(\mu)} \; (\iota < \varkappa)$$

ebenfalls Dreiecksmatrizen, deren Elemente vermöge (4), (5) beschränkt sind. Daraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 11: *Es seien $\hat{S}, \hat{T} \in \tilde{\mathfrak{K}}_0$; ferner gelte $\hat{T} = \hat{S}[\hat{K}]$ mit einer nicht ausgearteten Matrix K aus $\mathfrak{a}$. Sind dann die Nenner der Matrizen $\hat{K}, \hat{K}^{-1}$ unabhängig von $\hat{S}, \hat{T}$ beschränkt, so gehört K einer endlichen Menge an.*

Beweis: Siehe [6].

Hilfssatz 12: *Es gibt endlich viele konvexe Pyramiden $\tilde{\mathfrak{K}}_0(\beta) \subset \tilde{\mathfrak{K}}_0$ und $n \times n$ Matrizen $M(\beta)$ aus $\mathfrak{a}$ $(\beta = 1, \ldots, b)$, derart, daß*

$$\tilde{\mathfrak{M}}_0 = \bigcup_\beta \tilde{\mathfrak{K}}_0(\beta)\,[\hat{M}(\beta)]$$

einen Fundamentalbereich der Gruppe Ω im Raume $\tilde{\mathfrak{S}}_0$ bildet; d. h. zu jedem $\hat{S} \in \tilde{\mathfrak{S}}_0$ existiert ein $U \in \Omega$ mit $\hat{S}[\hat{U}] \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$; ferner ist der Durchschnitt $\tilde{\mathfrak{M}}_0[\hat{U}] \cap \tilde{\mathfrak{M}}_0$ für nur endlich viele $U \in \Omega$ nicht leer.

Bezeichnet $\tilde{\mathfrak{K}}(\beta)$ die Abschließung von $\tilde{\mathfrak{K}}_0(\beta)$ in $\tilde{\mathfrak{K}}$ und wird

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \bigcup_\beta \tilde{\mathfrak{K}}(\beta)\,[\hat{M}(\beta)]$$

gesetzt, so gilt

$$\tilde{\mathfrak{K}}_0(\beta) = \tilde{\mathfrak{K}}(\beta) \cap \tilde{\mathfrak{S}}_0 \; (\beta = 1, \ldots, b), \; \tilde{\mathfrak{M}}_0 = \tilde{\mathfrak{M}} \cap \tilde{\mathfrak{S}}_0 \, .$$

Beweis: Siehe [6].

$\tilde{\mathfrak{P}}$ bedeute die abgeschlossene konvexe Pyramide, bestehend aus allen Matrizen $\hat{S} \in \tilde{\mathfrak{K}}$, welche den Ungleichungen

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{Sp} \hat{S} \leqq \operatorname{Sp}(\hat{S}[\hat{U}]) \qquad (U \in \Psi)$$

genügen. Für $n > 1$ oder $m > 1$ gehört $\tilde{\mathfrak{P}}$ wegen Hilfssatz 10 zu $\tilde{\mathfrak{S}}$. Gilt $\hat{S} \in \tilde{\mathfrak{S}}_0$ oder $\hat{S} \in \tilde{\mathfrak{S}}$ und S aus $\mathfrak{a}$, so liegen die Zahlwerte $\operatorname{Sp}(\hat{S}[\hat{V}])$, wenn V über Ψ läuft, diskret, und unter ihnen gibt es einen kleinsten. Also ist $\hat{S}[\hat{V}] \in \tilde{\mathfrak{P}}$ für wenigstens ein $V \in \Psi$. Es sei $\tilde{\mathfrak{P}}_0 = \tilde{\mathfrak{P}} \cap \tilde{\mathfrak{S}}_0$ und $\mathfrak{x}$ die Gesamtheit der Matrizen $U \in \Omega$, für welche der Durchschnitt $\tilde{\mathfrak{P}}_0 \cap \tilde{\mathfrak{M}}_0[\hat{U}]$ nicht leer ist.

Hilfssatz 13: *Die Menge $\mathfrak{x}$ besitzt nur endlich viele Elemente.*

Beweis: Für $m = 1$, $\mathfrak{q} = (1)$ wurde Hilfssatz 13 schon in [1] bewiesen. Die dabei verwendete Methode führt auch jetzt zum Ziel. Wir zeigen den folgenden Sachverhalt:

(I) *Es sei A der Repräsentant einer festen Restklasse von Ω* mod Ψ, *ferner M eine bestimmte der Matrizen $M(1), \ldots, M(b)$ und $\Phi = MA\Psi$. Nun bezeichne*

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

eine Matrix der Klasse Φ, deren $n - \varrho$ $(1 \leqq \varrho \leqq n)$ letzte Zeilen, zusammengefaßt in der Matrix B_0, fest gegeben sind. Gilt dann

$$\text{(9)} \qquad \hat{S} \in \tilde{\mathfrak{K}}_0, \; \hat{S}[\hat{X}] \in \tilde{\mathfrak{P}}_0 \, ,$$

so gehört die letzte Zeile von X_1 einer endlichen, nur von B_0 abhängigen Menge an.

Induktiv liefert (I), daß nur endlich viele Matrizen $X \in \Phi$ den Bedingungen (9) genügen. Da auch für A und M höchstens endlich viele Möglichkeiten in Frage kommen, so folgt Hilfssatz 13 aus (I).

Zum Beweise von (I) zerspalte man die Matrizen

$$S^{(\mu)} = \begin{pmatrix} S_1^{(\mu)} & S_2^{(\mu)} \\ S_2^{(\mu)\prime} & S_3^{(\mu)} \end{pmatrix} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

in $\varrho \times \varrho$, $\varrho \times (n-\varrho)$, $(n-\varrho) \times \varrho$ und $(n-\varrho) \times (n-\varrho)$ Kästchen. Es folgt

$$\mathrm{Sp}(\tilde{S}[\tilde{X}]) = \mathrm{Sp}(\widetilde{S_1[X_1]}) + 2\,\mathrm{Sp}(\widetilde{X_1' S_2 B_0}) + \mathrm{Sp}(\widetilde{S_3[B_0]})\,.$$

Ersetzt man hierin X durch eine feste, nur von B_0 abhängige Matrix

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_0 \end{pmatrix} \in \Phi\,,$$

so wird entsprechend

$$\mathrm{Sp}(\tilde{S}[\tilde{B}]) = \mathrm{Sp}(\widetilde{S_1[B_1]}) + 2\,\mathrm{Sp}(\widetilde{B_1' S_2 B_0}) + \mathrm{Sp}(\widetilde{S_3[B_0]})\,.$$

Die ersten zwei Ausdrücke auf der rechten Seite dieser Gleichung sind wegen $\tilde{S} \in \tilde{\mathfrak{K}}_0$ und (5), (6) nicht größer als $c_5(B_0) s_\varrho^{(1)}$. Aus $\tilde{S}[\tilde{X}] \in \tilde{\mathfrak{P}}_0$ bekommt man $\mathrm{Sp}(\tilde{S}[\tilde{X}]) \leqq \mathrm{Sp}(\tilde{S}[\tilde{B}])$; mithin

$$c_5(B_0) s_\varrho^{(1)} \geqq \mathrm{Sp}(\widetilde{S_1[X_1]}) + 2\,\mathrm{Sp}(\widetilde{X_1' S_2 B_0})\,. \tag{10}$$

Es seien $x_1, \ldots, x_\varrho$ die Zeilen der Matrix X_1. Unter Benutzung von (5), (6), (7) schätzen wir die rechte Seite der Ungleichungen (10) weiter nach unten ab. Es folgt

$$c_5(B_0) s_\varrho^{(1)} \geqq (c_2 c_3)^{-1} \{ s_\varrho^{(1)} \sqrt{\mathrm{Tr}(x_\varrho' x_\varrho)} \left(\sqrt{\mathrm{Tr}(x_\varrho' x_\varrho)} - c_6(B_0) \right) + \Sigma \} \tag{11}$$

mit

$$\Sigma = \sum_{\iota=1}^{\varrho-1} s_\iota^{(1)} \sqrt{\mathrm{Tr}(x_\iota' x_\iota)} \left(\sqrt{\mathrm{Tr}(x_\iota' x_\iota)} - c_6(B_0) \right).$$

In Σ lasse man die positiven Glieder fort. Für die nicht positiven Summanden gilt

$$\sqrt{\mathrm{Tr}(x_\iota' x_\iota)} \leqq c_6(B_0)\,,$$

vermöge (5) somit $\Sigma > -c_7(B_0) s_\varrho^{(1)}$, auf Grund von (11) also

$$c_8(B_0) \geqq \sqrt{\mathrm{Tr}(x_\varrho' x_\varrho)} \left(\sqrt{\mathrm{Tr}(x_\varrho' x_\varrho)} - c_6(B_0) \right).$$

Dieses liefert schließlich $\mathrm{Tr}(x_\varrho' x_\varrho) \leqq c_9(B_0)$ und damit die Beschränktheit aller Konjugierten der Zeile x_ϱ. Weil andererseits die Nenner der Matrizen aus Φ beschränkt sind, so kommen für x_ϱ, d. h. die letzte Zeile der Matrix X_1, nur endlich viele Möglichkeiten in Frage.

(I) und Hilfssatz 13 sind damit bewiesen.

Bedeutet $\mathfrak{y}$ die Gesamtheit der Matrizen $M(\beta) U$ ($\beta = 1, \ldots, b$; $U \in \mathfrak{x}$), so folgt

$$\tilde{\mathfrak{P}}_0 \subset \bigcup_{U \in \mathfrak{x}} \mathfrak{M}_0[\tilde{U}] \subset \bigcup_{K \in \mathfrak{y}} \tilde{\mathfrak{K}}_0[\tilde{K}] \tag{12}$$

und durch Bildung der Abschließung

(13) $$\tilde{\mathfrak{P}} \subset \bigcup_{U \in \mathfrak{x}} \tilde{\mathfrak{M}}[\tilde{U}] \subset \bigcup_{K \in \mathfrak{y}} \tilde{\mathfrak{R}}[\tilde{K}]\,.$$

Wegen der Hilfssätze 12, 13 besitzt die Pyramide $\tilde{\mathfrak{P}}_0$ bei Substitutionen von Ω mit nur endlich vielen ihrer Bilder einen nicht leeren Durchschnitt. $\mathfrak{u}$ bezeichne die Gesamtheit der endlich vielen Matrizen $U \in \Psi$, für welche $\tilde{\mathfrak{P}}_0[\tilde{U}] \cap \tilde{\mathfrak{P}}_0$ nicht leer ist.

Hilfssatz 14: *Eine Matrix $\tilde{S} \in \tilde{\mathfrak{R}}$ liegt dann und nur dann in $\tilde{\mathfrak{P}}$, wenn die Ungleichungen*

$$\operatorname{Sp} \tilde{S} \leqq \operatorname{Sp}(\tilde{S}[\tilde{U}]) \qquad (U \in \mathfrak{u})$$

gelten.

Beweis: Man benutze dieselben geometrischen Überlegungen, wie beim Beweise des entsprechenden Satzes für den Fundamentalbereich $\tilde{\mathfrak{M}}$ in der Reduktionstheorie quadratischer Formen [6, 11, 13].

Hilfssatz 15: *Es gibt eine endliche Menge $\mathfrak{v} \in \Psi$ mit folgender Eigenschaft. Sind zwei Matrizen $\tilde{S}$, $\tilde{T} \in \tilde{\mathfrak{P}}$ durch eine Matrix aus Ψ ineinander transformierbar, so besteht eine Beziehung*

$$\tilde{T} = \tilde{S}[\tilde{U}] \qquad (U \in \mathfrak{v})\,.$$

Beweis: Es sei

$$\tilde{T} = \tilde{S}[\tilde{V}], \quad V \in \Psi;$$

$$\tilde{S} = \tilde{S}^*[\tilde{K}], \quad \tilde{T} = \tilde{T}^*[\tilde{L}], \quad K, L \in \mathfrak{y}, \quad \tilde{S}^*, \tilde{T}^* \in \tilde{\mathfrak{R}};$$

(14) $$X = K V L^{-1};$$

$$\tilde{T}^* = \tilde{S}^*[\tilde{X}]\,.$$

Als Folge der Ungleichungen (5), (7) besitzen sämtliche Matrizen $S^{(\mu)}$, $T^{(\mu)}$, $S^{*(\mu)}$, $T^{*(\mu)}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ denselben Rang ϱ, und es gilt

$$S^{*(\mu)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_1^{(\mu)} \end{pmatrix}, \quad T^{*(\mu)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_1^{(\mu)} \end{pmatrix} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

mit $\varrho \times \varrho$ Matrizen $S_1^{(\mu)}$, $T_1^{(\mu)}$. Hieraus bekommt man

(15) $$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix},$$

wobei X_1 eine $(n - \varrho) \times (n - \varrho)$, X_2 eine $(n - \varrho) \times \varrho$, X_4 eine $\varrho \times \varrho$ Matrix ist. X, X^{-1}, also auch X_4, X_4^{-1} haben beschränkte Nenner; $\tilde{S}_1$, $\tilde{T}_1$ liegen in dem Bereich $\tilde{\mathfrak{R}}_0$ ϱ-ten Grades; $\tilde{T}_1 = \tilde{S}_1[\tilde{X}_4]$. Auf Grund von Hilfssatz 11 gibt es daher für X_4 nur endlich viele Möglichkeiten. In (14) durchlaufe jetzt V alle Elemente der Gruppe Ψ, bei welchen (15) mit einer festen Matrix X_4 gilt; X_1, X_2 können von V abhängen. Aus der Gesamtheit dieser V wählen wir einen Repräsentanten U. Offenbar ist $\tilde{T} = \tilde{S}[\tilde{U}]$. Die Matrix U hängt nur von den endlich vielen Matrizen K, L, X_4 ab und gehört somit einer endlichen Menge an. Damit ist Hilfssatz 15 bewiesen.

Hilfssatz 16: *Jede Matrix $\tilde{S} \in \tilde{\mathfrak{S}}_0$ gestattet eine Darstellung*

$$\tilde{S} = p_1 \tilde{U}_1 \tilde{U}_1' + \cdots + p_\alpha \tilde{U}_\alpha \tilde{U}_\alpha' \qquad (p_1, \ldots, p_\alpha > 0;\ U_1, \ldots, U_\alpha \in \Psi;\ \alpha \geqq 1).$$

Liegt S in $\mathfrak{a}$, so können $p_1, \ldots, p_\alpha$ rational gewählt werden.

Beweis: Es sei $\mathfrak{U}_0$ die Gesamtheit der $n \times n$ Matrizen

$$T = p_1 U_1 U_1' + \cdots + p_\alpha U_\alpha U_\alpha'.$$

Hierbei durchlaufen $p_1, \ldots, p_\alpha$ alle positiven reellen Zahlen und $U_1, \ldots, U_\alpha$ sämtliche rationalen Matrizen aus Ψ. Für α ist jede natürliche Zahl zugelassen. Ferner bezeichne $\mathfrak{U}$ die Abschließung von $\mathfrak{U}_0$ in $\mathfrak{R}$ und Rd $\mathfrak{S}$ den Rand von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{R}$. Wir wollen

$$\mathrm{Rd}\,\mathfrak{S} \subset \mathfrak{U} \tag{16}$$

nachweisen. Durchläuft $L = (l_{\iota\varkappa})$ alle ganzen rationalen $n \times (n-1)$ Matrizen, bei denen $l_{\iota\varkappa} = 0$ $(\iota > \varkappa)$ gilt, V sämtliche rationalen Elemente von Ψ und p die positiven reellen Zahlen, so liegen die Matrizen

$$T = p\,V L L' V'$$

wegen Hilfssatz 8 auf Rd $\mathfrak{S}$ dicht; es genügt daher, $T \in \mathfrak{U}$ für diese T zu zeigen. Mit ganzem rationalen $v \equiv 0 \bmod q$ bilde man die rationalen $n \times n$ Matrizen

$$U(v) = V(E + v(0\,L)) \in \Psi,$$

setze

$$T(v) = p v^{-2}\, U(v)\, U'(v) \in \mathfrak{U}_0$$

und aus $\lim\limits_{|v| \to \infty} T(v) = T$ folgt $T \in \mathfrak{U}$.

Nun ist $\mathfrak{U}_0$ eine in $\mathfrak{S}_0$ gelegene konvexe Pyramide; (16) zieht daher $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{S}_0$ nach sich.

Gegeben seien m Einheiten $f_1, \ldots, f_m \in \psi$ mit

$$f_\mu^{(\mu)} > 1, \quad 1 > f_\mu^{(\nu)} > 0 \qquad (\nu \neq \mu;\ \mu, \nu = 1, \ldots, m).$$

Für genügend großes natürliches σ sind die Gleichungen

$$S^{(\mu)} = f_1^{(\mu)2\sigma} T_1 + \cdots + f_m^{(\mu)2\sigma} T_m \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

eindeutig nach den T_ν auflösbar und $T_1, \ldots, T_m \in \mathfrak{S}_0$. Die Beziehung $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{S}_0$ besagt, daß jedes T_ν in der Gestalt

$$T_\nu = p_{\nu 1} U_{\nu 1} U_{\nu 1}' + \cdots + p_{\nu\alpha(\nu)} U_{\nu\alpha(\nu)} U_{\nu\alpha(\nu)}' \qquad (\nu = 1, \ldots, m)$$

mit rationalen $U_{\nu\iota} \in \Psi$ darstellbar ist. Wir numerieren die Zahlen $p_\eta = p_{\nu\iota}$ sowie die Matrizen $U_\eta = f_\nu^\sigma U_{\nu\iota}$ von $\eta = 1$ bis $\eta = \alpha = \alpha(1) + \cdots + \alpha(m)$ durch und erhalten

$$\tilde{S} = p_1 \tilde{U}_1' \tilde{U}_1 + \cdots + p_\alpha \tilde{U}_\alpha \tilde{U}_\alpha'.$$

Es bedeute β die Maximalzahl linear unabhängiger unter den Matrizen $\tilde{U}_\eta \tilde{U}_\eta'$ $(\eta = 1, \ldots, \alpha)$. Die Indizierung werde so gewählt, daß $\tilde{U}_1 \tilde{U}_1', \ldots, \tilde{U}_\beta \tilde{U}_\beta'$ linear unabhängig sind. Indem man $p_1, \ldots, p_\alpha$ ein bißchen abändert, kann man $p_{\beta+1}, \ldots, p_\alpha$ rational machen. Liegt nun S in $\mathfrak{a}$, so gehören die Größen $p_1, \ldots, p_\beta$ dem galoisschen Erweiterungskörper von $\mathfrak{a}$ an. Jeder Permutation der zu $\mathfrak{a}$

konjugierten Körper $\mathfrak{a}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(m)}$ entspricht eine Permutation der die $p_1, \ldots, p_\beta$ definierenden linearen Gleichungen. $p_1, \ldots, p_\beta$ sind bei diesen Permutationen, d. h. unter allen Automorphismen des Galoiskörpers invariant und folglich rational. Hilfssatz 16 ist bewiesen.

Es sei $\mathfrak{S}$ die Gesamtheit der symmetrischen $n \times n$ Matrizen $T = (t_{\iota\varkappa})$ mit t_ι, $2t_{\iota\varkappa} \in \mathfrak{g}$. Ferner heiße eine symmetrische $n \times n$ Matrix $S = (s_{\iota\varkappa})$ halbganz, wenn s_ι, $2s_{\iota\varkappa}$ ganze rationale Zahlen sind. Aus Hilfssatz 1 folgt, daß $\mathfrak{S}$ durch die Zuordnung

$$\mathrm{Tr}(T h_\mu) = S_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{17}$$

eineindeutig auf die sämtlichen Systeme halbganzer Matrizen $S_1, \ldots, S_m$ abgebildet wird.

Wir führen die nachstehenden Teilbereiche von $\mathfrak{S}$ ein:

$$\mathfrak{S}^+ : \tilde{T} \in \tilde{\mathfrak{S}},\ T \neq 0; \quad \mathfrak{S}^- : \tilde{T} \in \tilde{\mathfrak{T}};$$

$$\mathfrak{H}_\varrho : T \in \mathfrak{S}^+,\ \mathrm{Rg}\, T = \varrho \ (\varrho = 1, \ldots, n); \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{n-1} \cup \mathfrak{H}_{n-2} \cup \cdots \cup \mathfrak{H}_2 \cup \mathfrak{H}_1 .$$

Schließlich werde die $\mathfrak{S}^+$ umfassende Menge $\mathfrak{S}^*$ durch die Ungleichungen

$$t_\iota^{(\mu)} \geqq 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ \iota = 1, \ldots, n), \tag{18}$$

$$r(t_\iota^{(\mu)} + t_\varkappa^{(\mu)}) \geqq |t_{\iota\varkappa}^{(\mu)}| \quad (\mu = 1, \ldots, m;\ \iota \neq \varkappa;\ \iota, \varkappa = 1, \ldots, n) \tag{19}$$

definiert. Hilfssatz 3 liefert

Hilfssatz 17: *Für ein positives reelles γ existieren höchstens $c_{10}(\gamma + 1)^c$ $\left(c = m^2 \frac{n(n+1)}{2}\right)$ Matrizen $T \in \mathfrak{S}^*$ mit $\mathrm{Sp}\, \tilde{T} \leqq \gamma$.*

Für jede symmetrische $n \times n$ Matrix T aus $\mathfrak{a}$ bezeichne $\Lambda(T)$ die Gruppe aller U und $\Lambda'(T)$ die Gruppe aller U' mit $T[U] = T$, $U \in \Psi$. Durch die Zuordnung $U \leftrightarrow U'^{-1}$ wird ein Isomorphismus zwischen $\Lambda(T)$ und $\Lambda'(T)$ erklärt. Ferner gilt

$$\Lambda(T[V]) = V^{-1} \Lambda(T) V,\ \Lambda'(T[V]) = V' \Lambda'(T) V'^{-1} \qquad (V \in \Omega).$$

Also sind die sämtlichen Gruppen $\Lambda(T[V])$, $\Lambda'(T[W])$ $(V, W \in \Omega)$ isomorph.

§ 5. Ganze Modulsubstitutionen

Es sei $\mathfrak{Z}$ die verallgemeinerte obere Halbebene, bestehend aus allen komplexen symmetrischen $n \times n$ Matrizen $Z = X + iY$ mit positivem Imaginärteil Y. Man ordne jedem der konjugierten Körper $\mathfrak{a}^{(\mu)}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ eine Matrix $Z^{(\mu)} \in \mathfrak{Z}$ zu und bezeichne mit $\tilde{\mathfrak{Z}}$ die Gesamtheit der Matrizen $\tilde{Z}$, d. h. $\tilde{\mathfrak{Z}}$ ist das topologische Produkt von m Exemplaren $\mathfrak{Z}$.

Die ganzen Modulsubstitutionen [12,14]

$$\Theta \tilde{Z} = \tilde{Z}[\tilde{U}] + \tilde{S} \qquad (U \in \Psi) \tag{20}$$

bilden $\tilde{\mathfrak{Z}}$ eineindeutig auf sich ab; S bedeutet dabei eine symmetrische $n \times n$ Matrix, deren Elemente dem Ideal $\mathfrak{h}$ angehören. Die Gesamtheit der Transformationen (20) stellt eine in $\tilde{\mathfrak{Z}}$ diskontinuierliche Gruppe Δ dar. Jede ganze Modulsubstitution setzt sich eindeutig aus einer Translation $\tilde{Z} \to \tilde{Z} + \tilde{S}$ und

einer Rotation $\tilde{Z} \to \tilde{Z}[\tilde{U}]$ zusammen. Trägt man $-U$ statt U ein, so bekommt man dieselbe Rotation. Umgekehrt zieht die Gültigkeit der Gleichung $\tilde{Z}[\tilde{U}] = \tilde{Z}[\tilde{V}]$ für alle $\tilde{Z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}$ stets $U = \pm V$ nach sich. Die Rotationen entsprechen also umkehrbar eindeutig den Elementen der Gruppe Ψ_0.

§ 6. *Fourierreihen*

Es bedeute $P(\tilde{Z})$ eine in $\tilde{\mathfrak{Z}}$ definierte und dort holomorphe Funktion, welche unter den im vorigen Paragraphen genannten Translationen $\tilde{Z} \to \tilde{Z} + \tilde{S}$ invariant ist. $P(\tilde{Z})$ besitzt die Periode 1 in sämtlichen durch

$$Z^{(\nu)} = h_1^{(\mu)} W_1 + \cdots + h_m^{(\mu)} W_m,\ W_\nu = (w_{\nu;\iota\varkappa}) \quad (\mu, \nu = 1, \ldots, m;\ \iota, \varkappa = 1, \ldots, n)$$

erklärten Variablen $w_{\nu;\iota\varkappa}$ und gestattet daher eine Fourierentwicklung

$$P(\tilde{Z}) = \sum b(S_1, \ldots, S_m)\, E\{S_1 W_1 + \cdots + S_m W_m\}\,.$$

Die Summation ist über alle Systeme halbganzer Matrizen $S_1, \ldots, S_m$ zu erstrecken. Wegen (17) ergibt sich schließlich

$$P(\tilde{Z}) = \sum_T b(T)\, E\{\tilde{T}\tilde{Z}\}\,, \tag{21}$$

wobei jetzt, ebenso wie in den später auftretenden Fourierreihen, T die Elemente von $\mathfrak{S}$ durchläuft. Jede Funktion der Gestalt (21) hat die Perioden $\tilde{S}$.

Als nächstes untersuchen wir die Konvergenz von Fourierreihen der eben genannten Art.

Hilfssatz 18: *Die Fourierreihe* (21) *konvergiert dann und nur dann für* $\tilde{Z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}$, *falls es zu jeder Matrix* $U \in \Psi$ *und zu jeder positiven rationalen Zahl* p *eine Konstante* $c_{11}(U, p)$ *gibt, so daß die Ungleichungen*

$$\sum_{\mathrm{Sp}(\tilde{T}[\tilde{U}]) = \alpha} |b(T)| \leqq c_{11}(U, p)\, E(p\alpha) \quad (g\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{22}$$

gelten.

Beweis: Die Fourierreihe (21) ist genau dann konvergent, wenn sie absolut konvergiert. Durchläuft S den Bereich $\mathfrak{A}$, bestehend aus allen in a enthaltenen symmetrischen $n \times n$ Matrizen S mit $\tilde{S} \in \tilde{\mathfrak{S}}_0$, so liegen die Matrizen $\tilde{Y} = \frac{1}{2\pi}\tilde{S}$ in $\tilde{\mathfrak{S}}_0$ dicht. Es genügt daher, die Konvergenz der Reihe

$$\sum_T |b(T)|\, E(-\tilde{T}\tilde{S}) = \sum_\beta \Big(\sum_{\mathrm{Sp}(\tilde{T}\tilde{S}) = \beta} |b(T)|\Big)\, E(-\beta) \tag{23}$$

für $S \in \mathfrak{A}$ zu untersuchen. Hierbei sind β und die später auftretenden Summationsindizes rationale Zahlen, deren Nenner nur von S abhängt. Die Konvergenz der Summe (23) zieht offenbar

$$\sum_{\mathrm{Sp}(\tilde{T}\tilde{S}) = \beta} |b(T)| \leqq c_{12}(S)\, E(\beta) \tag{24}$$

nach sich.

Nun sei (24) für alle $S \in \mathfrak{A}$ mit gewissen Konstanten $c_{12}(S)$ richtig. Dann wird (23) durch

$$c_{12}\Big(\frac{1}{2}S\Big) \sum_{\beta \geqq 0} E\Big(-\frac{\beta}{2}\Big) + c_{12}(2S) \sum_{\beta > 0} E(\beta)$$

majorisiert und ist demnach konvergent. Die Ungleichungen (24) erweisen sich als notwendig und hinreichend für die Konvergenz der Fourierreihe (21).

Weiter zeigen wir: Eine Abschätzung der Gestalt (24) besteht für $S = S_1 + S_2$, wenn sie für $2S_1$ und $2S_2$ richtig ist. Aus $\mathrm{Sp}(\hat{T}\tilde{S}) = \beta$ folgt nämlich $\mathrm{Sp}(\hat{T}\, 2\tilde{S}_1) \leqq \beta$ oder $\mathrm{Sp}(\hat{T}\, 2\tilde{S}_2) \leqq \beta$, also

$$\sum_{\mathrm{Sp}(\hat{T}\tilde{S})=\beta} |b(T)| \leqq \sum_{\gamma \leqq \beta} \Big(\sum_{\mathrm{Sp}(\hat{T}2\tilde{S}_1)=\gamma} |b(T)| + \sum_{\mathrm{Sp}(\hat{T}2\tilde{S}_2)=\gamma} |b(T)| \Big) \leqq c_{12}(S)\, E(\beta)$$

mit

$$c_{12}(S) = (c_{12}(2S_1) + c_{12}(2S_2)) \sum_{\delta \leqq 0} E(\delta)\,.$$

Jetzt gelte (24) für sämtliche Matrizen

$$S = pUU'\,;$$

hierbei durchläuft U die Gruppe Ψ und p die positiven rationalen Zahlen. Die vorigen Überlegungen und Hilfssatz 16 liefern dann die Konvergenz der Reihe (21). Durch die Substitution

$$\beta = p\alpha,\ c_{11}(U, p) = c_{12}(pUU')$$

geht (24) schließlich in (22) über und umgekehrt. Damit ist Hilfssatz 18 bewiesen.

Hilfssatz 19: *Dann und nur dann konvergiert die Fourierreihe*

$$\sum_{T \in \mathfrak{S}^+} b(T)\, E\{\hat{T}\tilde{Z}\} \tag{25}$$

für $\tilde{Z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}$, wenn es zu jeder positiven rationalen Zahl p eine Konstante $c_{13}(p)$ gibt, derart, daß die Abschätzungen

$$|b(T)| \leqq c_{13}(p)\, E(p\hat{T}) \tag{26}$$

bestehen.

Beweis: Konvergiert die Reihe (25), so gilt (26). Umgekehrt bekommt man aus (26) und Hilfssatz 17 die Konvergenz der Summe

$$\sum_{T \in \mathfrak{S}^+} |b(T)|\, E(-p\hat{T})\,.$$

Für jedes $\hat{Y} \in \tilde{\mathfrak{S}}_0$ existiert ferner ein positives rationales p mit $2\pi\hat{Y} - p\hat{E} > 0$. Also konvergiert (25) absolut.

Kapitel II. Multiplikatorensysteme

§ 1. *Multiplikatoren- und Exponentensysteme*

Unter einer Form zur Gruppe Δ verstehen wir eine nicht identisch verschwindende holomorphe Funktion $F(\tilde{Z})$ in $\tilde{\mathfrak{Z}}$, welche den Bedingungen

$$F(\Theta\tilde{Z}) = I(\Theta; \tilde{Z})\, F(\tilde{Z}) \qquad (\Theta \in \Delta) \tag{27}$$

genügt. Hierbei sind $I(\Theta; \tilde{Z})$ Einheiten, d. h. in $\tilde{\mathfrak{Z}}$ holomorphe Funktionen ohne Nullstellen. Die Gesamtheit dieser Einheiten $I(\Theta; \tilde{Z})$ heißt das zu $F(\tilde{Z})$

gehörende Multiplikatorensystem. Aus (27) schließt man die Relationen

$$I(\Theta_2\Theta_1;\mathfrak{Z}) = I(\Theta_2;\Theta_1\mathfrak{Z})\,I(\Theta_1;\mathfrak{Z}) \qquad (\Theta_1,\Theta_2 \in \Delta)\,. \tag{28}$$

Wir abstrahieren von den Formen $F(\mathfrak{Z})$ und bezeichnen als Multiplikatorensystem jede Klasse von Einheiten $I(\Theta;\mathfrak{Z})$ $(\Theta \in \Delta)$, zwischen denen die Beziehungen (28) bestehen. Wir nennen zwei Multiplikatorensysteme $I_1(\Theta;\mathfrak{Z})$ und $I_2(\Theta;\mathfrak{Z})$ äquivalent, wenn die Gleichungen

$$I_2(\Theta;\mathfrak{Z}) = K(\Theta\mathfrak{Z})\,K^{-1}(\mathfrak{Z})\,I_1(\Theta;\mathfrak{Z}) \qquad (\Theta \in \Delta) \tag{29}$$

mit einer passenden Einheit $K(\mathfrak{Z})$ erfüllbar sind.

Man ordne jedem Element $\Theta \in \Delta$ eine holomorphe Funktion $J(\Theta;\mathfrak{Z})$ zu. Die Menge dieser Funktionen heiße ein Exponentensystem, wenn die Kongruenzen

$$J(\Theta_2\Theta_1;\mathfrak{Z}) \equiv J(\Theta_2;\Theta_1\mathfrak{Z}) + J(\Theta_1;\mathfrak{Z}) \qquad (\Theta_1,\Theta_2 \in \Delta) \tag{30}$$

gelten. Zwei Exponentensysteme $J_1(\Theta;\mathfrak{Z})$ und $J_2(\Theta;\mathfrak{Z})$ werden als äquivalent bezeichnet, falls es eine holomorphe Funktion $L(\mathfrak{Z})$ mit

$$J_2(\Theta;\mathfrak{Z}) \equiv L(\Theta\mathfrak{Z}) - L(\mathfrak{Z}) + J_1(\Theta;\mathfrak{Z}) \qquad (\Theta \in \Delta) \tag{31}$$

gibt.

Durch

$$I(\Theta;\mathfrak{Z}) = E\{J(\Theta;\mathfrak{Z})\} \qquad (\Theta \in \Delta) \tag{32}$$

wird jedem Exponentensystem ein Multiplikatorensystem zugeordnet. Da $\tilde{\mathfrak{H}}$ einfachzusammenhängend ist, lassen sich andererseits sämtliche Multiplikatorensysteme in der Form (32) schreiben. Die $I(\Theta;\mathfrak{Z})$ bestimmen die Exponenten $J(\Theta;\mathfrak{Z})$ bis auf Kongruenz eindeutig. Zwei Multiplikatorensysteme sind genau dann äquivalent, wenn die zugehörigen Exponentensysteme diese Eigenschaft besitzen.

Ziel dieser Arbeit ist es, zu jeder Klasse äquivalenter Multiplikatoren- bzw. Exponentensysteme einen möglichst einfachen Repräsentanten anzugeben.

§ 2. *Translationen*

Man ordne dem Exponentensystem $J(\Theta;\mathfrak{Z}) = J(U, S;\mathfrak{Z})$ die Größen

$$k(S,T) = J(E,S;\mathfrak{Z}+\mathfrak{T}) + J(E,T;\mathfrak{Z}) - J(E,T;\mathfrak{Z}+\mathfrak{S}) - J(E,S;\mathfrak{Z}) \tag{33}$$

zu, welche auf Grund von (30) ganze rationale Zahlen sind. S und T bedeuten in diesem Paragraphen symmetrische $n \times n$ Matrizen, deren Elemente dem Ideal $\mathfrak{h}$ angehören. Es gilt [2, Kapitel III]

$$k(S,T) = -k(T,S)\,; \tag{34}$$

$$k(S_1+S_2,T) = k(S_1,T) + k(S_2,T);\; k(S,T_1+T_2) = k(S,T_1) + k(S,T_2)\,; \tag{35}$$

$$k(S[U],T[U]) = k(S,T) \qquad (U \in \Psi)\,. \tag{36}$$

Wir wollen

$$k(S,T) = 0 \qquad (m \neq 2 \text{ oder } n > 1) \tag{37}$$

nachweisen. Dazu setze man

$$S_{\iota\varkappa} = (s_{\iota\varkappa;\sigma\tau}) : s_{\iota\varkappa;\iota\varkappa} = s_{\iota\varkappa;\varkappa\iota} = 1,\ s_{\iota\varkappa;\sigma\tau} = 0 \quad \textit{sonst} \quad (\iota, \varkappa = 1, \ldots, n);$$

$$S_\iota = S_{\iota\iota} \qquad (\iota = 1, \ldots, n)$$

und beachte, daß sich jede symmetrische Matrix S aus $\mathfrak{h}$ als Linearkombination der Matrizen

$$(38) \qquad h_\mu S_{\iota\varkappa} \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ \iota, \varkappa = 1, \ldots, n)$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten darstellen läßt. Es genügt daher wegen (35), die Aussage (37) für alle Matrizen S, T der Gestalt (38) zu zeigen.

Zuerst beweisen wir

$$(39) \qquad k(h_\mu S_\iota, h_\nu S_\varkappa) = 0 \qquad (\iota \neq \varkappa;\ m, n \geqq 2).$$

Bei festen Indizes ι, $\varkappa$ betrachte man die $m \times m$ Matrix

$$K = (k(h_\mu S_\iota, h_\nu S_\varkappa)).$$

Vermöge (36) ändert sich K bei der Substitution

$$h_\mu S_\iota, h_\nu S_\varkappa \to h_\mu(S_\iota[C_\varkappa(f)]) = h_\mu S_\iota,\ h_\nu S_\varkappa[C_\varkappa(f)] = f^2 h_\nu S_\varkappa \qquad (f \in \psi)$$

nicht. Es gilt also

$$K(N - E) = 0,$$

wobei $f^2 h = hN$ und N eine ganze rationale $m \times m$ Matrix ist. Mit $F = [f^{(1)2}, \ldots, f^{(m)2}]$ folgt $FH = HN$, d. h. $(N - E) = H^{-1}(F - E)H$. Hilfssatz 2 liefert die Existenz eines $f \in \psi$, so daß $\mathrm{Det}(F - E) \neq 0$. Hieraus ergibt sich $K = 0$ und damit (39).

Im Falle $n \geqq 2$, $m \geqq 1$ erhalten wir jetzt (37) aus (39) und dem Bestehen der Gleichungen

$$k(h_\mu S_\iota[A_{\iota\varkappa}(1, v, w, vw + 1)], h_\nu S_\varkappa[A_{\iota\varkappa}(1, v, w, vw + 1)]) - k(h_\mu S_\iota, h_\nu S_\varkappa) = 0 \qquad (\iota \neq \varkappa),$$

$$k(h_\mu S_\iota[B_{\iota\varkappa}(v)], h_\nu S_{\sigma\tau}[B_{\iota\varkappa}(v)]) - k(h_\mu S_\iota, h_\nu S_{\sigma\tau}) = 0 \quad (\iota \neq \varkappa, \sigma, \tau)$$

für alle ganzen rationalen Zahlen $v, w \equiv 0 \bmod q$.

Bei $m = n = 1$ ist (37) eine Folge von (34). Schließlich sei $n = 1$, $m \geqq 3$. Wir setzen

$$K = (k(h_\mu, h_\nu)), \quad L = K[H^{-1}] = (l_{\mu\nu})$$

und wählen im übrigen dieselbe Bezeichnung wie beim Beweise der Beziehungen (39). Die Relationen (36) liefern $K[N] = K$, also $L[F] - L = 0$, mithin

$$(f^{(\mu)} f^{(\nu)} - 1)\, l_{\mu\nu} = 0.$$

Wegen $m \geqq 3$ und Hilfssatz 2 gibt es eine Einheit $f \in \psi$ mit $f^{(\mu)} f^{(\nu)} \neq 1$. Hieraus schließen wir $L = K = 0$. Formel (37) ist bewiesen.

Auf Grund der Gleichungen (37) lassen sich die Exponenten $J(E, S; \mathfrak{Z})$ derart durch kongruente ersetzen, daß die Relationen

$$J(E, S + T; \mathfrak{Z}) = J(E, S, \mathfrak{Z} + \mathfrak{T}) + J(E, T; \mathfrak{Z})$$

erfüllt sind. Der Bereich $\tilde{\mathfrak{Z}}$ besteht aus allen Matrizen $\tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y}$, deren Imaginärteil $\tilde{Y}$ der offenen konvexen Pyramide $\tilde{\mathfrak{S}}_0$ angehört. Vermöge [2, Satz 2] bekommt man nun die Lösbarkeit der Differenzengleichungen

$$G(\tilde{Z} + \tilde{S}) - G(\tilde{Z}) = J(E, S; \tilde{Z})$$

durch eine holomorphe Funktion $G(\tilde{Z})$. Hieraus folgt

Satz 1: *Zu jedem Exponentensystem $J(U, S; \tilde{Z})$ gibt es ein äquivalentes Exponentensystem $J_1(U, S; \tilde{Z})$ mit*

$$J_1(E, S; \tilde{Z}) \equiv 0 \qquad (m \neq 2 \text{ oder } n > 1).$$

§ 3. *Rotationen*

Bestehen für ein Exponentensystem $J_1(U, S; \tilde{Z})$ die Kongruenzen

$$J_1(E, S; \tilde{Z}) \equiv 0, \tag{40}$$

so folgt aus (30)

$$J_1(U, S; \tilde{Z}) \equiv J_1(U, 0; \tilde{Z}),$$

$$J_1(U, 0; \tilde{Z} + \tilde{S}) \equiv J_1(U, 0; \tilde{Z}). \tag{41}$$

Man betrachte ein zu $J_1(U, S; \tilde{Z})$ äquivalentes Exponentensystem. Dieses genügt genau dann den Bedingungen (40), wenn die in (31) erklärte Funktion $L(\tilde{Z})$ die Relationen

$$L(\tilde{Z} + \tilde{S}) \equiv L(\tilde{Z}) \tag{42}$$

befriedigt. Wir fassen die durch

$$\operatorname{Tr}(d_\iota h_\mu) = L(\tilde{Z} + \widetilde{h_\mu S_\iota}) - L(\tilde{Z}) \qquad (\mu = 1, \ldots, m; \iota = 1, \ldots, n),$$

$$\operatorname{Tr}(2 d_{\iota\varkappa} h_\mu) = L(\tilde{Z} + \widetilde{h_\mu S_{\iota\varkappa}}) - L(\tilde{Z}) \qquad (\mu = 1, \ldots, m; \iota \neq \varkappa; \iota, \varkappa = 1, \ldots, n)$$

definierten Zahlen $d_{\iota\varkappa}$ zu der $n \times n$ Matrix $D = (d_{\iota\varkappa}) \in \mathfrak{S}$ zusammen und bekommen die Darstellung

$$L(\tilde{Z}) = \operatorname{Sp}(\tilde{D}\tilde{Z}) + P(\tilde{Z}), \tag{43}$$

wobei $P(\tilde{Z})$ die Perioden $\tilde{S}$ besitzt. Es sei umgekehrt $D \in \mathfrak{S}$, ferner $P(\tilde{Z})$ eine Funktion mit den Perioden $\tilde{S}$ und $L(\tilde{Z})$ mittels (43) erklärt. Dann gilt (42).

Man entwickle $P(\tilde{Z})$ in eine Fourierreihe und zerspalte diese wie folgt:

$$P(\tilde{Z}) = P^+(\tilde{Z}) + P^-(\tilde{Z}) + l,$$

$$P^+(\tilde{Z}) = \sum_{T \in \mathfrak{S}^+} b(T)\, E\{\tilde{T}\tilde{Z}\}, \tag{44}$$

$$P^-(\tilde{Z}) = \sum_{T \in \mathfrak{S}^-} b(T)\, E\{\tilde{T}\tilde{Z}\}. \tag{45}$$

Insgesamt wird

$$L(\tilde{Z}) = \operatorname{Sp}(\tilde{D}\tilde{Z}) + P^+(\tilde{Z}) + P^-(\tilde{Z}) + l. \tag{46}$$

Hierbei bedeutet l eine komplexe Konstante.

Die Kongruenzen (41) berücksichtigend, schreibe man jeden der Exponenten $J_1(U, 0; \tilde{Z})$ in der Form

$$J_1(U, 0; \tilde{Z}) = \mathrm{Sp}(\widetilde{M(U)}\tilde{Z}) + Q^+(U; \tilde{Z}) + Q^-(U; \tilde{Z}) + j(U) \qquad (U \in \Psi), \tag{47}$$

$$Q^+(U; \tilde{Z}) = \sum_{T \in \mathfrak{S}^+} a(U, T)\, E\{\tilde{T}\tilde{Z}\} \qquad (U \in \Psi), \tag{48}$$

$$Q^-(U; \tilde{Z}) = \sum_{T \in \mathfrak{S}^-} a(U, T)\, E\{\tilde{T}\tilde{Z}\} \qquad (U \in \Psi). \tag{49}$$

Die Relationen (30) sind jetzt mit

$$Q^+(U_1 U_2; \tilde{Z}) = Q^+(U_2; \tilde{Z}[\tilde{U}_1]) + Q^+(U_1; \tilde{Z}) \qquad (U_1, U_2 \in \Psi), \tag{50}$$

$$Q^-(U_1 U_2; \tilde{Z}) = Q^-(U_2; \tilde{Z}[\tilde{U}_1]) + Q^-(U_1; \tilde{Z}) \qquad (U_1, U_2 \in \Psi), \tag{51}$$

$$M(U_1 U_2) = M(U_2)\,[U_1'] + M(U_1) \qquad (U_1, U_2 \in \Psi), \tag{52}$$

$$j(U_1 U_2) = j(U_1) + j(U_2) \qquad (U_1, U_2 \in \Psi) \tag{53}$$

gleichwertig.

Unsere Aufgabe besteht darin, die in (46) genannte Funktion $L(\tilde{Z})$ so zu bestimmen, daß die Größen

$$L(\tilde{Z}[\tilde{U}]) - L(\tilde{Z}) + J_1(U, 0; \tilde{Z}) \qquad (U \in \Psi)$$

möglichst einfach werden. Hierzu müssen wir die Differenzengleichungen

$$P^+(\tilde{Z}[\tilde{U}]) - P^+(\tilde{Z}) = Q^+(U; \tilde{Z}) \qquad (U \in \Psi), \tag{54}$$

$$P^-(\tilde{Z}[\tilde{U}]) - P^-(\tilde{Z}) = Q^-(U; \tilde{Z}) \qquad (U \in \Psi), \tag{55}$$

$$D[U'] - D = M(U) \qquad (U \in \Psi) \tag{56}$$

näher untersuchen. Die Bedingungen (50), (51) und die Differenzengleichungen (54), (55) drücken sich in der Gestalt

$$a(U_1 U_2, T) = a(U_2, T[U_1'^{-1}]) + a(U_1, T) \qquad (U_1, U_2 \in \Psi;\ T \in \mathfrak{S}), \tag{57}$$

$$b(T[U'^{-1}]) - b(T) = a(U, T) \qquad (U \in \Psi;\ T \in \mathfrak{S}) \tag{58}$$

durch die Koeffizienten der Fourierreihen aus.

Wir nennen $P^+(\tilde{Z})$, $Q^+(U; \tilde{Z})$ den positiven, $P^-(\tilde{Z})$, $Q^-(U; \tilde{Z})$ den nicht positiven, $\mathrm{Sp}(\tilde{D}\tilde{Z})$, $\mathrm{Sp}(\widetilde{M(U)}\tilde{Z})$ den linearen und l, $j(U)$ den konstanten Teil der Funktionen $L(\tilde{Z})$, $J_1(U, 0; \tilde{Z})$. Bei Bildung der Differenz $L(\tilde{Z}[\tilde{U}]) - L(\tilde{Z})$ hebt sich l heraus, und wir können daher $l = 0$ annehmen.

§ 4. *Der nicht positive Teil*

Es gilt

Satz 2: *Die Relationen* (51) *sind notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit der Differenzengleichungen* (55) ($m \geqq 3$ *oder* $n \geqq 3$).

Beweis: Gegeben seien eine Matrix $T \in \mathfrak{S}^-$ und ein $U \in \Psi$. Mit $\mathfrak{p}(U, T)$ bezeichne man die Gesamtheit der Folgen (V_τ, T_τ), welche den nachstehenden Bedingungen genügen:

1) $$T_0 = T,$$

2) $$T_{\tau+1} = T_\tau[V_\tau] \qquad (V_\tau \in \Psi;\ \tau = 0, 1, 2, \ldots),$$

3) $$\mathrm{Sp}(\tilde{T}_{\tau+1}[\tilde{U}]) < \mathrm{Sp}(\tilde{T}_\tau[\tilde{U}]) \quad \textit{für fast alle} \quad \tau = 0, 1, 2, \ldots.$$

Für fast alle kürzen wir im folgenden gelegentlich durch f. a. ab.

Nehmen wir an, Satz 2 sei richtig. Dann befriedigen die Koeffizienten $b(T)$ die Abschätzungen (22), woraus sich

$$|b(T)| \leqq c_{14}(U, p)\, E(p\, \check{T}[\bar{U}]) \qquad (U \in \Psi) \tag{59}$$

ergibt. Die Formeln (58), (59) ziehen für jede Folge $(V_\tau, T_\tau) \in \mathfrak{p}(U, T)$ den Zusammenhang

$$b(T) = -\sum_{\tau=0}^{\infty} a(V_\tau'^{-1}, T_\tau) \tag{60}$$

nach sich, d. h. unsere Differenzengleichungen (55) besitzen höchstens eine Lösung $P^-(\bar{Z})$.

Zum Beweise des Satzes 2 zeigen wir, daß die Summen

$$\langle V_\tau, T_\tau\rangle = \sum_{\tau=0}^{\infty} a(V_\tau'^{-1}, T_\tau)$$

bei allen Folgen $(V_\tau, T_\tau) \in \mathfrak{p}(U, T)$ konvergieren und ihr Wert nur von T abhängt. Dann definieren wir die Zahlen $b(T)$ durch (60), verifizieren (58) und weisen die Konvergenz der Reihe (45) nach.

Die Konvergenz der Fourierreihen (49) und Hilfssatz 18 liefern die Ungleichungen

$$|a(W, T)| \leqq c_{15}(W; U, p)\, E(p\, \check{T}[\bar{U}]) \qquad (W; U \in \Psi)\,. \tag{61}$$

Ist daher (V_τ, T_τ) eine Folge aus $\mathfrak{p}(U, T)$, in der nur endlich viele verschiedene V_τ vorkommen, so konvergiert $\langle V_\tau, T_\tau\rangle$ absolut. Wenn die Summen $\langle V_\tau, T_\tau\rangle$ für alle $(V_\tau, T_\tau) \in \mathfrak{p}(E, T)$ übereinstimmen, dann tun sie es auch, wie wir später zeigen werden, bei sämtlichen Folgen $(V_\tau, T_\tau) \in \mathfrak{p}(U, T)$. Die Klasse $\mathfrak{p}(E, T) = \mathfrak{p}(T)$ spielt mithin eine ausgezeichnete Rolle.

Es gelte

$$S, T \in \mathfrak{G}^-;\ U \in \Psi;\ S = T[U];\ (V_\tau, T_\tau) \in \mathfrak{p}(T);\ (W_\sigma, S_\sigma) \in \mathfrak{p}(S)\,.$$

Wir wollen ein Kriterium dafür aufstellen, daß die Differenz

$$\delta = \langle V_\tau, T_\tau\rangle - a(U'^{-1}, T) - \langle W_\sigma, S_\sigma\rangle \tag{62}$$

verschwindet. Für sämtliche natürlichen Zahlen ϱ werde

$$\langle V_\tau, T_\tau\rangle_\varrho = \sum_{\tau=\varrho}^{\infty} a(V_\tau'^{-1}, T_\tau);\ U_\varrho = V_{\varrho-1}^{-1} V_{\varrho-2}^{-1} \cdots V_1^{-1} V_0^{-1} U\, W_0 W_1 \cdots W_{\varrho-2} W_{\varrho-1}$$

gesetzt; aus (57) folgt dann

$$\delta = \langle V_\tau, T_\tau\rangle_\varrho - a(U_\varrho'^{-1}, T_\varrho) - \langle W_\sigma, S_\sigma\rangle_\varrho\,. \tag{63}$$

Jetzt nehmen wir an, für jedes ϱ existiere eine Zerlegung

$$U_\varrho = U_{\varrho 0} \cdots U_{\varrho\chi(\varrho)} \tag{64}$$

mit nachstehenden Eigenschaften:

a) *Die Matrizen $U_{\varrho\beta} \in \Psi\ (\beta = 0, \ldots, \chi(\varrho))$ liegen in einer endlichen, von ϱ unabhängigen Menge.*

b) $\chi(\varrho) \leqq c_{16}(T; U; V_0, V_1, V_2, \ldots; W_0, W_1, W_2, \ldots)\varrho$ (f. a. $\varrho = 0, 1, 2, \ldots$).

c) *Die durch*

$$T_{\varrho 0} = T_\varrho;\ T_{\varrho\beta+1} = T_{\varrho\beta}[U_{\varrho\beta}] \qquad (\beta = 0, \ldots, \chi(\varrho))$$

erklärten Matrizen $T_{\varrho\beta}$ *genügen den Ungleichungen*

$$\operatorname{Sp} \hat{T}_{\varrho\beta} \leqq -c_{17}^{-1}(T; U; V_0, V_1, V_2, \ldots; W_0, W_1, W_2, \ldots)\varrho$$

$$(\beta = 0, \ldots, \chi(\varrho);\quad \text{f. a.}\quad \varrho = 0, 1, 2, \ldots).$$

Aus (57) ergibt sich

$$a(U_\varrho'^{-1}, T_\varrho) = \sum_{\beta=0}^{\chi(\varrho)} a(U_{\varrho\beta}'^{-1}, T_{\varrho\beta}).$$

Die von (61) folgenden Ungleichungen

(65) $$|a(W, T)| \leqq c_{18}(W; p)\, E(p\hat{T}) \qquad (W \in \Psi)$$

sowie die Forderungen a) bis c) ziehen nun

$$\lim_{\varrho \to \infty} a(U_\varrho'^{-1}; T_\varrho) = 0$$

nach sich. Da auch die Restsummen $\langle V_\tau, T_\tau\rangle_\varrho$, $\langle W_\sigma, S_\sigma\rangle_\varrho$ für $\varrho \to \infty$ gegen Null streben, so ist $\delta = 0$.

Im allgemeinen ist es schwierig, Zerlegungen (64) mit den Eigenschaften a) bis c) zu finden. Wir werden daher spezielle Folgen $(V_\tau, T_\tau) \in \mathfrak{p}(T)$ betrachten.

$m \geqq 3$:

Es sei $\mathfrak{m}$ eine nicht leere Teilmenge der Zahlen $1, \ldots, m$ und
$\mathfrak{S}(\mathfrak{m})$ die Gesamtheit der Matrizen $T \in \mathfrak{S}^-$ mit $\operatorname{Sp} T^{(\mu)} < 0$ $(\mu \in \mathfrak{m})$;
$\mathfrak{e}(\mathfrak{m})$ die Gesamtheit der Einheiten $f \in \mathfrak{e}$ mit $\xi(f)1, \ldots, \xi(f)\varkappa(f) \in \mathfrak{m}$;
$|\mathfrak{m}|$ die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{m}$.

Wir beweisen

(66) $$\langle f_1 E, f_1^{2r} T\rangle = \langle f_2 E, f_2^{2r} T\rangle \quad (f_1, f_2 \in \mathfrak{e}(\mathfrak{m});\ T \in \mathfrak{S}(\mathfrak{m})).$$

Man wähle zwei Einheiten $f_3, f_4 \in \mathfrak{e}(\mathfrak{m})$, so daß

$$\varkappa(f_3) = \varkappa(f_4) = \operatorname{Min}(|\mathfrak{m}|, m-1);$$

$$\xi(f_1)\delta = \xi(f_3)\delta \quad (\delta = 1, \ldots, \varkappa(f_1));\quad \xi(f_2)\delta = \xi(f_4)\delta \quad (\delta = 1, \ldots, \varkappa(f_2))$$

gilt. Aus $m \geqq 3$, den Relationen

$$U_\varrho = (f_\gamma E)^{-\varrho}(f_\delta E)^\varrho = (f_\delta E)^\varrho (f_\gamma E)^{-\varrho} \quad ((\gamma, \delta) = (1, 3), (3, 4), (4, 2))$$

und unserem früheren Kriterium folgt

$$\langle f_1 E, f_1^{2r} T\rangle = \langle f_3 E, f_3^{2r} T\rangle = \langle f_4 E, f_4^{2r} T\rangle = \langle f_2 E, f_2^{2r} T\rangle.$$

Weiter zeigen wir

(67) $$\langle f_1 E, f_1^{2r} T\rangle - a(U'^{-1}, T) - \langle f_2 E, f_2^{2r} T[U]\rangle = 0$$

$$(T \in \mathfrak{S}(\mathfrak{m}_1), f_1 \in \mathfrak{e}(\mathfrak{m}_1);\ T[U] \in \mathfrak{S}(\mathfrak{m}_2), f_2 \in \mathfrak{e}(\mathfrak{m}_2);\ U \in \Psi)$$

Es bezeichne $\mathfrak{m}_3$ die Gesamtheit der Indizes μ $(1 \leqq \mu \leqq m)$, für die $T^{(\mu)} \in \mathfrak{T}$ ist. Hilfssatz 9 liefert die Existenz eines $V \in \Psi$ mit $\operatorname{Sp}(T^{(\mu)}[V^{(\mu)}]) < 0$ $(\mu \in \mathfrak{m}_3)$. Unser Kriterium, $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in \mathfrak{m}_3$ und die Beziehungen

$$U_\varrho = f_1^{-\varrho} V f_1^\varrho = V\ (f_1 \in \mathfrak{e}(\mathfrak{m}_1)),\ U_\varrho = f_2^{-\varrho} V^{-1} U f_2^\varrho = V^{-1} U\ (f_2 \in \mathfrak{e}(\mathfrak{m}_2))$$

ergeben

$$\langle f_1 E, f_1^{2\tau} T\rangle - a(V'^{-1}, T) - \langle f_1 E, f_1^{2\tau} T[V]\rangle = 0\,,$$
$$\langle f_2 E, f_2^{2\tau} T[V]\rangle - a(V'U'^{-1}, T[V]) - \langle f_2 E, f_2^{2\tau} T[U]\rangle = 0\,.$$

Wegen (57), (66) folgt nunmehr (67).

Die Menge $\mathfrak{s}(T)$ bestehe aus allen Folgen $(V_\tau, T_\tau) \in \mathfrak{p}(T)$ mit

$$V_\tau = fE,\ T_\tau \in \mathfrak{G}(\mathfrak{m}) \qquad (\text{f. a. } \tau = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

$\mathfrak{m}$ und $f \in \mathfrak{e}(\mathfrak{m})$ hängen dabei von der Folge (V_τ, T_τ) aber nicht vom Index τ ab. Vermöge (62), (63), (67) besitzen die Summen $\langle V_\tau, T_\tau\rangle$ für sämtliche $(V_\tau, T_\tau) \in \mathfrak{s}(T)$ denselben Wert. Wir definieren jetzt die Zahlen $b(T)$ durch (60), indem wir nur die Folgen aus $\mathfrak{s}(T)$ zulassen.

Es sei $U \in \Psi$, ferner die Folge

$$(V_0, T_0);\ (V_1, T_1);\ (V_2, T_2);\ \ldots$$

in $\mathfrak{s}(T[U'^{-1}])$ gelegen. Dann gehört die Folge

$$(U'^{-1}, T);\ (V_0, T_0);\ (V_1, T_1);\ \ldots$$

zur Klasse $\mathfrak{s}(T)$; wegen (60) gilt

$$b(T) = -a(U, T) + b(T[U'^{-1}])\,,$$

d. h. die Größen $b(T)$ lösen die Differenzengleichungen (58).

Jedem $T \in \mathfrak{G}^-$ wollen wir eine spezielle Folge $(V_\tau, T_\tau) \in \mathfrak{s}(T)$ zuordnen. Für die ersten Indizes τ wähle man $V_\tau \in \mathfrak{u}$, derart, daß die Ungleichungen

$$\text{(68)} \qquad \operatorname{Sp} \hat{T}_{\tau+1} < \operatorname{Sp} \hat{T}_\tau \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots)$$

bestehen. Dann gibt es einen Index η mit $\operatorname{Sp} \hat{T}_\eta < 0$. Bei einer bestimmten Permutation ξ der Zahlen $1, \ldots, m$ gilt

$$\operatorname{Sp} T_\eta^{(\xi 1)} \leqq \cdots \leqq \operatorname{Sp} T_\eta^{(\xi m)}\,;$$

und aus $\operatorname{Sp} \hat{T}_\eta < 0$ folgt $\operatorname{Sp} T_\eta^{(\xi 1)} < 0$. Ferner werde $\varkappa$ durch die Bedingungen

$$\operatorname{Sp} T_\eta^{(\xi \varkappa)} < 0 < \operatorname{Sp} T_\eta^{(\xi(\varkappa+1))}\ (\operatorname{Sp} T_\eta^{(\xi m)} > 0);\ \varkappa = m - 1\ (\operatorname{Sp} T_\eta^{(\xi m)} < 0)$$

festgelegt. Mit der zu $\xi, \varkappa$ gehörigen Einheit $f \in \mathfrak{e}$ definieren wir

$$V_\tau = fE,\ T_\tau = f^{2(\tau-\eta)}\, T_\eta \qquad (\tau \geqq \eta)\,.$$

Die Matrizen V_τ liegen in der endlichen Menge $\mathfrak{c} \cup \mathfrak{u}$ und die Ungleichungen (68) gelten für alle τ.

Aus (60), (65), (68) bekommt man

$$\text{(69)} \qquad |b(T)| \leqq c_{19}(p)\, E(p\, \hat{T})$$

mit

$$c_{19}(p) = \Bigl(\sum_{V \in \mathfrak{c} \cup \mathfrak{u}} c_{18}(V'^{-1}; p)\Bigr)\Bigl(\sum_{\gamma=0}^{\infty} E(-p g^{-1} \gamma)\Bigr)\,.$$

Die Formeln (58), (69) ziehen nunmehr die Gültigkeit von (60) für sämtliche Folgen der Klasse $\mathfrak{p}(T)$ nach sich.

$n \geqq 3$:

Es sei $\mathfrak{n}$ eine nicht leere Teilmenge der Zahlen $1, \ldots, n$ und $\mathfrak{S}(\mathfrak{n})$ die Gesamtheit der Matrizen $T \in \mathfrak{S}^-$ mit $\operatorname{Tr} t_\iota < 0$ $(\iota \in \mathfrak{n})$.

Wir zeigen

$$\langle B_{\iota\varkappa}(\varepsilon_1 q), T[B_{\iota\varkappa}(\varepsilon_1 q \tau)]\rangle = \langle B_{\lambda\nu}(\varepsilon_2 q), T[B_{\lambda\nu}(\varepsilon_2 q\tau)]\rangle \tag{70}$$
$$(T \in \mathfrak{S}(\mathfrak{n});\ \iota, \lambda \in \mathfrak{n};\ \iota \neq \varkappa,\ \lambda \neq \nu;\ \varkappa, \nu = 1, \ldots, n;\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1).$$

Die Differenz der in (70) vorkommenden Summen heiße $\delta(\iota, \varkappa, \varepsilon_1; \lambda, \nu, \varepsilon_2)$. Man unterscheide drei Fälle.

1) $\iota = \lambda, \varkappa \neq \nu$: Die Behauptung folgt aus

$$U_\varrho = B_{\iota\varkappa}(-\varepsilon_1 q\varrho)\, B_{\iota\nu}(\varepsilon_2 q\varrho) = B_{\iota\nu}(\varepsilon_2 q\varrho)\, B_{\iota\varkappa}(-\varepsilon_1 q\varrho)\,.$$

2) $\iota = \lambda, \varkappa = \nu$: Wir wählen einen Index $\gamma \neq \iota, \varkappa$ und erhalten

$$\delta(\iota, \varkappa, \varepsilon_1; \iota, \varkappa, \varepsilon_2) = \delta(\iota, \varkappa, \varepsilon_1; \iota, \gamma, 1) + \delta(\iota, \gamma, 1; \iota, \varkappa, \varepsilon_2) = 0\,.$$

3) $\iota \neq \lambda$: Auf Grund des eben Bewiesenen, hängt $\delta(\iota, \varkappa, \varepsilon_1; \lambda, \nu, \varepsilon_2)$ nur von ι, λ ab. Für $\varkappa = \nu$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ bekommt man nun (70) aus

$$U_\varrho = B_{\iota\varkappa}(-q\varrho)\, B_{\lambda\varkappa}(q\varrho) = B_{\lambda\varkappa}(q\varrho)\, B_{\iota\varkappa}(-q\varrho)\,.$$

Die Differenzen

$$\begin{aligned}\delta(U; T) = \langle B_{\iota\varkappa}(\varepsilon_1 q), T[B_{\iota\varkappa}(\varepsilon_1 q\tau)]\rangle - a(U'^{-1}, T) -\\ - \langle B_{\lambda\nu}(\varepsilon_2 q), T[U B_{\lambda\nu}(\varepsilon_2 q\tau)]\rangle\end{aligned} \tag{71}$$
$$(U \in \Psi;\ T \in \mathfrak{S}(\iota);\ T[U] \in \mathfrak{S}(\lambda);\ \iota \neq \varkappa,\ \lambda \neq \nu;\ \varkappa, \nu = 1, \ldots, n;\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1)$$

hängen wegen (70) von U und T allein ab. Ferner gilt

$$\delta(U_1 U_2; T) = \delta(U_2; T[U_1]) + \delta(U_1; T) \tag{72}$$
$$(U_1, U_2 \in \Psi;\ T \in \mathfrak{S}(\iota),\ T[U_1] \in \mathfrak{S}(\gamma),\ T[U_1 U_2] \in \mathfrak{S}(\lambda))\,.$$

Wir wollen das Verschwinden der $\delta(U; T)$ nachweisen. Dazu gehen wir schrittweise vor.

$$\delta(B_{\beta\gamma}(v); T) = 0 \qquad (T \in \mathfrak{S}(\alpha);\ \gamma \neq \alpha, \beta;\ \beta, \gamma = 1, \ldots, n;\ q/v)\,. \tag{73}$$

Beweis: In (71) setze man $\iota = \lambda = \alpha$, $\varkappa = \nu = \gamma$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Jetzt liefert der Zusammenhang

$$U_\varrho = B_{\alpha\gamma}(-\varrho q)\, B_{\beta\gamma}(v)\, B_{\alpha\gamma}(\varrho q) = B_{\beta\gamma}(v)$$

die Behauptung.

$$\delta(C_\beta(f); T) = 0 \qquad (T \in \mathfrak{S}(\alpha);\ \beta \neq \alpha;\ \beta = 1, \ldots, n;\ f \in \psi)\,. \tag{74}$$

Beweis: Man benutze (71) mit $\iota = \lambda = \alpha$; $\varkappa = \nu \neq \alpha, \beta$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ und wende die Relation

$$U_\varrho = B_{\alpha\varkappa}(-\varrho q)\, C_\beta(f)\, B_{\alpha\varkappa}(\varrho q) = C_\beta(f)$$

an.

$$\delta(A_{\beta\gamma}(u, v, w, x); T) = 0\ (T \in \mathfrak{S}(\alpha);\ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha;\ \beta, \gamma = 1, \ldots, n). \tag{75}$$

Beweis: Wegen (72), (73), (74) und

$$A_{\beta\gamma}(u, v, w, x)\, B_{\gamma\beta}(q) = A_{\beta\gamma}(u + qv, v, w + qx, x);$$

$$A_{\beta\gamma}(u, v, w, x)\, C_\beta(k) = A_{\beta\gamma}(ku, v, kw, x),\ k = (ux - vw)^{-1};$$

$$A_{\beta\gamma}(u, v, w, x) = C_\beta(f)\, C_\gamma(f^{-1})\, A_{\beta\gamma}(u, f^{-2}v, f^2 w, x)\, C_\beta(f^{-1})\, C_\gamma(f) \quad (f \in \psi)$$

genügt es,

$$\delta(A_{\beta\gamma}(u, f^{-2}v, f^2 w, x);\ T[C_\beta(f)\, C_\gamma(f^{-1})]) = 0 \tag{76}$$

für $w \neq 0$, $ux - vw = 1$ sowie irgendein $f \in \psi$ zu zeigen. Aus $\mathrm{Tr}\, t_\alpha < 0$ ergibt sich die Existenz eines $f \in \psi$ mit

$$\mathrm{Tr}(f^4 w^2 t_\alpha) + \mathrm{Tr}(x^2 t_\alpha) + |\mathrm{Tr}(x t_\alpha)|,\ \mathrm{Tr}(f^4 w^2 t_\alpha) + \mathrm{Tr}(u^2 t_\alpha) + |\mathrm{Tr}(u t_\alpha)| \leqq -g^{-1}.$$

Wir setzen zur Abkürzung $A = A_{\beta\gamma}(u, f^{-2}v, f^2 w, x)$, $B = B_{\alpha\gamma}(q)$ und bekommen (76) vermöge der Beziehung

$$U_\varrho = B^{-\varrho} A B^\varrho = A B^\varrho A^{-1} B^{-\varrho} A\,.$$

Hiermit ist auch (75) bewiesen.

Die in Formel (2) auftretende Matrix $W_{\iota\iota}$ ist wegen Hilfssatz 7 das Produkt gewisser $A_{\beta\gamma}(u, v, w, x)$ $(\beta, \gamma \neq \iota)$. Die Gleichungen (2), (72), (73), (75) liefern also

$$\delta(W_\iota; T) = 0 \qquad (T \in \mathfrak{G}(\iota))\,. \tag{77}$$

Nun können wir

$$\delta(U; T) = 0 \quad (T \in \mathfrak{G}(\iota);\ T[U] \in \mathfrak{G}(\lambda);\ U \in \Psi) \tag{78}$$

nachweisen.

Für eine ganze Zahl η werde

$$F_\eta = \begin{cases} B_{\iota 1}(\eta q)\, B_{\iota 2}(\eta q)\, B_{\iota n}(\eta q) & (\iota \neq 1, 2, n) \\ B_{\iota\beta}(\eta q)\, B_{\iota\gamma}(\eta q) & (\iota, \beta, \gamma \text{ Permutation von } 1, 2, n) \end{cases},$$

$$G_\eta = \begin{cases} B_{\lambda 1}(\eta q) & (\lambda \neq 1) \\ E & (\lambda = 1) \end{cases}$$

$$V = F_\eta^{-1} U G_\eta, \quad S = T[F_\eta]$$

definiert. Wir wählen η genügend groß und wenden (72), (73) an. Dann folgt

$$\delta(U; T) = \delta(V; S);\quad S \in \mathfrak{G}(1, 2, n);\quad S[V] \in \mathfrak{G}(1)\,.$$

Man benutze Hilfssatz 6, setze

$$V = B_{2n}(f_1 x)\, B_{1n}(f_2 y)\, W_n W_1$$

und bestimme die Einheiten $f_1, f_2 \in \omega$ derart, daß

$$S_1 = S[B_{2n}(f_1 x)],\ S_2 = S_1[B_{1n}(f_2 y)] \in \mathfrak{G}(1, 2, n)$$

gilt. Jetzt ergibt sich $\delta(V, S) = 0$ und damit (78) aus (72), (73), (77).

Die Menge $\mathfrak{s}(T)$ bestehe aus allen Folgen $(V_\tau, T_\tau) \in \mathfrak{p}(T)$ mit

$$V_\tau = B_{\iota\varkappa}(\varepsilon q), \quad T_\tau = \mathfrak{G}(\iota) \quad \text{(f. a. } \tau = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

$\iota, \varkappa$ $(\iota \neq \varkappa)$ und $\varepsilon = \pm 1$ hängen dabei von der Folge (V_τ, T_τ), aber nicht vom Index τ ab. Auf Grund von (62), (63), (78) besitzen die Summen $\langle V_\tau, T_\tau \rangle$ für

sämtliche $(V_\tau, T_\tau) \in \mathfrak{s}(T)$ denselben Wert. Wir definieren die Zahlen $b(T)$ durch (60), indem wir nur die Folgen aus $\mathfrak{s}(T)$ zulassen. Wie früher weisen wir die Gültigkeit der Formeln (58) nach.

Weiterhin soll jedem $T \in \mathfrak{G}^-$ wieder eine spezielle Folge $(V_\tau, T_\tau) \in \mathfrak{s}(T)$ zugeordnet werden. Für die ersten Indizes τ wähle man $V_\tau \in \mathfrak{u}$, derart, daß die Ungleichungen (68) befriedigt sind. Dann gibt es ein η mit $\mathrm{Sp}\,\hat{T}_\eta < 0$, d. h. bei passendem ι gilt $T_\eta \in \mathfrak{G}(\iota)$. Es sei $\varkappa$ ein von ι verschiedener Index; wir definieren

$$V_\tau = B_{\iota\varkappa}(\varepsilon q),\ T_\tau = T_\eta[B_{\iota\varkappa}(\varepsilon q(\tau - \eta))] \qquad (\tau \geqq \eta);$$

$\varepsilon = \pm 1$ werde so festgelegt, daß die Ungleichungen (68) für alle τ erfüllt sind. Die Matrizen V_τ liegen in der endlichen Menge $\mathfrak{c} \cup \mathfrak{u}$. Daraus ergibt sich (69) und vermöge (58), (69) die Gültigkeit von (60) für sämtliche Folgen der Klasse $\mathfrak{p}(T)$.

In dem nun folgenden Teil lassen wir die Voraussetzung $m \geqq 3$ oder $n \geqq 3$ fallen. Statt dessen nehmen wir an, die Zahlen $b(T)$ seien durch (60) wohldefiniert und sämtliche Folgen aus $\mathfrak{p}(T)$ zulässig. Wir beweisen die Ungleichungen (59) und die Konvergenz der Reihe (45). Der Fall $(m, n) = (1, 1)$ wird ausgeschlossen.

Gegeben seien zwei Indizes ι $(1 \leqq \iota \leqq n)$, λ $(1 \leqq \lambda \leqq m)$ und eine Permutation ξ der Zahlen $1, \ldots, m$. Unter $\mathfrak{B}(\iota, \lambda, \xi)$ verstehe man die Gesamtheit der Matrizen $S \in \mathfrak{G}^-$ mit

$$s_\iota^{(\xi 1)} \leqq \cdots \leqq s_\iota^{(\xi \lambda)} < 0 < s_\iota^{(\xi(\lambda+1))}, \ldots, s_\iota^{(\xi m)}.$$

Ferner werde

$$R(S) = \left.\begin{cases} C_\varkappa(f) & (m \geqq 2) \\ B_{\iota\gamma}(\varepsilon q) & (m = 1, n \geqq 2; \iota \neq \gamma) \end{cases}\right\} \in \mathfrak{c} \quad (S \in \mathfrak{B}(\iota, \lambda, \xi))$$

definiert. Hierbei bezeichnet f die zu ξ, $\varkappa = \mathrm{Min}(\lambda, m-1)$ gehörige Einheit aus $\mathfrak{e}$; das Vorzeichen $\varepsilon = \pm 1$ legen wir für jedes S so fest, daß

$$\mathrm{Sp}(\hat{S}[\widetilde{R(S)}]) < \mathrm{Sp}\,\hat{S}$$

ist. γ hänge nur von ι ab.

Sämtlichen Matrizenpaaren $U \in \Psi$, $T \in \mathfrak{G}^-$ wollen wir eine spezielle Folge $(V_\tau, T_\tau) \in \mathfrak{p}(T)$ zuordnen. Für die ersten τ wähle man $V_\tau \in U \mathfrak{u} U^{-1}$, derart, daß die Ungleichungen

$$\mathrm{Sp}(\hat{T}_{\tau+1}[\tilde{U}]) < \mathrm{Sp}(\hat{T}_\tau[\tilde{U}]) \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots) \tag{79}$$

gelten. Bei passendem η ist $\mathrm{Sp}(\hat{T}_\eta[\tilde{U}]) < 0$, d. h. $T_\eta[U]$ in einem der Bereiche $\mathfrak{B}(\iota, \lambda, \xi)$ gelegen. Man setze

$$V_\tau = U\,R(T_\eta[U])\,U^{-1} \qquad (\tau \geqq \eta).$$

Die Ungleichungen (79) bestehen für alle τ; außerdem haben wir $V_\tau \in U(\mathfrak{c} \cup \mathfrak{u})U^{-1}$ $(\tau = 0, 1, 2, \ldots)$. Nunmehr ergibt sich (59) mit

$$c_{14}(U, p) = \Big(\sum_{V \in U(\mathfrak{c} \cup \mathfrak{u})U^{-1}} c_{13}(V'^{-1}; U, p)\Big)\Big(\sum_{\gamma=0}^{\infty} E(-pg^{-1}\gamma)\Big).$$

Wegen (58), (59) gilt (60) für sämtliche Folgen $(V_\tau, T_\tau) \in \mathfrak{p}(U, T)$.

Die Konvergenz der Reihen (49) liefert die Ungleichungen

$$\sum_{\mathrm{Sp}(\tilde{T}[\tilde{U}])=\alpha} |a(W, T)| \leqq c_{20}(W; U, p)\, E(p\alpha).$$

Angenommen, für $S, T \in \mathfrak{B}(\iota, \lambda, \xi)$ und zwei passende Indizes σ, τ sei

$$S[R^{\sigma}(S)] = T[R^{\tau}(T)].$$

Dann folgt

$$S = \begin{cases} T[C_{\iota}^{\varrho}(f)] & (m \geqq 2) \\ T[B_{\iota\gamma}(\varrho q)] & (m = 1) \end{cases}$$

mit einer gewissen ganzen rationalen Zahl ϱ. Hieraus wird ersichtlich, daß unter der oben genannten Voraussetzung $\mathrm{Sp}\,\tilde{S} = \mathrm{Sp}\,\tilde{T}$ bei festem T für höchstens zwei Matrizen S eintreten kann.

Es sei $U \in \Psi$ gegeben und

$$c_{21}(U, p) = 2\Big(\sum_{V \in U \mathfrak{c} U^{-1}} c_{20}(V'^{-1}; U, p)\Big)\Big(\sum_{\gamma=0}^{\infty} E(-pg^{-1}\gamma)\Big).$$

Wir benutzen (60) mit $V_{\tau} = U\,R(T[U])\,U^{-1}$ und erhalten

$$\sum |b(T)| \leqq c_{21}(U, p)\, E(p\alpha).$$

Zu summieren ist dabei über T unter den Nebenbedingungen

$$T[U] \in \mathfrak{B}(\iota, \lambda, \xi), \quad \mathrm{Sp}(\tilde{T}[\tilde{U}]) = \alpha.$$

Als nächstes betrachten wir den Fall $S = T[U] \in \mathfrak{S} - \mathfrak{S}^*$. Es gibt zwei Möglichkeiten.

1) Eine der Ungleichungen (18) ist falsch, d. h. die Matrix $\tilde{S}$ besitzt ein negatives Diagonalelement. Dann liegt S in der Vereinigungsmenge $\mathfrak{B}$ aller $\mathfrak{B}(\iota, \lambda, \xi)$.

2) Die Ungleichungen (18) sind richtig, aber die Bedingungen (19) nicht sämtlich erfüllt. Es existieren also Indizes μ, β, γ $(\beta \neq \gamma)$ mit

$$r(s_{\beta}^{(\mu)} + s_{\gamma}^{(\mu)}) < |s_{\beta\gamma}^{(\mu)}|.$$

Für ein gewisses $u \in \mathfrak{r}$ gilt jetzt

$$S[B_{\beta\gamma}(u)] \in \mathfrak{B}, \quad \mathrm{Sp}(\widetilde{S[B_{\beta\gamma}(u)]}) \leqq (1 + r^2)\,\mathrm{Sp}\,\tilde{S}.$$

Aus diesen Überlegungen erkennt man die Richtigkeit der Ungleichungen

$$\sum_{\substack{\mathrm{Sp}(\tilde{T}[\tilde{U}])=\alpha \\ T[U] \in \mathfrak{S}-\mathfrak{S}^*}} |b(T)| \leqq c_{22}(U, p)\, E(p\alpha).$$

Um schließlich auch die $T[U] \in \mathfrak{S}^*$ zu erfassen, benutzen wir Hilfssatz 17 und die Ungleichungen (59). Insgesamt erhält man (22) mit passenden Konstanten $c_{11}(U, p)$ und damit die Konvergenz der Reihe (45).

Satz 2 ist bewiesen.

§ 5. *Der positive Teil*

Zwei Matrizen $S, T \in \mathfrak{S}^+$ nenne man äquivalent, wenn die Gleichung $S = T[U]$ durch ein passendes $U \in \Psi$ erfüllbar ist. In jeder Äquivalenzklasse wähle man einen Repräsentanten S mit $\tilde{S} \in \tilde{\mathfrak{P}}$. Die Gesamtheit dieser Matrizen S

heiße $\mathfrak{Q}$. Den Matrizen $T \in \mathfrak{G}^+$ werde je ein Element $R(T) \in \Psi$ zugeordnet, so daß die nachstehenden Bedingungen gelten

$$\left|\begin{array}{ll} R(T) \in \mathfrak{u},\ \mathrm{Sp}(\hat{T}[\widetilde{R(T)}]) < \mathrm{Sp}\,\hat{T} & (\hat{T} \notin \tilde{\mathfrak{P}}) \\ R(T) \in \mathfrak{v},\ T[R(T)] \in \mathfrak{Q} & (\hat{T} \in \tilde{\mathfrak{P}},\ T \notin \mathfrak{Q}) \\ \qquad R(T) = E & (T \in \mathfrak{Q}) \end{array}\right| .$$

Den Bereich $\mathfrak{Q}$ und die Matrizen $R(T)$ betrachten wir weiterhin als fest gegeben. Die Folge $\mathfrak{p}(T) = \{T_0, T_1, \ldots, T_{l(T)-1}, T_{l(T)}\}$ ist dann durch die Forderungen

$$T_0 = T,\ T_\tau = T_{\tau-1}[R(T_{\tau-1})]\ (\tau = 1, \ldots, l(T)),\ T_{l(T)-1} \notin \mathfrak{Q},\ T_{l(T)} \in \mathfrak{Q}$$

eindeutig bestimmt, ebenso die Matrix

$$W(T) = R'(T_{l(T)})\, R'(T_{l(T)-1}) \ldots R'(T_1)\, R'(T_0)\,.$$

Ferner folgt

$$T = S[W'^{-1}(T)] \qquad (T \in \mathfrak{G}^+,\ S \in \mathfrak{Q})\,. \tag{80}$$

Es bezeichne $\mathfrak{s}$ die Gesamtheit der Systeme konvergenter Fourierreihen $Q^+(U; \bar{Z})$ $(U \in \Psi)$, für welche die Relationen (50) erfüllt sind. Zwei Systeme $Q_1^+(U; \bar{Z})$, $Q_2^+(U; \bar{Z})$ von $\mathfrak{s}$ nenne man äquivalent, wenn die Gleichungen

$$Q_2^+(U; \bar{Z}) = P^+(\bar{Z}[\bar{U}]) - P^+(\bar{Z}) + Q_1^+(U; \bar{Z}) \qquad (U \in \Psi)$$

mit einer passenden Fourierreihe $P^+(\bar{Z})$ bestehen.

Gegeben sei ein System $Q^+(U; \bar{Z})$ der Menge $\mathfrak{s}$. Aus (57),

$$a(W(T), S) = \sum_{\tau=1}^{l(T)} a(R'(T_{\tau-1}), T_\tau);\ R(T_{\tau-1}) \in \mathfrak{u} \cup \mathfrak{v}\,,$$

der Konvergenz der Reihe (48) und Hilfssatz 19 schließt man

$$|a(W(T), S)| \leq c_{22}(p)\, E(p\hat{T})\,.$$

Die Fourierreihe $P^+(\bar{Z})$ mit den Koeffizienten $b(T) = a(W(T), S)$ konvergiert somit wegen Hilfssatz 19. Wir setzen

$$a_0(U, T) = -b(T[U'^{-1}]) + b(T) + a(U, T) \qquad (U \in \Psi,\ T \in \mathfrak{G}^+)$$

und leiten aus (80)

$$a_0(W(T), S) = 0 \qquad (T \in \mathfrak{G}^+,\ S \in \mathfrak{Q}) \tag{81}$$

her.

Man nenne ein System $Q_0^+(U; \bar{Z})$ aus $\mathfrak{s}$ reduziert, wenn die Koeffizienten $a_0(U, T)$ den Bedingungen (81) genügen. $\mathfrak{k}$ sei die Gesamtheit der reduzierten Systeme von $\mathfrak{s}$.

Hilfssatz 20: *In jeder Klasse äquivalenter Systeme aus $\mathfrak{s}$ gibt es ein und nur ein reduziertes System.*

Beweis: Klar.

Die Matrizen

$$W(U, T) = W(T)\, U\, W^{-1}(T[U'^{-1}]) \qquad (U \in \Psi,\ T \in \mathfrak{G}^+) \tag{82}$$

gehören wegen (80) der früher definierten Gruppe $\Lambda'(S)$ $(S \in \mathfrak{Q})$ an. Vermöge (57), (81) ist

$$a_0(U, T) = a_0(W(U, T), S) \quad (U \in \Psi, T \in \mathfrak{G}^+, S \in \mathfrak{Q}). \tag{83}$$

Umgekehrt ergibt sich (81) aus (83). Die Relationen (57) liefern

$$a_0(UV, S) = a_0(U, S) + a_0(V, S) \qquad (U, V \in \Lambda'(S)). \tag{84}$$

Ist (84) erfüllt, so genügen die durch (83) erklärten Größen $a_0(U, T)$ den Gleichungen (57). Die Formeln (84) besagen, daß die Abbildung $U \to a_0(U, S)$ $(U \in \Lambda'(S))$ einen Homomorphismus von $\Lambda'(S)$ in die additive Gruppe der komplexen Zahlen darstellt.

Bei $S \in \mathfrak{H}_n$, d. h. $\tilde{S} \in \tilde{\mathfrak{S}}_0$, besitzt $\Lambda'(S)$ wegen Hilfssatz 12 endliche Ordnung, und $\Lambda'(S) \to 0$ ist der einzige Homomorphismus von $\Lambda'(S)$ in die additive Gruppe der komplexen Zahlen. In den Fourierreihen $Q_0^+(U; \tilde{Z})$ braucht daher nur über die Matrizen $T \in \mathfrak{H}$ summiert zu werden.

Insgesamt ergibt sich

Hilfssatz 21: *Die Menge* t *besteht aus allen Systemen von Fourierreihen*

$$Q_0^+(U; \tilde{Z}) = \sum_{T \in \mathfrak{H}} a_0(W(U, T), S)\, E\{\tilde{T}\tilde{Z}\} \qquad (U \in \Psi) \tag{85}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) *Für jedes feste* $S \in \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{H}$ *stellt die Zuordnung*

$$U \to a_0(U, S) \qquad (U \in \Lambda'(S))$$

einen Homomorphismus von $\Lambda'(S)$ *in die additive Gruppe der komplexen Zahlen dar.*

2) *Die Fourierreihen* (85) *konvergieren in* $\tilde{\mathfrak{Z}}$.

Es scheint nicht leicht zu sein, allgemeine Regeln über die Homomorphismen der Gruppen $\Lambda'(S)$ in die additive Gruppe der komplexen Zahlen und über die Konvergenz der Reihen (85) aufzustellen. Wir werden jedoch später einige Beispiele betrachten. Das Hauptresultat dieses Paragraphen fassen wir zusammen in

Satz 3: *Jedes System von Fourierreihen* $Q^+(U, \tilde{Z})$ *der Menge* s *ist genau einem System* $Q_0^+(U, \tilde{Z})$ *der Klasse* t *äquivalent.*

§ 6. Der lineare Teil

Hilfssatz 22: *Jedem* $U \in \Psi$ *sei eine symmetrische* $n \times n$ *Matrix* $M(U)$ *aus* a *zugeordnet. Die Relationen* (52) *sind notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit der Differenzengleichungen*

$$N[U'] - N = M(U) \qquad (U \in \Psi) \tag{86}$$

mit einer symmetrischen $n \times n$ *Matrix* N *aus* a. *Durch die Gleichungen* (86) *ist* N *eindeutig bestimmt* ($m \geqq 2$ *oder* $n \geqq 3$).

Beweis: Die Richtigkeit von (86) zieht (52) nach sich. Nun gelte umgekehrt (52); wir wollen die Differenzengleichungen (86) lösen.

$m \geqq 2$:
Man setze
$$N = \frac{M(fE)}{f^2 - 1}, \quad f^2 \neq 1, f \in \varphi .$$

$m = 1, n \geqq 3$:
Für jede symmetrische $n \times n$ Matrix N genügen die Größen
$$L(U) = -N[U'] + N + M(U) \qquad (U \in \Psi)$$
den Relationen (52). Wir zeigen, daß die Gleichungen
$$L(B_{\iota\varkappa}(q)) = 0 \qquad (\iota \neq \varkappa; \iota, \varkappa = 1, \ldots, n) \tag{87}$$
bei genau einem N erfüllt sind. Aus
$$B_{\iota\varkappa}(q)\, B_{\mu\nu}(q) = B_{\mu\nu}(q)\, B_{\iota\varkappa}(q) \qquad (\iota, \mu \neq \varkappa, \nu)$$
folgt wegen (52)
$$L(B_{\iota\varkappa}(q))\,[B'_{\mu\nu}(q)] - L(B_{\iota\varkappa}(q)) = L(B_{\mu\nu}(q))\,[B'_{\iota\varkappa}(q)] - L(B_{\mu\nu}(q)) \;(\iota, \mu \neq \varkappa, \nu).$$
Hieraus ergibt sich das Verschwinden aller Elemente der Matrix $L(B_{\iota\varkappa}(q))$ außerhalb der ι-ten Zeile $l_{\iota\varkappa} = (l_{\iota\varkappa 1}, \ldots, l_{\iota\varkappa n})$ und der ι-ten Spalte $l'_{\iota\varkappa}$; ferner ist
$$l_{\iota\varkappa\nu} = l_{\mu\nu\varkappa} \qquad (\iota, \mu \neq \varkappa, \nu). \tag{88}$$
Man wende (52) auf beide Seiten der Relation
$$B_{\iota\varkappa}(q)\, B_{\varkappa\lambda}(q)\, B_{\iota\varkappa}(q) = B_{\varkappa\lambda}(q)\, B_{\iota\varkappa}(q)\, B_{\varkappa\lambda}(-q)\, B_{\iota\varkappa}(q)\, B_{\varkappa\lambda}(q) \qquad (\iota \neq \varkappa \neq \lambda \neq \iota)$$
an. Dann bekommt man
$$2 l_{\iota\varkappa\lambda} = l_{\varkappa\lambda\varkappa} - q\, l_{\varkappa\lambda\lambda} \qquad (\iota \neq \varkappa \neq \lambda \neq \iota). \tag{89}$$
Die Matrix N ist auf genau eine Weise so bestimmbar, daß
$$l_{1\varkappa 1} = l_{1\varkappa\varrho} = 0 \; (2 \leqq \varkappa \leqq \varrho \leqq n); \; l_{211} = 0$$
gilt. Vermöge (88), (89) folgt nun (87).
$$L(A_{\iota\varkappa}(u, v, w, x)) = 0 \qquad (\iota \neq \varkappa). \tag{90}$$

Beweis: Für $\mu \neq \iota, \varkappa$ ist
$$B_{\mu\iota}(q)\, A_{\iota\varkappa}(u, v, w, x) = A_{\iota\varkappa}(u, v, w, x)\, B_{\mu\iota}(uq)\, B_{\mu\varkappa}(vq),$$
$$B_{\mu\varkappa}(q)\, A_{\iota\varkappa}(u, v, w, x) = A_{\iota\varkappa}(u, v, w, x)\, B_{\mu\iota}(wq)\, B_{\mu\varkappa}(xq),$$
$$B_{\iota\mu}(q)\, A_{\iota\varkappa}(u, v, w, x) = A_{\iota\varkappa}(u, v, w, x)\, B_{\iota\varkappa}(\varepsilon x q)\, B_{\varkappa\mu}(-\varepsilon w q) \qquad (\varepsilon = ux - vw).$$
Auf Grund von (52), (87) verschwinden die Größen $L(B_{\beta\gamma}(yq))$ ($\beta \neq \gamma$; $\beta, \gamma = 1, \ldots, n$) bei ganzem rationalen y; wegen $m = 1$ sind u, v, w, x, ε ganzrational. Wir wenden (52) auf die obigen Relationen an und erhalten
$$L[B'_{\mu\iota}(q)] = L[B'_{\mu\varkappa}(q)] = L[B'_{\iota\varkappa}(q)] = L; \; L = L(A_{\iota\varkappa}(u, v, w, x)).$$
Hieraus folgt (90).

Hilfssatz 7 und (90) ziehen $L(U) = 0$ ($U \in \Psi$) und damit (86) nach sich.

Es bezeichne $\mathfrak{m}$ die Gesamtheit der Systeme von Matrizen $M(U) \in \mathfrak{G}$ ($U \in \Psi$), welche (52) befriedigen und $\mathfrak{N}$ die Menge aller symmetrischen $n \times n$ Matrizen N aus $\mathfrak{o}$ mit $N[U'] - N \in \mathfrak{G}$ ($U \in \Psi$). Man nenne zwei Systeme $M_1(U)$, $M_2(U)$ von $\mathfrak{m}$ äquivalent, falls
$$M_2(U) = D[U'] - D + M_1(U) \qquad (U \in \Psi)$$

für ein passendes $D \in \mathfrak{G}$ gilt. Die Klassen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N}$ bilden Gruppen bezüglich der Addition ihrer Elemente. Durch (86) werden die Systeme von $\mathfrak{m}$ den Matrizen aus $\mathfrak{N}$ umkehrbar eindeutig zugeordnet. Zwei Matrizensysteme von $\mathfrak{m}$ sind genau dann äquivalent, wenn die zugehörigen Matrizen aus $\mathfrak{N}$ derselben Restklasse modulo $\mathfrak{G}$ angehören. Es bedeute $\mathfrak{n}$ ein vollständiges System von Repräsentanten der verschiedenen Restklassen von $\mathfrak{N}$ modulo $\mathfrak{G}$. Die Menge $\mathfrak{n}$ ist endlich; denn es gilt

Hilfssatz 23: *Die Faktorgruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{G}$ besitzt endliche Ordnung ($m \geqq 2$ oder $n \geqq 2$).*

Beweis: Aus

$$N[B_{\iota\varkappa}(q)] - N,\ N[C_\iota(f)] - N \in \mathfrak{G} \qquad (\iota \neq \varkappa;\ \iota, \varkappa = 1, \ldots, n;\ f \in \psi)$$

schließt man die Existenz einer ganzen rationalen Zahl k mit $k\mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}$ und hieraus die Behauptung.

Insgesamt bekommen wir

Satz 4: *Jedes System von Matrizen $M(U)$ der Menge $\mathfrak{m}$ ist genau einem der endlich vielen Systeme*

$$M_0(U) = N[U'] - N \qquad (N \in \mathfrak{n})$$

äquivalent ($m \geqq 2$ oder $n \geqq 3$).

§ 7. Der konstante Teil

Ein Charakter der Gruppe Ψ_0 ist ein Homomorphismus von Ψ_0 in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen. Wegen (53) und $j(U) = j(-U)$ falls $U, -U \in \Psi$, stellen die Größen $E\{j(U)\}$ einen Charakter der Gruppe Ψ_0 dar; sämtliche Charaktere sind auf diese Weise mit passenden $j(U)$ erhältlich.

Satz 5: *Jeder Charakter $E\{j(U)\}$ von Ψ_0 definiert ein Multiplikatorensystem*

$$I(U, S; \mathfrak{Z}) = E\{j(U)\}$$

zur Gruppe Δ. Verschiedenen Charakteren entsprechen nicht äquivalente Multiplikatorensysteme.

§ 8. Klassifikation

Die bisherigen Ergebnisse fassen wir nun zusammen.

Hauptsatz: *Zu jedem Multiplikatorensystem $I(U, S; \mathfrak{Z})$ der Gruppe Δ gibt es genau ein äquivalentes Multiplikatorensystem*

$$I_0(U, S; \mathfrak{Z}) = E\{Q_0^+(U, \mathfrak{Z})\} \cdot E\{(\tilde{N}[\tilde{U}'] - \tilde{N})\mathfrak{Z}\} \cdot E\{j(U)\}. \tag{91}$$

Hierbei ist $Q_0^+(U, \mathfrak{Z})$ $(U \in \Psi)$ ein System von Fourierreihen aus $\mathfrak{t}$, ferner $N \in \mathfrak{n}$ und $E\{j(U)\}$ ein beliebiger Charakter der Gruppe Ψ_0 ($m \geqq 3$ oder $n \geqq 3$).

Kapitel III. Spezialfälle und Bemerkungen

§ 1. Über den Fall $m = 1$

Wir wollen die Homomorphismen der Gruppe $\Lambda'(S)$ $(S \in \mathfrak{H})$ in die additive Gruppe der komplexen Zahlen Z näher untersuchen. Wegen $m = 1$ gibt es zu

jeder Matrix $S \in \mathfrak{H}_\varrho$ $(1 \leqq \varrho \leqq n)$ ein $U \in \Omega$ mit $T = S[U]$,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}, \quad T_1 > 0\,; \tag{92}$$

dabei ist T_1 eine $\varrho \times \varrho$ Matrix. Wie am Schluß von Kap. I, § 4 bemerkt, sind $\Lambda'(S)$ und $\Lambda(T)$ isomorph, also auch ihre Homomorphismen in Z. Das Symbol ζ stehe im folgenden für einen beliebigen Homomorphismus $\Lambda(T) \to Z$.

Vermöge (92) besitzt jedes $U \in \Lambda(T)$ die Gestalt

$$U = U_1 U_2 U_3, \quad U_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & V_1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} V_2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} E & V_3 \\ 0 & E \end{pmatrix} \tag{93}$$

$$T_1[V_1] = T_1 \tag{94}$$

mit einer $\varrho \times \varrho$ Matrix V_1, einer $(n-\varrho) \times (n-\varrho)$ Matrix V_2 und einer $(n-\varrho) \times \varrho$ Matrix V_3. Offenbar gilt $U_1 U_2$, $U_3 \in \Psi$; d. h. $U_1 U_2$, $U_3 \in \Lambda(T)$. Dagegen brauchen U_1 und U_2 selbst nicht in Ψ zu liegen; denn es könnte $\Psi = \Omega^+(n, q)$ und $\operatorname{Det} U_1 = \operatorname{Det} U_2 = -1$ sein. $U_1, U_2 \in \Psi$ zieht jedoch $U_1, U_2 \in \Lambda(T)$ nach sich.

Es sei $\Psi(n) = \Omega(n, q)$ $(q = 1, 2)$. Dann gilt $U_1, U_2, U_3, C_\iota(-1) \in \Lambda(T)$ $(\iota = 1, \ldots, n-\varrho)$. Vermöge (94) ist U_1 von endlicher Ordnung, ferner $C_\iota^2(-1) = E$, folglich $\zeta U_1 = \zeta C_\iota(-1) = 0$. Die Beziehung $(C_1(-1) \ldots C_{n-\varrho}(-1)\, U_3)^2 = E$ liefert $\zeta U_3 = 0$. Die Gruppe $\Psi(2)$ wird durch die Elemente

$$C_1(-1)\, B_{12}(q), \quad C_2(-1)\, B_{21}(q), \quad C_1(-1), \quad C_2(-1)$$

zweiter Ordnung erzeugt [4, 7], und $\Psi(1)$ besteht nur aus $1, -1$. Wegen Hilfssatz 7 ist U_2 das Produkt von Elementen endlicher Ordnung, d. h. $\zeta U_2 = 0$. Insgesamt haben wir $\zeta \Lambda(T) = 0$.

Für $n \equiv 1 \bmod 2$ sind die Gruppen $\Omega(n, q)/\Xi(n)$ und $\Omega^+(n, q)$ $(q = 1, 2)$ isomorph. Dieses liefert

Satz 6: *Es sei*

$$\Psi(n) = \Omega(n, q) \ (q = 1, 2) \quad \textit{oder} \quad \Psi(n) = \Omega^+(n, q) \ (q = 1, 2;\ n \equiv 1 \bmod 2)\,.$$

Dann sind die Bedingungen (50) *notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit der Differenzengleichungen* (54).

Jetzt betrachten wir die Gruppen

$$\Psi(n) = \Omega^+(n, q) \ (q = 1, 2;\ n \equiv 0 \bmod 2) \quad \text{oder} \quad \Psi(n) = \Omega(n, q) = \Omega^+(n, q)$$
$$(q = 3, 4, \ldots)\,.$$

Man unterscheide zwei Fälle: $\varrho = n - 1$ und $1 \leqq \varrho \leqq n - 2$.

$\varrho = n - 1$:

Es ist $V_2 = \pm 1$, also $U_1 U_2$ von endlicher Ordnung, folglich $\zeta(U_1 U_2) = 0$. Die Gruppe $\Lambda(T_1)$ bestehe aus allen $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen $V \in \Omega^+(n-1, q)$ mit $T_1[V] = T_1$. Indem man eventuell $U_1 U_2$ durch $-U_1 U_2$ ersetzt, kann man $U_2 = E$, d. h. $V_1 \in \Lambda(T_1)$ erreichen. Wir führen die $(n-1)$-reihige Spalte

$$t : t_\nu = \zeta B_{1\nu}(q) \qquad (\nu = 2, \ldots, n) \tag{95}$$

ein und leiten aus $\zeta(U_1^{-1} U_3 U_1) = \zeta U_3$ die Relationen

$$V_1 t = t \qquad (V_1 \in \Lambda(T_1)) \tag{96}$$

ab. Ist umgekehrt t irgendeine komplexe Spalte, welche den Relationen (96) genügt, so wird durch (95) genau ein Homomorphismus ζ von $\Lambda(T)$ in Z definiert.

Liegt T_1 im Inneren eines Bildes der Minkowskischen Pyramide [11, 13], dann enthält $\Lambda(T_1)$ nur die Einheitsmatrix E, und t ist eine beliebige komplexe Spalte. Letzteres gilt auch bei allen genügend großen q, also für $q \geqq q_0(n)$; denn die Matrizen $V_1 \in \Lambda(T_1)$ gehören einer endlichen, nur von n abhängigen Menge an, falls T_1 in der Minkowskischen Pyramide liegt.

$1 \leqq \varrho \leqq n-2$:

Aus $\zeta(B_{\iota\varkappa}(q)\, U_3\, B_{\iota\varkappa}(-q)) = \zeta U_3$ ($\iota \neq \varkappa$; $\iota, \varkappa = 1, \ldots, n-\varrho$) folgt $\zeta U_3 = 0$. Es kommt also nur darauf an, die Homomorphismen $\zeta(U_1 U_2)$ zu untersuchen. Man hat zwei Möglichkeiten.

Hilfssatz 24: *Es existiere ein* $\mathring{U} \in \Lambda(T)$ *mit folgender Eigenschaft: Zerlegt man* $\mathring{U}$ *gemäß* (93), *so gilt* $\operatorname{Det} \mathring{U}_1 = -1$. *Dann ist* $\zeta\Lambda(T) = 0$.

Beweis: Der hier betrachtete Fall kann nur bei $q = 1, 2$ eintreten. Für ein beliebiges $U \in \Lambda(T)$ setze man

$$U_1 U_2 = U_1^* U_2^*;\ U_1^* = U_1 C_1(\operatorname{Det} U_1) \in \Lambda(T);\ U_2^* = \begin{pmatrix} V_2^* & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},\quad V_2^* \in \Psi(n-\varrho)\,.$$

Nun ist U_1^* von endlicher Ordnung, mithin $\zeta U_1^* = 0$. Es bleibt $\zeta U_2^* = 0$ nachzuweisen.

$$W_\iota B_{\iota\varkappa}(q)\, W_\iota^{-1} B_{\iota\varkappa}(q) = E;\ W_\iota = \mathring{U}_1 C_\iota(-1) \in \Lambda(T) \quad (\iota \neq \varkappa;\ \iota, \varkappa = 0, \ldots, n-\varrho)$$

zieht $\zeta B_{\iota\varkappa}(q) = 0$ nach sich. Für $q = 1, 2$ wird die Gruppe $\Psi(2)$ von den 2×2 Matrizen $B_{12}(q)$, $B_{21}(q)$, $-E$ erzeugt [7]. Vermöge Hilfssatz 7 ist daher U_2^* das Produkt endlich vieler $n \times n$ Matrizen $B_{\iota\varkappa}(q)$, $C_\iota(-1)\, C_\varkappa(-1)$ ($\iota \neq \varkappa$; $\iota, \varkappa = 1, \ldots, n-\varrho$). Hieraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 25: *Ist* $\operatorname{Det} U_1 = 1$ *für alle* $U \in \Lambda(T)$, *so existiert ein Homomorphismus* η *von* $\Lambda(T)$ *auf* $\Psi_0(n-\varrho)$ *mit* $\zeta U = 0$, *falls* U *im Kern von* η *liegt.*

Beweis: Man definiere

$$\eta : U \to V_2 \cdot \Xi(n-\varrho)\,,$$

und wegen $\zeta U_1 = 0$ ergibt sich die Behauptung.

Satz 7: *Es sei*

$$\Psi(n) = \Omega^+(n, q)\ (q = 1, 2;\ n \equiv 0 \bmod 2) \quad \textit{oder} \quad \Psi(n) = \Omega(n, q) = \Omega^+(n, q)$$
$$(q = 3, 4, \ldots)\,.$$

Für $\varrho = n-1$ *werden die Homomorphismen* $\Lambda(T) \to Z$ *durch die* $(n-1)$-*reihigen komplexen Spalten* t *repräsentiert, welche den Bedingungen* (96) *genügen. Bei* $1 \leqq \varrho \leqq n-2$ *ist entweder* $\zeta\Lambda(T) = 0$, *oder es gibt einen Homomorphismus* η *von* $\Lambda(T)$ *auf* $\Psi_0(n-\varrho)$ *mit* $\zeta U = 0$, *wenn* U *im Kern von* η *liegt.*

Wir betrachten die zwei Fälle $n \equiv 0 \bmod 2$, $q = 1, 2$ noch etwas genauer.

$q = 1$:

Die elliptische Modulgruppe $\Psi_0(2)$ wird von je einem Element zweiter und dritter Ordnung erzeugt [4, 7]; wegen Hilfssatz 7 ist $\Psi_0(n-\varrho)$ $(1 \leqq \varrho \leqq n-2)$ durch Elemente endlicher Ordnung erzeugbar; folglich $\zeta \Lambda(T) = 0$ $(1 \leqq \varrho \leqq$ $\leqq n-2)$. Also

$$Q_0^+(U; \bar{Z}) = \sum_{T \in \mathfrak{H}_{n-1}} a_0(W(U, T), S)\, E\{\bar{T}\bar{Z}\}.$$

$q = 2$:

Aus $C_\varkappa(-1)\; C_\lambda(-1) \in \Lambda(T)$ und $(B_{\iota\varkappa}(2)\; C_\varkappa(-1)\; C_\lambda(-1))^2 = E$ $(\lambda \neq \iota \neq$ $\neq \varkappa \neq \lambda;\ 1 \leqq \iota, \varkappa, \lambda \leqq n-\varrho)$ schließen wir $\zeta B_{\iota\varkappa}(2) = 0$, mithin $\zeta \Lambda(T) = 0$ $(1 \leqq \varrho \leqq n-3)$. Ferner ist $\Psi_0(2)$ die freie Gruppe der Erzeugenden $\pm B_{12}(2)$, $\pm B_{21}(2)$ [4, 7]. Die Homomorphismen von $\Psi_0(2)$ in Z werden also durch die beiden unabhängigen komplexen Parameter $\zeta B_{12}(2)$, $\zeta B_{21}(2)$ repräsentiert. Folglich

$$Q_0^+(U; \bar{Z}) = \sum_{T \in \mathfrak{H}_{n-1} \cup \mathfrak{H}_{n-2}} a_0(W(U, T), S)\, E\{\bar{T}\bar{Z}\}.$$

§ 2. Über den Fall $m = 1$, $n = 2$

Aus [3] wird ersichtlich, daß die Relationen (51) für die Lösbarkeit der Differenzengleichungen (55) nicht hinreichen. Mit Hilfe der in [3] benutzten Methode und der in [7] entwickelten Theorie der Hauptkongruenzgruppen q-ter Stufe zur elliptischen Modulgruppe ist es aber vielleicht möglich, eine vollständige Klassifikation des nicht positiven Teils durchzuführen. An dieser Stelle wollen wir hierauf nicht eingehen, sondern uns dem positiven Teile zuwenden und für $\Psi = \Omega^+(2, q)$ $(q = 1, 2)$ die in Kap. II, § 5 definierten Matrizen S, $R(T)$, $W(T)$ sowie die Fourierreihen $Q_0^+(U; \bar{Z})$ näher untersuchen. Ferner betrachten wir die Differenzengleichungen (86).

Zu jeder Matrix

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}$$

existiert ein $U \in \Omega^+(2, 1)$ mit

$$T[U] = S = S_0; \quad S_0 = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s > 0;$$

und T bestimmt S_0 eindeutig. Bezüglich $\Omega^+(2, 2)$ ist T genau einer der drei Matrizen

$$S = S_0, \quad S = S_0[I], \quad S = S_0[B_{12}(1)]$$

äquivalent; $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Für $R(T)$ nehme man

$$B_{12}(-q \operatorname{sgn} t_2)\ (t_3 > t_1 > 0,\ q = 1, 2);\ B_{21}(-q \operatorname{sgn} t_2)\ (t_1 > t_3 > 0,\ q = 1, 2);$$
$$B_{12}(-\operatorname{sgn} t_2)\ (t_1 = t_3,\ q = 1);\ I\ (t_1 = 0,\ q = 1);\ E\ (t_3 = 0,\ q = 1);$$
$$E(t_3 = 0,\ q = 2\ T \text{ äq. } S_0);\ E(t_1 = 0,\ q = 2,\ T \text{ äq. } S_0[I]);$$
$$B_{12}(2)\ (t_1 = t_3 = -t_2,\ q = 2,\ T \text{ äq. } S_0[B_{12}(1)]);\ E(t_1 = t_3 = t_2,\ q = 2,\ T \text{ äq. } S_0[B_{12}(1)]).$$

Wir definieren $W(T) = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$ wie in Kap. II, § 5, schließen

$$|w| \geqq |u|,\ |x| \geqq |v|\ (q = 1 \ \text{ oder } \ q = 2,\ T \text{ äq. } S_0);\ |w| \leqq |u|,\ |x| \leqq |v| \quad (q = 2,\ T \text{ äq. } S_0[I])$$

und erhalten hieraus wegen (80) die Abschätzung $\mathrm{Sp}(W'(T)\,W(T)) \leqq 2s^{-1}\,\mathrm{Sp}\,T$. Im Falle $q = 2$, T äq. $S_0[B_{12}(1)]$ ist diese Ungleichung nicht bei allen T richtig; eine elementare Rechnung liefert jedoch

$$\mathrm{Sp}(W'(T)\,W(T)) \leqq 39s^{-1}\,\mathrm{Sp}\,T\,; \tag{97}$$

letzteres gilt in sämtlichen vier Fällen.

Die Gruppe $\Lambda(S)$ besteht aus den Matrizen

$$\pm L^\gamma \qquad (\gamma = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

mit

$$L = B_{21}(1)\ (q = 1);\ B_{21}(2)\ (q = 2,\ S = S_0);\ B_{12}(2)\ (q = 2,\ S = S_0[I]);$$
$$B_{12}(-1)\,B_{21}(2)\,B_{12}(1)\ (q = 2,\ S = S_0[B_{12}(1)]).$$

Wir setzen

$$W(U, T) = \pm L^{\gamma(U,T)}.$$

Aus (82), (97) folgt

$$\mathrm{Sp}(W'(U,T)\,W(U,T)) \leqq (39s^{-1}\,\mathrm{Sp}(U'U)\,\mathrm{Sp}\,T)^2,$$

also

$$|\gamma(U,T)| \leqq 39s^{-1}\,\mathrm{Sp}(U'U)\,\mathrm{Sp}\,T,$$

vermöge (84) somit

$$|a_0(W(U,T);S)| \leqq 39\,|a_0(L,S)|\,s^{-1}\,\mathrm{Sp}(U'U)\,\mathrm{Sp}\,T. \tag{98}$$

Hilfssatz 19 und (98) liefern nunmehr

Satz 8: *Für endlich viele Matrizen $S_1, \ldots, S_l \in \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{H}$ seien die Homomorphismen $U \to a_0(U, S_\lambda)$ $(U \in \Lambda'(S_\lambda);\ 1 \leqq \lambda \leqq l)$ willkürlich gegeben. Ferner gelte $a_0(U,S) = 0$ $(S \neq S_1, \ldots, S_l;\ U \in \Lambda'(S))$. Dann konvergieren die Fourierreihen* (85).

Die Klasse $\mathfrak{t}$ enthält also unendlich viele Elemente.

Wir kommen nun zu den Differenzengleichungen (86).

Hilfssatz 26: *Es sei $\Psi = \Omega(2,q)$ $(q = 1, 2)$. Dann sind die Relationen* (52) *für die Lösbarkeit der Differenzengleichungen* (86) *mit N aus $\mathfrak{a}$ notwendig und hinreichend.*

Beweis: Man benutze, daß Ψ_0 durch die Elemente

$$\pm C_1(-1)\,B_{12}(q),\ \pm C_1(-1)\,B_{21}(q),\ \pm C_1(-1)$$

zweiter Ordnung erzeugt wird.

Hilfssatz 27: *Es sei*

$$\Psi = \Omega^+(2,q)\ (q = 1, 2) \quad \text{oder} \quad \Psi = \Omega(2,q) = \Omega^+(2,q) \quad (q = 3, 4, \ldots).$$

Dann reichen die Relationen (52) *zur Lösbarkeit der Differenzengleichungen* (86) *nicht hin.*

Beweis: Die elliptische Modulgruppe $\Omega^+(2, 1)/\Xi(2)$ wird von den Elementen

$$I = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \pm\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt [4, 7], und die Formeln $I^2 = K^3 = \pm E$ ziehen

$$M(I) = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}, \quad M(K) = \begin{pmatrix} w & w + x \\ w + x & x \end{pmatrix}$$

nach sich. Nun sind $I^2 = K^3 = \pm E$ die einzigen unabhängigen Relationen der Gruppe $\Omega^+(2, 1)/\Xi(2)$ [7]. Die Matrizensysteme $M(U)$ $(U \in \Omega^+(2, 1))$, welche (52) genügen, werden somit durch die vier unabhängigen Parameter u, v, w, x beschrieben. Da die symmetrische Matrix N nur drei Elemente besitzt, sind die Gleichungen (86) im allgemeinen unlösbar.

Jetzt bedeute $M(U)$ ein zu $\Omega^+(2, 1)$ gehöriges Matrizensystem, für welches (86) keine Lösung hat, d. h. die Größen

$$L(U) = -N[U'] + N + M(U) \qquad (U \in \Omega^+(2, 1))$$

verschwinden bei keinem N sämtlich. Angenommen, die Differenzengleichungen (86) wären für ein gewisses $q \geqq 1$ lösbar. Dann ließe sich N so wählen, daß $L(U) = 0$ $(U \in \Omega^+(2, q))$ gilt. Es folgt $L(B_{12}(q)) = L(B_{21}(q)) = 0$, wegen (52) also $L(B_{12}(1)) = L(B_{21}(1)) = 0$, und weil $\pm B_{12}(1)$, $\pm B_{21}(1)$ die Gruppe $\Omega^+(2, 1)/\Xi(2)$ erzeugen, $L(U) = 0$ $(U \in \Omega^+(2, 1))$. Das ist ein Widerspruch und Hilfssatz 27 damit bewiesen.

Satz 9: *Bei* $\Psi = \Omega(2, q)$ $(q = 1, 2)$ *sind die Relationen* (52) *für die Lösbarkeit der Differenzengleichungen* (86) *hinreichend; nicht aber im Falle*

$$\Psi = \Omega^+(2, q) \ (q = 1, 2) \quad \textit{oder} \quad \Psi = \Omega(2, q) = \Omega^+(2, q) \quad (q = 3, 4, \ldots).$$

§ 3. Der Fall $n = 1$

Die Menge $\mathfrak{H}$ ist jetzt leer.

Satz 10: *Die Relationen* (50) *sind für die Lösbarkeit der Differenzengleichungen* (54) *notwendig und hinreichend.*

§ 4. Über den Fall $m = 2$, $n = 1$

Die Gesamtheit der Größen $k(s, t)$ $(s, t \in \mathfrak{h})$, welche den Bedingungen (34), (35), (36) genügen, ist gegeben durch

$$k(s, t) = l(\operatorname{Det} H)^{-1}(s^{(1)}t^{(2)} - s^{(2)}t^{(1)}).$$

Hierbei bezeichnet l einen ganzen rationalen Parameter. Für gerades l bilden die Funktionen

$$J(f, s; \mathfrak{z}) = \frac{l}{2}(\operatorname{Det} H)^{-1}(s^{(1)}(f^2)^{(2)}z^{(2)} - s^{(2)}(f^2)^{(1)}z^{(1)}) \quad (f \in \psi;\ s \in \mathfrak{h})$$

ein Exponentensystem, zu dem die Zahlen $k(s, t)$ gehören. Auf die Konstruktion eines Exponentensystems bei ungeradem l gehen wir nicht näher ein.

Besitzen die Exponentensysteme $J_1(f, s; \mathfrak{z})$ und $J_2(f, s; \mathfrak{z})$ das gleiche l, so ist die Differenz $J_1(f, s; \mathfrak{z}) - J_2(f, s; \mathfrak{z})$, wie in Kap. II, § 2 gezeigt wurde, durch

ein äquivalentes Exponentensystem $J_3(f, s; \bar{z})$ mit $J_3(1, s; \bar{z}) = 0$ ersetzbar. Wir zerspalten $J_3(f, 0; \bar{z})$ gemäß (47). Vermöge Satz 10 läßt sich der positive Teil zu Null machen. Der nicht positive Teil ist eine Fourierreihe $Q^-(f; \bar{z})$, in der über alle $t \in \mathfrak{g}$ summiert wird, die mindestens eine negative Konjugierte haben. Man sieht leicht, daß sich die Summanden von $Q^-(f; \bar{z})$ mit $\mathrm{Nm}\, t < 0$ fortschaffen lassen. Übrig bleibt eine nicht zu beseitigende Restsumme, erstreckt über die $t \in \mathfrak{g}$, deren beide Konjugierte negativ sind. Insgesamt bekommen wir

Satz 11: *Zu jedem Multiplikatorensystem gibt es ein äquivalentes der Gestalt*

$$I_0(f, s; \bar{z}) = E\{J_l(f, s; \bar{z})\} \cdot E\{Q_0^-(f, \bar{z})\} \cdot E\{\mathrm{Tr}((\nu f^2 - \nu) z)\} \cdot E\{j(f)\}\,.$$

Hierbei bedeutet $J_l(f, s; \bar{z})$ $(f \in \psi, s \in \mathfrak{h})$ ein zu der Zahl l gehöriges Exponentensystem; in den Fourierreihen $Q_0^-(f, \bar{z})$ hat man über die $t \in \mathfrak{g}$ zu summieren, deren beide Konjugierte negativ sind; ν ist aus $\mathfrak{n}$ und $E\{j(f)\}$ ein Charakter der Gruppe ψ_0.

§ 5. *Über Formen*

Zunächst unterwerfen wir a und n keinen Einschränkungen. Es sei $N \in \mathfrak{N}$, ferner $E\{j(U)\}$ ein Charakter der Gruppe Ψ_0 und $F(\tilde{Z})$ eine holomorphe Funktion, welche den Beziehungen

$$F(\tilde{Z}[\tilde{U}] + \tilde{S}) = E\{j(U)\}\, E\{(\tilde{N}[\tilde{U}'] - \tilde{N})\tilde{Z}\}\, F(\tilde{Z}) \tag{99}$$

bei Substitutionen aus Δ genügt. $F(\tilde{Z})$ ist invariant unter den Translationen $\tilde{Z} \to \tilde{Z} + \tilde{S}$, folglich in eine Fourierreihe

$$F(\tilde{Z}) = \sum_T f(T)\, E\{\tilde{T}\tilde{Z}\}$$

entwickelbar. T läuft über $\mathfrak{S}$. Die Gleichungen (99) sind mit den Relationen

$$f(T) = E\{j(U')\}\, f((T - N)\,[U] + N) \qquad (U \in \Psi) \tag{100}$$

identisch.

Eine in [10] benutzte Methode liefert

$$f(T) = 0 \qquad ((\tilde{T} - \tilde{N}) \not\geq 0;\ m \geq 2 \text{ oder } n \geq 2)\,. \tag{101}$$

Beweis: Aus der Konvergenz der Reihe $F(\tilde{Z})$, Hilfssatz 18 und (100) schließen wir die Ungleichungen

$$|f(T)| \leq c_{24} E\big(\mathrm{Sp}((\tilde{T} - \tilde{N})\,[\tilde{U}] + \tilde{N}) - 2\pi\, \mathrm{Im}\, j(U')\big) \quad (U \in \Psi)\,. \tag{102}$$

Wegen Hilfssatz 10 und (100) genügt es, (101) unter der Voraussetzung $\mathrm{Sp}(\tilde{T} - \tilde{N}) < 0$ zu beweisen. Jetzt benutzen wir (102) für zwei Fälle.

$m \geq 2$:

Es gelte

$$\mathrm{Sp}(T - N)^{(\mu)} < 0;\ U = f^\sigma E;\ f \in \psi;\ f^{(\mu)} > 1 > f^{(\nu)} > 0 \qquad (\nu \neq \mu;\ \nu = 1, \ldots, n)\,.$$

Dann folgt

$$|f(T)| \leq E\big((f^{(\mu)})^{2\sigma}\,\mathrm{Sp}(T - N)^{(\mu)} - \sigma 2\pi\, \mathrm{Im}\, j(fE) + \mathrm{Sp}\,\tilde{N} + \sum_{\nu \neq \mu} (f^{(\nu)})^{2\sigma}\,\mathrm{Sp}(T - N)^{(\nu)}\big).$$

$n \geqq 2$:

Mit

$$\mathrm{Tr}(t_\iota - n_\iota) < 0\,;\; U = B_{\iota\varkappa}(\sigma q) \qquad (\varkappa \neq \iota;\, \varkappa = 1, \ldots, n)$$

wird

$$|f(T)| \leqq E\left(\sigma^2 q^2\, \mathrm{Tr}(t_\iota - n_\iota) + \sigma(2q\, \mathrm{Tr}(t_{\iota\varkappa} - n_{\iota\varkappa}) - 2\pi\, \mathrm{Im}\, j(B'_{\iota\varkappa}(q))) + \mathrm{Sp}\, \hat{T}\right).$$

Wir lassen σ gegen unendlich streben und erhalten (101).

Somit hat man

Satz 12: *Die Gesamtheit der Formen* $F(\hat{Z})$, *welche den Bedingungen* (99) *genügen, besteht aus den konvergenten Fourierreihen*

$$F(\hat{Z}) = \sum_{\hat{T} - \hat{N} \geqq 0} f(T)\, E\{\hat{T}\hat{Z}\}, \tag{103}$$

deren Koeffizienten die Gleichungen (100) *befriedigen.*

Sind insbesondere sämtliche Multiplikatorensysteme von Δ einem der in (99) auftretenden Multiplikatorensysteme äquivalent, was z. B. für

$m = 1$, $n \geqq 3$: $\Psi = \Omega(n, q)$ $(q = 1, 2)$; $\Psi = \Omega^+(n, q)$ $(q = 1, 2;\, n \equiv 1 \bmod 2)$

und $m \geqq 3$, $n = 1$ der Fall ist, so bekommt man alle Formen zur Gruppe Δ, indem man die Fourierreihen $F(\hat{Z})$ mit einer passenden Einheit, d. h. einer holomorphen Funktion ohne Nullstellen multipliziert.

In jeder Klasse bezüglich Ψ äquivalenter Matrizen $T - N$ $(\hat{T} - \hat{N} \geqq 0$; $T \in \mathfrak{S})$ wähle man einen Representanten $S - N$. Die Gesamtheit dieser $S - N$ heiße $\mathfrak{F}(N)$. Ferner bestehe $\mathfrak{F}(N, j)$ aus allen $S - N \in \mathfrak{F}(N)$ mit folgender Eigenschaft:

$$E\{j(U')\} = 1 \quad \text{für} \quad U \in \Lambda(S - N)\,.$$

Angenommen, es gibt ein $U \in \Lambda(T - N)$, so daß $E\{j(U')\} \neq 1$; vermöge (100) bekommt man dann $f(T) = 0$.

Wir definieren

$$F(N, j, S; \hat{Z}) = \sum_V E\{j(V'^{-1})\}\, E\{((\hat{S} - \hat{N})\,[\hat{V}] + \hat{N})\,\hat{Z}\} \quad (S - N \in \mathfrak{F}(N, j))\,; \tag{104}$$

die Summation ist dabei über ein vollständiges Repräsentantensystem der Linksklassen von Ψ bezüglich $\Lambda(S - N)$ zu erstrecken. Die Reihe (103) läßt sich nunmehr in die Gestalt

$$F(\hat{Z}) = \sum_S f(S)\, F(N, j, S; \hat{Z}) \tag{105}$$

setzen, wobei $S - N$ über $\mathfrak{F}(N, j)$ läuft.

Hilfssatz 28: *Es sei* $m = 1$; $\Psi = \Omega(n, q)$ $(q = 1, 2)$; $\Psi = \Omega^+(n, q)$ $(q = 1, 2;$ $n \equiv 1 \bmod 2)$ *oder* $n = 1$. *Dann konvergieren die Reihen* (104).

Beweis:

$m = 1$: $\Psi = \Omega(n, q)$ $(q = 1, 2)$; $\Psi = \Omega^+(n, q)$ $(q = 1, 2;\, n \equiv 1 \bmod 2)$:

Die Gruppe Ψ ist von Elementen zweiter Ordnung erzeugbar, folglich $E\{j(U)\} = \pm 1$ $(U \in \Psi)$. Für $|E\{j(U)\}| = 1$ $(U \in \Psi)$ ergibt sich die Konvergenz aus Hilfssatz 19.

$n = 1$:

Es existieren $m - 1$ Basiselemente $f_1, \ldots, f_{m-1} \in \psi$, derart daß sich jedes $f \in \psi$ in der Gestalt

$$f = \pm f_1^{\alpha_1} \cdots f_{m-1}^{\alpha_{m-1}}$$

schreiben läßt; $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ sind ganze rationale Zahlen [5, § 11 und § 34]. Mit $|\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{m-1}|$, $\alpha_\nu = |\alpha|\, \beta_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, m-1)$, $|\beta_1| + \cdots + |\beta_{m-1}| = 1$, $\gamma^{(\mu)} = \beta_1 \log |f_1^{(\mu)}| + \cdots + \beta_{m-1} \log |f_{m-1}^{(\mu)}|$, $|f^{(\mu)}| = E(|\alpha|\, \gamma^{(\mu)})$ $(\mu = 1, \ldots, m)$,

$$\gamma^{(1)} + \cdots + \gamma^{(m)} = 0 \tag{106}$$

folgt aus [5, § 35] die Abschätzung

$$2m\, c_{25}^{-1} \leqq |\gamma^{(1)}| + \cdots + |\gamma^{(m)}|\,;$$

vermöge (106) also

$$E(c_{25}^{-1}\, |\alpha|) \leqq |f^{(1)}| + \cdots + |f^{(m)}|\,. \tag{107}$$

Jetzt sei $s = S - N \in \mathfrak{F}(N, j)$. Im Falle $s = 0$ ist die Summe (104) endlich, mithin konvergent. Nun gelte

$$s^{(1)}, \ldots, s^{(m)} > 0\,,$$

und es bedeute $s^{(0)}$ die kleinste unter den Konjugierten von s. Wegen (107) bekommt man dann

$$E(c_{25}^{-1}\, 2\, |\alpha|) \leqq (s^{(0)})^{-1} \operatorname{Tr}(s f^2)\,.$$

Mit

$$k = \pi(|\operatorname{Im} j(f_1)| + \cdots + |\operatorname{Im} j(f_{m-1})|)$$

ergibt sich andererseits

$$|E\{j(f^{-1})\}| \leqq E(k\, 2\, |\alpha|)\,,$$

d. h.

$$|E\{j(f^{-1})\}| \leqq ((s^{(0)})^{-1} \operatorname{Tr}(s f^2))^{k c_{25}}.$$

folglich konvergiert (104).

Die Menge $\mathfrak{F}(N, j)$ ist nicht leer; denn sie enthält alle $S - N$, für die $\bar{S} - \bar{N}$ im Inneren eines Bildes des in Kap. I, § 4 definierten Fundamentalbereichs $\mathfrak{M}_0$ der Gruppe Ω liegt. Somit gilt

Satz 13: *Es sei* $m = 1$, $n \geqq 3$: $\Psi = \Omega(n, q)$ $(q = 1, 2)$; $\Psi = \Omega^+(n, q)$ $(q = 1, 2;\, n \equiv 1 \bmod 2)$ *oder* $m \geqq 3$, $n = 1$. *Dann existieren stets nicht identisch verschwindende Formen, welche den Bedingungen* (99) *genügen; die Gesamtheit dieser Formen besteht aus den konvergenten Summen* (105). *Man bekommt sämtliche Formen zur Gruppe* Δ, *indem man die Reihen* (105) *noch mit Einheiten* $K(\bar{Z})$ *multipliziert.*

Literatur

[1] Baily, W. L.: Satake's Compactification of V_n^*. Am. J. Math. 80, 348—364 (1958).

[2] Christian, U.: Über die Multiplikatorensysteme zur Gruppe der ganzen Modulsubstitutionen n-ten Grades. Math. Ann. 138, 363—397 (1959).

[3] Christian, U.: On the factors of automorphy for the group of integral modular substitutions of second degree. Ann. Math. 73, 134—153 (1961).

[4] Coxeter, H. S. M., and W. O. J. Moser: Generators and relations for discrete groups. Ergeb. Math. 14 (1957).

[5] Hecke, E.: Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig 1923.

[6] Humbert, P.: Théorie de la réduction des formes quadratiques définies positives dans un corps algébrique K fini. Comment. Math. Helv. 12, 263—306 (1939/40).

[7] Klein, F., u. R. Fricke: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Erster Band. Leipzig 1890.

[8] Klingen, H.: Über die Erzeugenden gewisser Modulgruppen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1956, 173—185.

[9] Klingen, H.: Bemerkungen über Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe n-ten Grades. Arch. Math. 10, 113—122 (1959).

[10] Koecher, M.: Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. I. Math. Z. 59, 399—416 (1954).

[11] Minkowski, H.: Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. J. reine angew. Math. 129, 220—274 (1905).

[12] Siegel, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades Math. Ann. 116, 617—657 (1939).

[13] Siegel, C. L.: Einheiten quadratischer Formen. Abhandl. math. Seminar Hans. Univ. 13, 209—239 (1940).

[14] Siegel, C. L.: Symplectic Geometry. Am. J. Math. 65, 1—86 (1943).

(Eingegangen am 25. April 1961)